

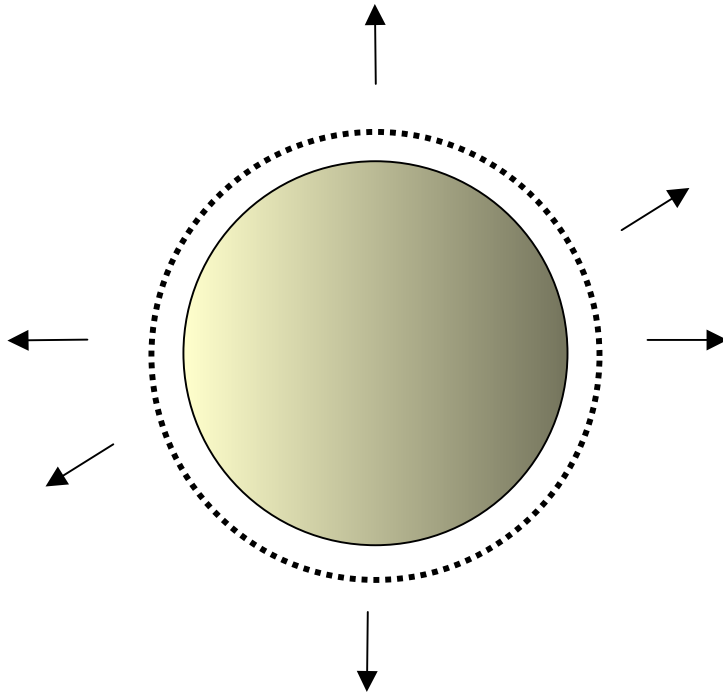
Modes propres de vibration d'un condensat

Etude par les règles de somme

- Structure des premiers modes de vibration
- Excitation par modification du potentiel de piégeage
- Densité spectrale $S(\omega)$
- Moments M_k de $S(\omega)$
- Expression des M_k sous forme de commutateurs
- Calcul des moments d'ordres les plus bas
- Application à l'étude des fréquences des modes propres de vibration les plus bas
- Discussion physique

Mode $n_r = 1, \ell = 0$

Mode de compression ou de respiration
Appelé aussi « monopole »



$$\omega_M = \omega(1, 0) = \omega_0 \sqrt{5} \quad (2.1)$$

$$P_{1,0}(r) = Ar^2 - B$$

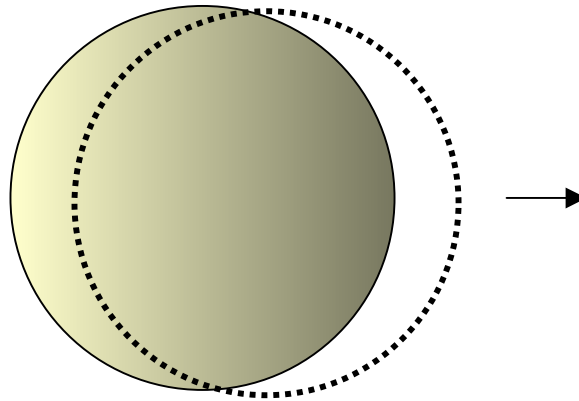
1 nœud radial

Le champ de vitesses pour un tel mode n'est pas
de divergence nulle

$$\delta S \propto P_{1,0}(r) \quad \vec{v} \propto \vec{\nabla} \delta S \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \propto \Delta P_{1,0}(r) \propto 6A$$

Mode $n_r = 0, \ell = 1$

(Vibration du centre de masse)



$$\omega_{CM} = \omega(0,1) = \omega_0 \quad (2.2)$$

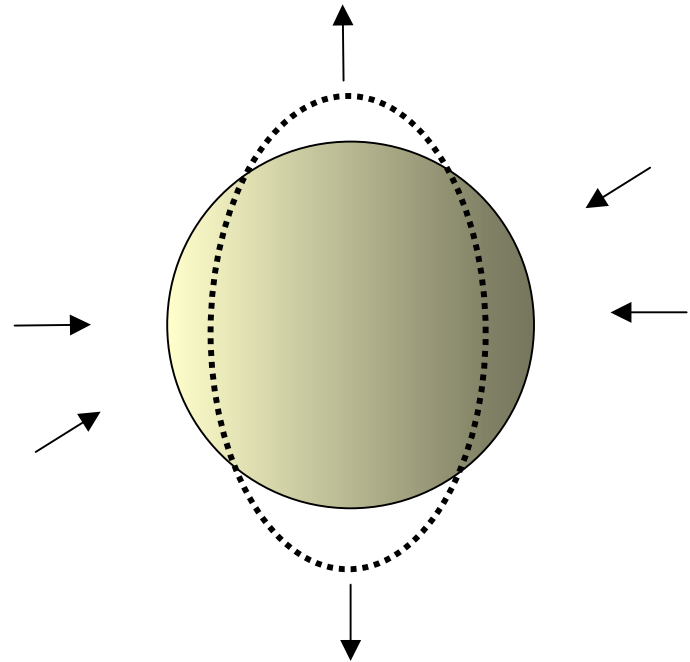
Modes de surface $n_r = 0, \ell = 2$

Appelés aussi modes « quadrupolaires »

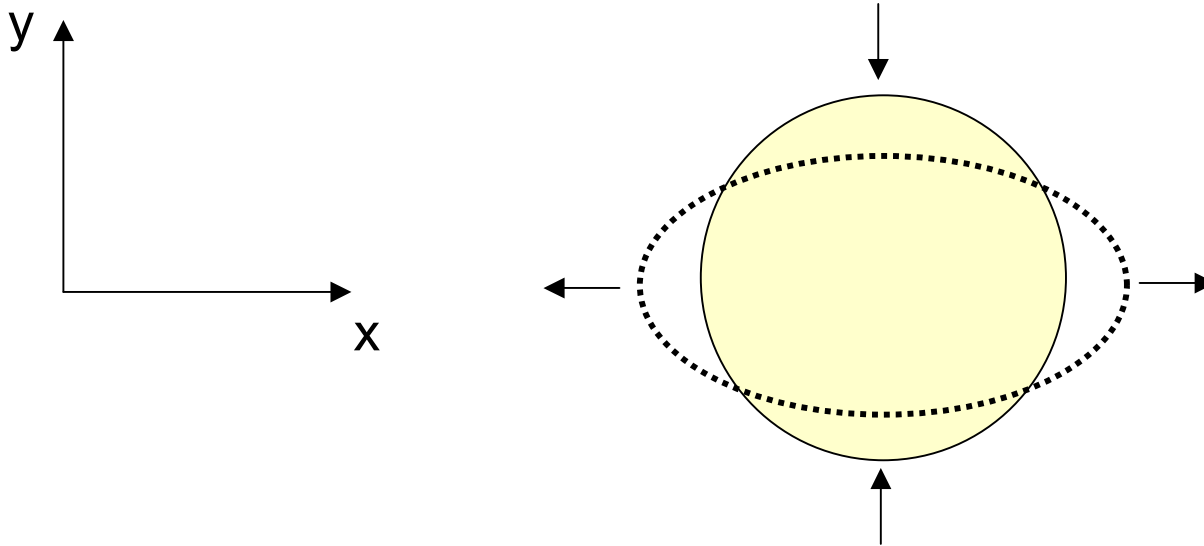
$$\omega_Q = \omega(0, 2) = \omega_0 \sqrt{2} \quad (2.3)$$

Mode $n_r = 0, \ell = 2, m = 0$

Mode quadrupolaire
respectant la symétrie
de révolution autour de Oz



Mode en $x^2 - y^2$ ($n_r = 0, \ell = 2, m = \pm 2$)



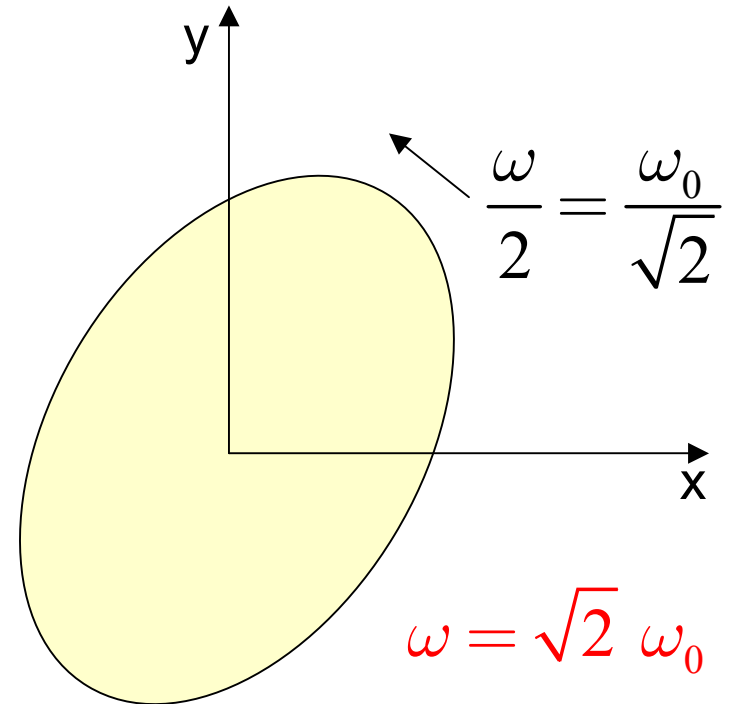
Déformation quadrupolaire dans le plan xOy.
Pas de changement sur Oz

Mode $n_r = 0, \ell = 2, m = 2$

$$\text{Re } r^2 Y_2^2(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} = r_{\perp}^2 \cos(2\varphi - \omega t) \quad (2.4)$$

Déformation elliptique
tournant à la vitesse
angulaire $\omega/2$ dans le
plan xOy

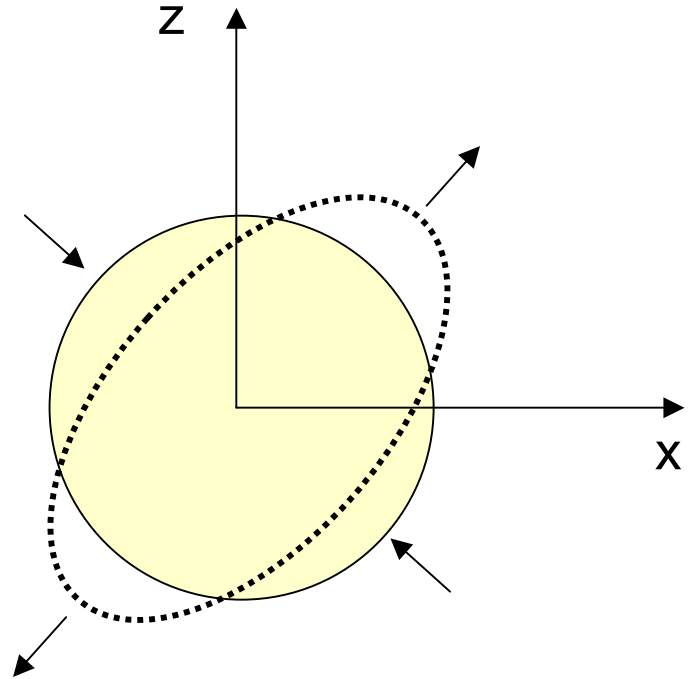
Au bout d'une demi-période
de rotation, on retrouve la
même ellipse



Le mode en $x^2 - y^2$ est une superposition
linéaire des modes $n = 0, \ell = 2, m = \pm 2$

Mode en xz ($n_r = 0, \ell = 2, m = \pm 1$)

Déformation elliptique
d'axes inclinés de 45°
par rapport à Ox et Oz .
Pas de changement
sur Oy .



Piège non sphérique à symétrie de révolution autour de Oz

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.5)$$

$\omega_{\perp} \gg \omega_z$ condensat en forme de cigare

$\omega_{\perp} \ll \omega_z$ condensat en forme de crêpe

m reste un bon nombre quantique, mais non ℓ

$\delta \rho = r^2 Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ reste cependant une solution
pour $\ell = 2$, $m = \pm 2$ et $m = \pm 1$

Ondes de surface

$$m = \pm 2 \qquad \omega = \omega_{\perp} \sqrt{2} \quad (2.6)$$

$$m = \pm 1 \qquad \omega = \sqrt{\omega_{\perp}^2 + \omega_z^2} \quad (2.7)$$

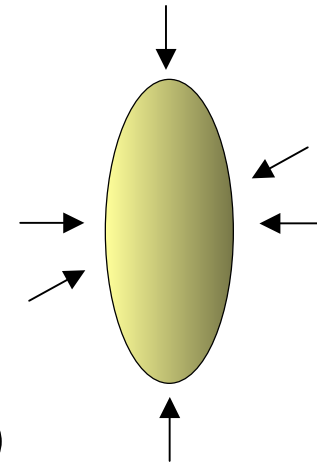
Modes m=0

Combinaisons linéaires de $r^2 Y_2^0$ et $r^2 Y_0^0$

Modes monopôle-quadrupole de divergence non nulle

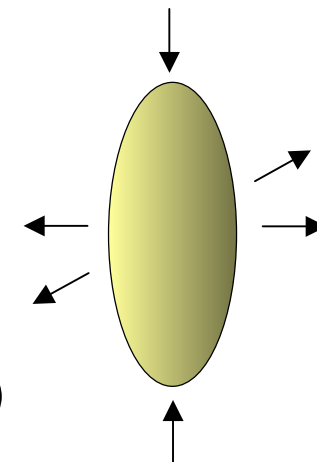
$$\omega^2 = 2\omega_{\perp}^2 + \frac{3}{2}\omega_z^2 + \frac{1}{2}\sqrt{9\omega_z^4 - 16\omega_z^2\omega_{\perp}^2 + 16\omega_{\perp}^4}$$

(2.8 a)



$$\omega^2 = 2\omega_{\perp}^2 + \frac{3}{2}\omega_z^2 - \frac{1}{2}\sqrt{9\omega_z^4 - 16\omega_z^2\omega_{\perp}^2 + 16\omega_{\perp}^4}$$

(2.8 b)



Potentiel de piégeage

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 + \omega_z^2 z^2) \quad r_{\perp}^2 = x^2 + y^2 \quad (2.9)$$

$\omega_{\perp} \gg \omega_z$ Condensat en forme de cigare

$\omega_{\perp} \ll \omega_z$ Condensat en forme de crêpe

$\omega_{\perp} = \omega_z$ Condensat sphérique

En modifiant les courants dans les bobines créant le champ de piégeage, on peut ajouter une perturbation

$$\delta V(\vec{r}, t) = \varepsilon \operatorname{Re} r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (2.10)$$

susceptible d'exciter les modes propres de vibration les plus bas du condensat.

Excitation du mode de compression

$n_r = 1, \ell = 0, m = 0$ pour un condensat sphérique

$$\delta V(\vec{r}, t) = \varepsilon R e r^2 e^{-i\omega t} \quad (2.11)$$

La perturbation qu'il faut ajouter à $\hat{H}$ s'écrit $\hat{F}e^{-i\omega t} + h.c.$ avec

$$\hat{F} = \varepsilon \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 \quad (2.12)$$

Cas d'une perturbation statique ($\omega=0$)

L'effet est de changer la fréquence propre du piège

$$\frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \rightarrow \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + \varepsilon r^2 \quad (2.13)$$

$$\omega_0^2 \rightarrow (\omega_0 + \delta \omega)^2 \quad (2.14)$$

$$m \omega_0 \delta \omega \simeq \varepsilon \quad \delta \omega \simeq \frac{\varepsilon}{m \omega_0} \quad (2.15)$$

Excitation du mode $x^2 - y^2$

Condensat avec symétrie de révolution autour de $0z$

On augmente la raideur du piège le long de $0x$ et on la diminue le long de $0y$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) &\rightarrow \frac{1}{2} m \left[(\omega_{\perp} + \delta \omega)^2 x^2 + (\omega_{\perp} - \delta \omega)^2 y^2 \right] \\
 &\simeq \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + m \omega_{\perp} \delta \omega (x^2 - y^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

La perturbation qu'il faut ajouter à $\hat{H}$ s'écrit $\hat{F} e^{-i \omega t} + h.c.$

avec $\hat{F} = \varepsilon \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i^2 - \hat{y}_i^2)$

$$\varepsilon = m \omega_{\perp} \delta \omega
 \tag{2.17}$$

Excitation du mode $n_r = 0, \ell = 2, m = 2$

Condensat avec symétrie de révolution autour de Oz

On rend le potentiel transverse anisotrope en augmentant ω_x et en diminuant ω_y , et on fait tourner un tel potentiel autour de Oz

La perturbation qu'il faut ajouter à $\hat{H}$ s'écrit $\hat{F}e^{-i\omega t} + h.c.$ avec :

$$\hat{F} = \varepsilon \sum_{i=1}^N \left(\hat{x}_i + i \hat{y}_i \right)^2 = \varepsilon \sum_{i=1}^N \hat{r}_{\perp i}^2 e^{2i\varphi_i} \quad (2.18)$$

La déformation du potentiel transverse, proportionnelle à $\varepsilon r_{\perp}^2 \cos(2\varphi - \omega t)$, tourne à la fréquence $\omega / 2$.

Densité spectrale $S(\omega)$

Quand on fait varier ω , on obtient une résonance toutes les fois que $\hbar\omega$ coïncide avec $E_n - E_0 = \hbar\omega_{n0}$, où E_0 est l'énergie du condensat (état fondamental $|\psi_0\rangle$ de $\hat{H}$) et E_n l'énergie d'un état excité $|\psi_n\rangle$.

La densité spectrale $S(\omega)$ est donc une somme de fonctions $\delta(\omega - \omega_{n0})$ avec des poids $|\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle|^2$.

$$S(\omega) = \sum_n \delta(\omega - \omega_{n0}) |\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle|^2 \quad (2.19)$$

Aucune approximation n'est faite
sur $|\psi_0\rangle, |\psi_n\rangle, E_0, E_n$

Moments de $S(\omega)$

Moments M_k d'ordre k

$$\begin{aligned}
 M_k &= \int_0^\infty S(\omega) \omega^k d\omega \\
 &= \sum_n (\omega_{n0})^k \left| \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{\hbar^k} \sum_k (E_n - E_0)^k \left| \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle \right|^2
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Définitions analogues à celles introduites dans le cours 2000-2001.

Dans l'étude de la diffusion d'une particule sonde, c'est la transformée de Fourier $\hat{\rho}(\vec{k})$ de la densité spatiale $\hat{\rho}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{\vec{r}}_i)$ qui figurait à la place de $\hat{F}$.

Autres expressions équivalentes des moments M_k

Les moments M_k peuvent être réécrits sous forme de valeurs moyennes d'opérateurs dans $|\psi_0\rangle$

Moment M_0

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^\infty S(\omega) \, d\omega = \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \langle \psi_0 | \hat{F}^\dagger \hat{F} | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

Moment M_1

$$M_1 = \frac{1}{2\hbar} \langle \psi_0 | [\hat{F}^\dagger, [\hat{H}, \hat{F}]] | \psi_0 \rangle \quad (2.22)$$

Démonstration de l'identité (2.22)

$$\begin{aligned} [\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] &= [\hat{F}^+, \hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}] \\ &= \hat{F}^+ \hat{H}\hat{F} + \hat{F}\hat{H}\hat{F}^+ - \hat{F}^+ \hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}\hat{F}^+ \end{aligned} \quad (2.23)$$

L'utilisation de la relation de fermeture

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = 1$$

et de l'équation aux valeurs propres

$$\hat{H} |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$$

donne

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \psi_0 | \hat{F}^+ \hat{H} \hat{F} | \psi_0 \rangle &= \sum_n E_n |\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2 \\ \langle \psi_0 | \hat{F} \hat{H} \hat{F}^+ | \psi_0 \rangle &= \sum_n E_n |\langle \psi_n | \hat{F}^+ | \psi_0 \rangle|^2 \\ \langle \psi_0 | \hat{F}^+ \hat{F} \hat{H} | \psi_0 \rangle &= E_0 \sum_n |\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2 \\ \langle \psi_0 | \hat{H} \hat{F} \hat{F}^+ | \psi_0 \rangle &= E_0 \sum_n |\langle \psi_n | \hat{F}^+ | \psi_0 \rangle|^2 \end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

Utilisation des symétries

H est invariant par réflexion d'espace Π (réflexion par rapport à un plan vertical).

Les états $|\psi_n\rangle$ peuvent être choisis avec une parité bien définie

$$\hat{\Pi}|\psi_n\rangle = \pm|\psi_n\rangle$$

De même les opérateurs $F = r^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ se transforment simplement par Π

$$\hat{\Pi} \hat{F} \hat{\Pi}^+ = \pm \hat{F}^+$$

On a donc

$$\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle = \langle\psi_n|\hat{\Pi}^+\hat{\Pi}\hat{F}\hat{\Pi}^+\hat{\Pi}|\psi_0\rangle = \pm\langle\psi_n|\hat{F}^+|\psi_0\rangle$$

et par suite

$$\left|\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle\right|^2 = \left|\langle\psi_n|\hat{F}^+|\psi_0\rangle\right|^2 \quad (2.25)$$

Démonstration de (2.22) (suite)

En utilisant (2.23), (2.24) et (2.25), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | [\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] | \psi_0 \rangle &= \\ &= 2 \sum_n (E_n - E_0) |\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2 = 2 \hbar M_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ce qui démontre (2.22)

Expression de M_3

Des calculs analogues permettent de montrer que

$$M_3 = \frac{1}{2\hbar^3} \langle \psi_0 | [[\hat{F}^+, \hat{H}], [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{F}]]] | \psi_0 \rangle \quad (2.27)$$

Expression de M_{-1}

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \sum_{n \neq 0} \hbar (E_n - E_0)^{-1} \left| \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \hbar \sum_{n \neq 0} \frac{\left| \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle \right|^2}{E_n - E_0} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Susceptibilité statique χ_{st}

Supposons $\hat{F} = \hat{F}^+$ et ajoutons à $\hat{H}$ la perturbation statique $\lambda \hat{F}$

Cette perturbation modifie $|\psi_0\rangle$ et la valeur moyenne de $\hat{F}$ dans l'état ainsi perturbé varie de $\delta \langle \hat{F} \rangle$. Au 1^{er} ordre en λ

$$\delta \hat{F} = \lambda \chi_{st} \quad (2.29)$$

Calcul de la susceptibilité statique

Etat perturbé au premier ordre en λ

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = |\psi_0\rangle + \lambda \sum_{n \neq 0} |\psi_n\rangle \frac{\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle}{E_0 - E_n} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \delta \langle \hat{F} \rangle &= \langle \tilde{\psi}_0 | \hat{F} | \tilde{\psi}_0 \rangle - \langle \psi_0 | \hat{F} | \psi_0 \rangle \\ &\simeq 2\lambda \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2}{E_0 - E_n} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\chi_{\text{st}} = 2 \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2}{E_0 - E_n} \quad (2.32)$$

Lien entre M_{-1} et χ_{st}

De (2.28) et (2.32) on déduit

$$M_{-1} = -\frac{\hbar}{2} \chi_{\text{st}} \quad (2.33)$$

Calcul de M_1 pour le mode de compression dans un piège sphérique

L'opérateur qui excite le mode de compression est

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 \quad (2.34)$$

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{r}_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} g \delta(\hat{\vec{r}}_i - \hat{\vec{r}}_j) \quad (2.35)$$

Le seul terme de $\hat{H}$ avec lequel $\hat{F}$ ne commute pas est le terme d'énergie cinétique

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{F}] &= \sum_i \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2m}, \hat{r}_i^2 \right] = \sum_i \left[\frac{\hat{p}_{xi}^2}{2m}, \hat{x}_i^2 \right] + x \rightarrow y + x \rightarrow z \\ [\hat{p}_x^2, \hat{x}^2] &= [\hat{p}_x^2, \hat{x}] \hat{x} + \hat{x} [\hat{p}_x^2, \hat{x}] = -2i\hbar [\hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x}] \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$[\hat{H}, \hat{F}] = -\frac{2i\hbar}{m} \sum_i [\hat{x}_i \hat{p}_{xi} + \hat{y}_i \hat{p}_{yi} + \hat{z}_i \hat{p}_{zi} - 3i\hbar] \quad (2.37)$$

Suite du calcul de M_1

$$[\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] = -\frac{2i\hbar}{m} \sum_{i=1}^N [\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2 + \hat{z}_i^2, \hat{x}_i \hat{p}_{xi} + \hat{y}_i \hat{p}_{yi} + \hat{z}_i \hat{p}_{zi}] \quad (2.38)$$

$$[\hat{x}^2, \hat{x} \hat{p}_x] = 2i\hbar \hat{x}^2$$

$$[\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] = \frac{4\hbar^2}{m} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2 + \hat{z}_i^2) = \frac{4\hbar^2}{m} \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 \quad (2.39)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2\hbar} \langle \psi_0 | [\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{2\hbar}{m} \langle \psi_0 | \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{4\hbar}{m^2 \omega_0^2} \langle \psi_0 | \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{r}_i^2 | \psi_0 \rangle = \frac{4\hbar}{m^2 \omega_0^2} \langle E_{\text{pot}} \rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

Relation exacte

Calcul de M_3 pour le mode de compression dans un piège sphérique

Mêmes types de calculs. Nous ne détaillerons ici que le calcul des nouveaux commutateurs rencontrés, faisant intervenir $\delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j)$

$$\begin{aligned}
 [\hat{x}_i \hat{p}_{xi}, \delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j)] &= [\hat{x}_i \hat{p}_{xi}, \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j)] \delta(\hat{y}_i - \hat{y}_j) \delta(\hat{z}_i - \hat{z}_j) \\
 [\hat{x}_i \hat{p}_{xi}, \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j)] &= \hat{x}_i \hat{p}_{xi} \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j) - \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j) \hat{x}_i \hat{p}_{xi} \\
 &= -i \hbar \hat{x}_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j) \right]
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Groupons les termes i et j

$$[x_i p_{xi} + x_j p_{xj}, \delta(x_i - x_j)] = -i \hbar \left[x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \delta(x_i - x_j) \tag{2.42}$$

Suite du calcul des commutateurs faisant intervenir $\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x_i - x_j) &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x_i - x_j) \\
 \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \delta(x_i - x_j) &= (x_i - x_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x_i - x_j) \\
 &= (x_i - x_j) \frac{\partial}{\partial (x_i - x_j)} \delta(x_i - x_j) = -\delta(x_i - x_j)
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Compte tenu de l'identité entre distributions

$$x \delta'(x) = -\delta(x) \tag{2.44}$$

On obtient ainsi finalement

$$\left[\hat{x}_i \hat{p}_{xi} + \hat{x}_j \hat{p}_{xj}, \delta(\hat{\vec{r}}_i - \hat{\vec{r}}_j) \right] = i \hbar \delta(\hat{\vec{r}}_i - \hat{\vec{r}}_j) \tag{2.45}$$

Résultats du calcul de M_3

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{1}{2\hbar^3} \left\langle \left[\left[\hat{F}^+, \hat{H} \right], \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{F} \right] \right] \right] \right\rangle \\ &= \frac{2\hbar}{m^2} \left[4\langle E_{\text{cin}} \rangle + 4\langle E_{\text{pot}} \rangle + 9\langle E_{\text{int}} \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Théorème du viriel

(voir cours 1998-99, page V-6)

$$2\langle E_{\text{cin}} \rangle - 2\langle E_{\text{pot}} \rangle + 3\langle E_{\text{int}} \rangle = 0 \quad (2.47)$$

En combinant (2.46) et 2.47), on obtient

$$M_3 = \frac{4\hbar}{m^2} \left[5\langle E_{\text{pot}} \rangle - \langle E_{\text{cin}} \rangle \right] \quad (2.48)$$

Là encore, il s'agit d'une relation exacte.

Etude du moment M_3 dans 2 cas limites

1 – Gaz parfait de bosons (sans interactions)

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.49)$$

L'équation (2.48) devient :

$$M_3 = \frac{16\hbar}{m^2} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.50)$$

1 – Limite de Thomas-Fermi (interactions fortes)

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle \ll \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.51)$$

On peut négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation (2.48) qui devient :

$$M_3 = \frac{20\hbar}{m^2} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.52)$$

Calcul de M_{-1} pour le mode de compression dans un condensat sphérique

D'après (2.33), $M_{-1} = -\hbar \chi_{\text{st}} / 2$. Il faut donc calculer la susceptibilité statique χ_{st} apparaissant dans la réponse linéaire de $\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2$ à la perturbation $\hat{V} = \varepsilon \hat{F}$

$$\delta \langle \hat{F} \rangle = \sum_{i=1}^N \delta \langle \hat{r}_i^2 \rangle = \varepsilon \chi_{\text{st}} \quad (2.53)$$

La perturbation associée à la compression $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \delta \omega_0$ revient à ajouter à $\hat{H}$ la perturbation $\varepsilon \hat{F}$ où, d'après (2.15)

$$\varepsilon = m \omega_0 \delta \omega_0$$

On en déduit :

$$M_{-1} = -\frac{\hbar}{2m \omega_0} \frac{\sum_{i=1}^N \delta \langle \hat{r}_i^2 \rangle}{\delta \omega_0} = -\frac{N \hbar}{2m \omega_0} \frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial \omega_0} \quad (2.54)$$

Calcul de $\partial \langle \hat{r}^2 \rangle / \partial \omega_0$

Partons de l'équation de G-P indépendante du temps et introduisons les grandeurs sans dimensions

$$\begin{aligned} \xi &= r / \sqrt{\hbar / m \omega_0} & \vec{\nabla}_\xi &= \sqrt{\hbar / m \omega_0} \vec{\nabla}_r \\ \tilde{\varphi}(\xi) &= (\hbar / m \omega_0)^{3/4} \varphi(r) & \tilde{\mu} &= \mu / \hbar \omega_0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

L'équation de G-P devient : $\frac{1}{2}(-\Delta_\xi + \xi^2) \tilde{\varphi} + \lambda |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = \tilde{\mu} \tilde{\varphi}$
avec :

$$\lambda = g N \omega_0^{1/2} m^{3/2} \hbar^{-5/2} \quad (2.56)$$

Comme

$$\langle \hat{r}^2 \rangle = (\hbar / m \omega_0) \langle \hat{\xi}^2 \rangle \quad (2.57)$$

on en déduit

$$\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = -\frac{\hbar}{m \omega_0^2} \langle \hat{\xi}^2 \rangle + \frac{\hbar}{m \omega_0} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = -\frac{\langle \hat{r}^2 \rangle}{\omega_0} + \frac{\hbar}{m \omega_0} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \omega_0} \quad (2.58)$$

Calcul de $\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle / \partial \omega_0$

Comme l'équation de G-P ne dépend que de λ il en est de même de $\langle \hat{\xi}^2 \rangle = \int_0^\infty \xi^2 |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$. Donc

$$\frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega_0} \quad (2.59)$$

Pour la suite de la discussion, il est intéressant de relier $\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle / \partial \omega_0$ à $\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle / \partial N$

$$\frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} = \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial N} \quad (2.60)$$

De (2.56), (2.59), (2.60), on déduit :

$$\frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} \frac{\partial \lambda / \partial \omega_0}{\partial \lambda / \partial N} = \frac{N}{2\omega_0} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} \quad (2.61)$$

Expression de M_{-1} en fonction de $\partial \langle \hat{r}^2 \rangle / \partial N$

Reportons (2.61) dans (2.58). Il vient :

$$\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = -\frac{\langle \hat{r}^2 \rangle}{\omega_0} + \frac{\hbar N}{2m \omega_0^2} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} \quad (2.62)$$

Par ailleurs, on déduit de (2.57) que :

$$\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial N} = \frac{\hbar}{m \omega_0} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} \quad (2.63)$$

de sorte que

$$\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = -\frac{1}{\omega_0} \left[\langle \hat{r}^2 \rangle - \frac{N}{2} \frac{\partial}{\partial N} \langle \hat{r}^2 \rangle \right] \quad (2.64)$$

Finalement, l'équation (2.54) donne :

$$M_{-1} = \frac{N \hbar}{2m \omega_0^2} \left[\langle \hat{r}^2 \rangle - \frac{N}{2} \frac{\partial}{\partial N} \langle \hat{r}^2 \rangle \right] \quad (2.65)$$

Etude du moment M_{-1} dans 2 cas limites

1 – Gaz parfait de bosons (sans interactions)

$\langle \hat{r}^2 \rangle$ ne dépend pas de N .

Donc, $\partial \langle \hat{r}^2 \rangle / \partial N = 0$, et par suite

$$M_{-1} = \frac{N \hbar}{2 m \omega_0^2} \langle \hat{r}^2 \rangle = \frac{\hbar}{m^2 \omega_0^4} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.66)$$

1 – Limite de Thomas-Fermi (interactions fortes)

La dépendance en N de $\langle \hat{r}^2 \rangle$ est $N^{2/5}$

de sorte que $\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial N} = \frac{2}{5} \frac{\langle \hat{r}^2 \rangle}{N}$ et par suite :

$$M_{-1} = \frac{N \hbar}{2 m \omega_0^2} \frac{4}{5} \langle \hat{r}^2 \rangle = \frac{4}{5} \frac{\hbar}{m^2 \omega_0^4} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.67)$$

Application au calcul de la fréquence du mode monopolaire le plus bas

Dans un condensat sphérique, l'opérateur $\hat{F} e^{-i\omega t} + h.c.$ où $\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2$ excite les modes $n_r, \ell = 0, m = 0$ où $n_r = 1, 2, 3 \dots$. Soient $\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30} \dots$ les fréquences de ces modes, de poids proportionnels à $|F_{10}|^2, |F_{20}|^2, |F_{30}|^2 \dots$

où $F_{n0} = \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle$. D'après les définitions de M_1, M_3

$$\begin{aligned} \frac{M_3}{M_1} &= \frac{\omega_{10}^3 |F_{10}|^2 + \omega_{20}^3 |F_{20}|^2 + \omega_{30}^3 |F_{30}|^2 + \dots}{\omega_{10} |F_{10}|^2 + \omega_{20} |F_{20}|^2 + \omega_{30} |F_{30}|^2 + \dots} \\ &= \omega_{10}^2 \frac{|F_{10}|^2 + (\omega_{20} / \omega_{10})^3 |F_{20}|^2 + (\omega_{30} / \omega_{10})^3 |F_{30}|^2 + \dots}{|F_{10}|^2 + (\omega_{20} / \omega_{10}) |F_{20}|^2 + (\omega_{30} / \omega_{10}) |F_{30}|^2 + \dots} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$\omega_{10} = \omega_M$ est la fréquence du mode monopolaire le plus bas. Par ailleurs, $\omega_{n0} > \omega_{10}$ pour $n = 2, 3, \dots$

Borne supérieure pour la fréquence ω_M du mode monopolaire le plus bas

Comme $(\omega_{n0} / \omega_{10})^3 > \omega_{n0} / \omega_{10}$ pour $n = 2, 3, \dots$
on déduit de (2.68) que :

$$\frac{M_3}{M_1} > \omega_{10}^2 = \omega_M^2 \quad (2.69)$$

La même démarche permet de montrer que

$$\frac{M_1}{M_{-1}} > \omega_{10}^2 = \omega_M^2 \quad (2.70)$$

Les rapports de 2 moments différant de 2 unités
constituent donc des bornes supérieures pour ω_M^2

Cette borne supérieure peut coïncider avec ω_M^2 si
 $|F_{10}|^2 \gg |F_{n0}|^2$ pour $n = 2, 3, \dots$ c-à-d si la transition ayant
la fréquence la plus basse « épuise » la règle de somme.

Cas où la transition de fréquence la plus basse épuise la règle de somme

L'équation (2.68) et l'équation analogue pour M_1/M_{-1} donnent

$$M_3 / M_1 \simeq M_1 / M_{-1} \simeq \omega_M^2 \quad (2.71)$$

Test de l'égalité $M_3 / M_1 \simeq \omega_M^2$

$$\frac{M_3}{M_1} = \omega_0^2 \frac{5\langle E_{\text{pot}} \rangle - \langle E_{\text{cin}} \rangle}{\langle E_{\text{pot}} \rangle} \quad (2.72)$$

- Pour un gaz parfait de bosons, $\langle E_{\text{cin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle$ et on retrouve le résultat exact ($\omega_M = 2\omega_0$):

$$M_3 / M_1 \simeq 4\omega_0^2 \quad (2.73)$$

- A la limite de Thomas-Fermi, $\langle E_{\text{cin}} \rangle \ll \langle E_{\text{pot}} \rangle$, on retrouve le résultat exact ($\omega_M = \omega_0\sqrt{5}$):

$$M_3 / M_1 \simeq 5\omega_0^2 \quad (2.74)$$

Test de l'égalité $M_1 / M_{-1} \simeq \omega_M^2$

Pour un gaz parfait de bosons, nous avons d'après (2.40) et (2.66)

$$\frac{M_1}{M_{-1}} \simeq 4 \omega_0^2 \quad (2.75)$$

alors qu'à la limite de Thomas-Fermi les équations (2.40) et (2.67) donnent :

$$\frac{M_1}{M_{-1}} \simeq 5 \omega_0^2 \quad (2.76)$$

valeurs qui coïncident avec les résultats exacts correspondant à ces 2 limites

Le fait que M_3/M_1 et M_1/M_{-1} soient égaux dans les 2 cas limites et coïncident avec les valeurs exactes de ω_M donne confiance dans le fait que la règle de somme est épuisée par la transition de fréquence la plus basse.

Etude de M_3/M_1 dans le régime intermédiaire

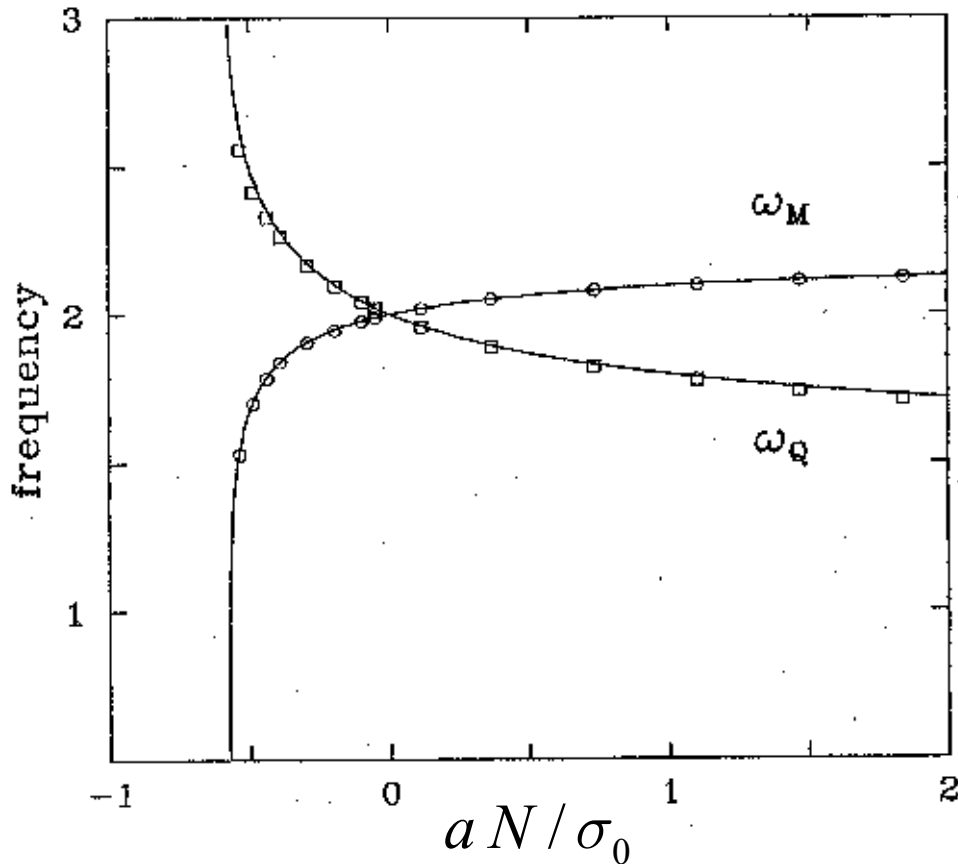
L'équation (2.72) donnant M_3/M_1 est exacte.

On peut, à partir de la résolution numérique de l'équation de G-P indépendante du temps, calculer $\langle E_{\text{pot}} \rangle$ et $\langle E_{\text{cin}} \rangle$ pour chaque valeur du paramètre $\chi_{\text{cond}} = N a / \sigma_0$ caractérisant la force des interactions

Le résultat ainsi obtenu pour M_3 / M_1 peut alors être comparé au résultat du calcul numérique de ω_M à partir des équations de Bogolubov- de Gennes, qui sont valables pour toutes les valeurs de χ_{cond} . Des calculs analogues peuvent être faits pour la fréquence ω_Q du mode quadrupolaire (voir plus loin).

Les résultats, présentés sur la figure 1 montrent un excellent accord entre les 2 méthodes de calcul, quel que soit χ_{cond}

Test de la méthode des moments



Courbes en traits pleins

Valeurs de ω_M et ω_Q calculées
par la méthode des moments

Ronds et carrés

Résolution numérique des
équations de Bogolubov-
de Gennes

Figure 1 extraite de F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari
Rev. Mod. Phys. 71, 463 (1999)

Mode quadrupolaire en $x^2 - y^2$

La méthode des moments peut être aussi utilisée pour calculer la fréquence du mode quadrupolaire en $x^2 - y^2$, aussi bien pour un piège sphérique que pour un piège ayant une symétrie de révolution autour de Oz.

Les calculs sont très analogues aux calculs détaillés plus haut pour le mode monopolaire dans un piège sphérique et conduisent aux valeurs suivantes pour M_1 et M_3

$$M_1 = \frac{4\hbar}{m^2 \omega_{\perp}^2} \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp} \quad (2.77)$$

$$M_3 = \frac{8\hbar}{m^2} \left(\langle E_{\text{cin}} \rangle_{\perp} + \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp} \right) \quad (2.78)$$

Expression de ω_Q

Si l'on suppose que la transition de fréquence la plus basse épuise la règle de somme, on obtient :

$$\omega_Q^2 \simeq \frac{M_3}{M_1} = 2 \omega_{\perp}^2 \frac{\langle E_{\text{cin}} \rangle_{\perp} + \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp}}{\langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp}} \quad (2.79)$$

La fréquence donnée par cette expression coïncide avec la valeur connue par ailleurs dans les 2 cas limites des interactions faibles et fortes :

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle_{\perp} = \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp} \rightarrow \omega_Q = 2 \hbar \omega_{\perp} \quad (2.80)$$

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle_{\perp} \ll \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp} \rightarrow \omega_Q = \hbar \omega_{\perp} \sqrt{2} \quad (2.81)$$

Elle est également en très bon accord avec la valeur numérique de ω_Q dans les régimes intermédiaires (Fig.1)