

Tourbillons quantiques et modes propres de vibration

Peut-on détecter la présence d'un tourbillon quantique dans un condensat par une modification des fréquences des modes propres de vibration ?

Importance d'une méthode spectroscopique pour détecter et étudier les tourbillons.

Les mesures des fréquences des modes propres de vibration sont en effet assez précises.

Plan

- Principe de la méthode
- Ordres de grandeur
- Calcul de la modification des fréquences de vibration par la méthode des règles de somme (pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi)
- Calcul plus précis valable également pour les faibles densités
- Etude d'autres géométries de piégeage

Principe de la méthode

Condensat ayant la symétrie de révolution autour de Oz

Fréquence radiale ω_{\perp} et axiale ω_z

Considérons les 2 modes quadrupolaires de surface $m = \pm 2$, de fréquences

$$\omega_{+} = \omega_Q (m = + 2) \quad \omega_{-} = \omega_Q (m = - 2) \quad (7.1)$$

Déformations elliptiques tournant dans des sens opposés avec des vitesses angulaires $\omega_{\pm} / 2$ (voir T-42)

Ces 2 vitesses angulaires sont-elles modifiées par la présence d'un tourbillon d'axe Oz ?

Principe de la méthode (suite)

En l'absence de tourbillon

Le système est invariant par renversement du sens du temps. Il s'ensuit que

$$\omega_+ = \omega_- = \omega_Q \quad (7.2)$$

Les 2 déformations elliptiques $m = \pm 2$ tournent avec des vitesses angulaires $\pm \omega_Q / 2$

Le mode en $x^2 - y^2$ est une superposition linéaire des modes $m = \pm 2$. La relation (7.2) entraîne que ce mode est un déformation quadrupolaire d'axes fixes et de fréquence ω_Q double de la fréquence de rotation des ellipses.

Principe de la méthode (suite)

En présence de tourbillon d'axe Oz

Le système n'est plus invariant par renversement du sens du temps. Le champ de vitesses du tourbillon est, suivant le signe de m , soit parallèle, soit antiparallèle au champ de vitesses de l'excitation élémentaire $m = \pm 2$

$$\omega_+ - \omega_- = \delta\omega \neq 0 \quad (7.3)$$

La bissectrice de l'angle formé par les grands axes des 2 ellipses tournant dans des sens opposés à $\omega_+ / 2$ et $\omega_- / 2$ tourne à la fréquence angulaire

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+}{2} - \frac{\omega_-}{2} \right) = \frac{\omega_+ - \omega_-}{4} \quad (7.4)$$

Principe de la méthode (suite)

Mode en $x^2 - y^2$ en présence d'un tourbillon

Superposition linéaire des modes $m = \pm 2$

La déformation quadrupolaire ne vibre plus avec des axes fixes, mais avec des axes qui tournent à la vitesse $(\omega_+ - \omega_-) / 4$, la fréquence de vibration étant $(\omega_+ + \omega_-) / 2$

Expérimentalement, on introduit une déformation quadrupolaire sur le condensat. On la coupe brusquement et on observe l'évolution ultérieure du condensat.

Ordre de grandeur de $\delta \omega$

$$\frac{\delta \omega}{\omega} \simeq \frac{v}{c} \quad (7.5)$$

ω : Fréquence du mode quadrupolaire

v : Vitesse due au tourbillon

c : Vitesse du son

$$v \simeq \frac{1}{2\pi R} \frac{h}{M} = \frac{\hbar}{M R} \quad (7.6)$$

La circulation de la vitesse est quantifiée

$$c \simeq \sqrt{\frac{\mu}{M}} \quad (7.7)$$

μ : Potentiel chimique

Ordre de grandeur de $\delta \omega$ (suite)

A la limite de Thomas-Fermi

$$\frac{1}{2} M \omega_0^2 R^2 = \mu \quad (7.8)$$

$$R \simeq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\mu}{M}} \simeq \frac{c}{\omega_0} \quad (7.9)$$

Par ailleurs

$$\omega \simeq \omega_0 \quad (7.10)$$

De (7.5), (7.6), (7.7), (7.10), on déduit alors

$$\delta \omega \simeq \omega_0 \frac{v}{c} \simeq \omega_0 \frac{\hbar}{M R c} \simeq \frac{\hbar}{M R^2} \quad (7.11)$$

L'équation (7.6) montre que le \hbar apparaissant dans (7.11) est le moment cinétique ℓ_z du tourbillon. Donc

$$\delta \omega \simeq \frac{\ell_z}{M R^2} \quad (7.12)$$

Remarque

Les calculs précédents permettent aussi de comprendre pourquoi les fréquences des modes propres de vibration (voir cours I et II) ne dépendent que des fréquences propres du piège et non des interactions (décrites par la longueur de diffusion a) et du nombre N de bosons. On peut en effet écrire la relation de dispersion

$$\omega \simeq c q \simeq \frac{c}{R} \quad (7.13)$$

où c 'est la vitesse du son, et q le vecteur d'onde, de l'ordre de l'inverse du rayon R

Remarque (suite)

La relation (7.9) montre que c/R ne dépend que de ω_0 , compte tenu de la relation (7.8) entre R et μ .

On peut aussi utiliser les relations (6.29) et (6.41) du cours 1998-99 (pages VI-8 et VI-9)

$$\mu = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(15 \frac{aN}{\sigma_0} \right)^{2/5} \quad R = \sigma_0 \left(15 \frac{aN}{\sigma_0} \right)^{1/5}$$

avec

$$\sigma_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0}$$

Comme c est proportionnel à $\mu^{1/2}$, le numérateur et le dénominateur de (7.13) ont la même dépendance en $(aN)^{1/5}$ qui se simplifie dans le rapport

Opérateurs excitant les modes $m = \pm 2$

$$\hat{F}_{\pm} e^{-i\omega t} + h \cdot c \quad (7.14)$$

$$\hat{F}_{\pm} = \sum_{k=1}^N \hat{f}_{\pm}(\vec{r}_k) \quad (7.15)$$

$$\hat{f}_{\pm} = (\hat{x} \pm i \hat{y})^2 \quad (7.16)$$

Densités spectrales $S_{\pm}(E)$

$$S_{\pm}(E) = \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{F}_{\pm} | \psi_0 \rangle \right|^2 \delta(E - E_{n0}) \quad (7.17)$$

$|\psi_0\rangle$: état du condensat, d'énergie E_0 contenant ou non un tourbillon

$|\psi_n\rangle$: état excité, d'énergie E_n
 $E_{n0} = E_n - E_0 \quad (7.18)$

Moments des densités spectrales

Définition

Dans ce qui suit nous désirons comparer les poids et les fréquences des modes $m = \pm 2$

Plutôt que de considérer séparément les moments d'ordre p de $S_+(E)$ et $S_-(E)$ nous introduisons les quantités

$$\begin{aligned} m_p^\pm &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE E^p [S_+(E) \pm S_-(E)] \\ &= \sum_n (E_n - E_0)^p \left[\left| \langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle \right|^2 \pm \left| \langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle \right|^2 \right] \end{aligned} \tag{7.19}$$

Etude de m_0^-

Expression en fonction de la valeur moyenne d'un commutateur

$$m_0^- = \langle \psi_0 | [\hat{F}_-, \hat{F}_+] | \psi_0 \rangle \quad (7.20)$$

Démonstration de (7.20)

$$\begin{aligned} m_0^- &= \langle \psi_0 | \hat{F}_- \hat{F}_+ - \hat{F}_+ \hat{F}_- | \psi_0 \rangle \\ &= \sum_n \left[|\langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle|^2 - |\langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle|^2 \right] \end{aligned}$$

Etude de m_0^-

Comme \hat{F}_+ commute avec \hat{F}_- l'équation (7.20) entraîne

$$m_0^- = 0 \quad (7.21)$$

Hypothèse de 2 transitions prédominantes

Supposons qu'une seule transition de fréquence ω_+ (respectivement ω_-), épuise les règles de somme sur \hat{F}_+ (respectivement \hat{F}_-)

$$S_+(E) \simeq \sigma^+ \delta(E - \hbar \omega_+) \quad (7.22a)$$

$$S_-(E) \simeq \sigma^- \delta(E - \hbar \omega_-) \quad (7.22b)$$

σ^+ : "poids" de la transition ω_+

σ^- : "poids" de la transition ω_-

Hypothèse d'autant mieux vérifiée que l'excitation est plus collective, c-à-d que N est plus grand.

Conséquence de cette hypothèse

Le report des équations (7.22) dans (7.19) donne

$$m_0^- = \sigma^+ - \sigma^- \quad (7.23)$$

$$m_1^+ = \sigma^+ \hbar \omega_+ + \sigma^- \hbar \omega_- \quad (7.24)$$

$$m_2^- = \sigma^+ \hbar^2 \omega_+^2 - \sigma^- \hbar^2 \omega_-^2 \quad (7.25)$$

Le résultat (7.21) montre alors que

$$\sigma^+ = \sigma^- \quad (7.26)$$

Les 2 transitions à ω_{\pm} ont même poids.

On déduit alors de (7.24), (7.25), (7.26) que

$$\frac{m_2^-}{m_1^+} = \frac{\hbar^2 (\omega_+^2 - \omega_-^2)}{\hbar (\omega_+ + \omega_-)} = \hbar (\omega_+ - \omega_-) \quad (7.27)$$

Intérêt de la méthode des moments

Comme tous les moments, m_2^- et m_1^+ peuvent être mis sous la forme de valeurs moyennes de commutateurs dans l'état fondamental du système.

Ces commutateurs peuvent être calculés exactement à partir des relations de commutations canoniques

Si l'hypothèse des 2 transitions prédominantes est valable, le rapport m_2^- / m_1^+ permet alors d'accéder à l'écart de fréquence entre les 2 modes $m = \pm 2$

Etude de m_1^+

Expression en fonction de la valeur moyenne d'un commutateur

$$m_1^+ = \langle \psi_0 | [\hat{F}_-, [\hat{H}, \hat{F}_+]] | \psi_0 \rangle \quad (7.28)$$

Démonstration de (7.28)

$$\begin{aligned} [\hat{F}_-, [\hat{H}, \hat{F}_+]] &= \hat{F}_- \hat{H} \hat{F}_+ + \hat{F}_+ \hat{H} \hat{F}_- - \hat{F}_- \hat{F}_+ \hat{H} - \hat{H} \hat{F}_+ \hat{F}_- \\ \langle \psi_0 | [\hat{F}_-, [\hat{H}, \hat{F}_+]] | \psi_0 \rangle &= \\ &+ \sum_n E_n \left\{ |\langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle|^2 + |\langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle|^2 \right\} \\ &- E_0 \sum_n \left\{ |\langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle|^2 + |\langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle|^2 \right\} \\ &= \sum_n (E_n - E_0) \left[|\langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle|^2 + |\langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle|^2 \right] = m_1^+ \end{aligned}$$

Etude de m_1^+ (suite)

Calcul de la valeur moyenne du commutateur

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2M} + V_{ext}(\hat{\vec{r}}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} g \delta(\hat{\vec{r}}_i - \hat{\vec{r}}_j)$$
$$V_{ext}(\vec{r}_i) = \frac{M}{2} \left[\omega_{\perp}^2 (x_i^2 + y_i^2) + \omega_z^2 z_i^2 \right] \quad (7.29)$$

Les seuls termes de H ne commutant pas avec F_+ et F_- sont les termes d'énergie cinétique

Résultat du calcul de m_1^+

$$m_1^+ = \frac{8N\hbar^2}{M} \langle \hat{r}_{\perp}^2 \rangle_0 = \frac{8N\hbar^2}{M} \langle \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \rangle_0 \quad (7.30)$$

$\langle \rangle_0$: valeur moyenne dans la fonction d'onde $\varphi_0(\vec{r})$ (normée à 1) décrivant le condensat

Etude de m_2^-

Expression en fonction de commutateurs

$$m_2^- = \langle \psi_0 | \left[\left[\hat{F}_-, \hat{H} \right], \left[\hat{H}, \hat{F}_+ \right] \right] | \psi_0 \rangle \quad (7.31)$$

Le commutateur multiple apparaissant en (7.31) donne naissance à 3 types de termes

$\hat{F}_- \hat{H}^2 \hat{F}_+, \quad \hat{F}_+ \hat{H}^2 \hat{F}_-$	Termes en E_n^2
$\hat{H} \hat{F}_- \hat{F}_+ \hat{H}, \quad \hat{H} \hat{F}_+ \hat{F}_- \hat{H}$	Termes en E_0^2
$\hat{H} \hat{F}_+ \hat{H} \hat{F}_-, \hat{H} \hat{F}_- \hat{H} \hat{F}_+, \hat{F}_+ \hat{H} \hat{F}_- \hat{H}, \hat{F}_- \hat{H} \hat{F}_+ \hat{H}$	Termes en $E_0 E_n$

Le regroupement de ces termes permet de faire apparaître $(E_0 - E_n)^2$, puis m_2^-

Résultats du calcul des commutateurs

$$m_{\frac{-}{2}} = \frac{16\hbar^3 N}{M^2} \langle \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x \rangle_0 = \frac{16\hbar^3 N}{M^2} \langle \hat{\ell}_z \rangle_0 \quad (7.32)$$

Résultat final pour $\omega_+ - \omega_-$

Le report de (7.30) et (7.32) dans (7.27) donne finalement

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{2}{M \langle r_{\perp}^2 \rangle} \langle \hat{\ell}_z \rangle_0 \quad (7.33)$$

résultat en accord avec l'ordre de grandeur calculé en (7.12)

Cas d'un gaz parfait

Motivations de cette étude

Le calcul des fréquences des modes de surface $m=+2$ et -2 pour un condensat de bosons sans interactions possédant un tourbillon est simple et peut être fait sans approximations

Les résultats obtenus permettent de tester l'hypothèse des 2 transitions prédominantes faite plus haut quand le condensat n'est pas à la limite de Thomas-Fermi et, éventuellement, de la compléter.

Quanta circulaires droits et gauches

Seuls, les degrés de liberté transverses sont à considérer. Les états à 1 particule sont donc les états d'un oscillateur harmonique isotrope à 2 dimensions qui peuvent être classés par les nombres quantiques n_d et n_g , nombre de quanta circulaires droits et gauches (réf. 18)

$$\begin{cases} \hat{a}_d^+ = (\hat{a}_x^+ + i\hat{a}_y^+)/\sqrt{2} & \hat{a}_g^+ = (\hat{a}_x^+ - i\hat{a}_y^+)/\sqrt{2} \\ \hat{a}_d = (\hat{a}_x - i\hat{a}_y)/\sqrt{2} & \hat{a}_g = (\hat{a}_x + i\hat{a}_y)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (7.34)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_{\perp} \left(\hat{a}_d^+ \hat{a}_d + \hat{a}_g^+ \hat{a}_g + \frac{1}{2} \right) \quad (7.35)$$

$$\hat{L}_Z = \hbar (\hat{a}_d^+ \hat{a}_d - \hat{a}_g^+ \hat{a}_g) \quad (7.36)$$

État du condensat

Tous les bosons sont condensés dans l'état le plus bas de moment cinétique $+\hbar$ c'est-à-dire dans l'état

$$|0_g, 1_d\rangle = |n_g = 0, n_d = 1\rangle \quad (7.37)$$

Expression des opérateurs $\hat{x} \pm i \hat{y}$

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{\sigma_{0\perp}}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x + \hat{a}_x^+) \\ \hat{y} &= \frac{\sigma_{0\perp}}{\sqrt{2}} (\hat{a}_y + \hat{a}_y^+) \end{aligned} \quad \sigma_{0\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_{\perp}}} \quad (7.38)$$

$$\hat{x} + i \hat{y} = \sigma_{0\perp} (\hat{a}_g + \hat{a}_d^+) \quad (7.39)$$

$$\hat{x} - i \hat{y} = \sigma_{0\perp} (\hat{a}_g^+ + \hat{a}_d) \quad (7.40)$$

Excitation des modes $m = \pm 2$ à partir de l'état à un tourbillon

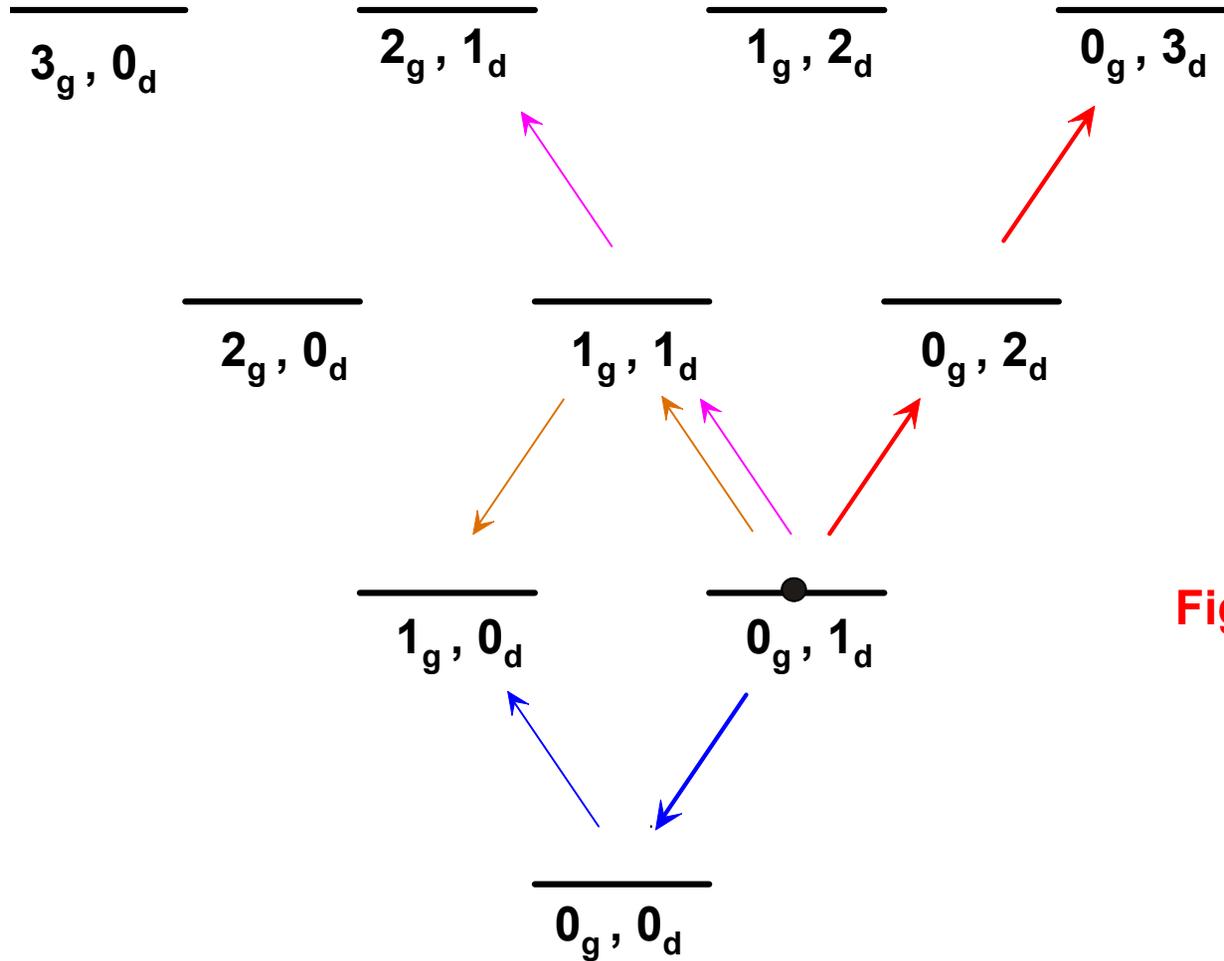


Figure VII-1

Transition excitée par f_+

$$\begin{aligned}
 (\hat{x} + i \hat{y}) |0_g, 1_d\rangle &= \sigma_{0\perp} (\hat{a}_g + \hat{a}_d^+) |0_g, 1_d\rangle \\
 &= \sigma_{0\perp} \sqrt{2} |0_g, 2_d\rangle
 \end{aligned}
 \tag{7.41}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_+ |0_g, 1_d\rangle &= (\hat{x} + i \hat{y})^2 |0_g, 1_d\rangle \\
 &= \sigma_{0\perp} \sqrt{2} (\hat{x} + i \hat{y}) |0_g, 2_d\rangle = \sigma_{0\perp}^2 \sqrt{2} (\hat{a}_d^+ + \hat{a}_g) |0_g, 2_d\rangle \\
 &= \sigma_{0\perp}^2 \sqrt{6} |0_g, 3_d\rangle
 \end{aligned}
 \tag{7.42}$$

Une seule transition est excitée par f_+

$$\text{Fréquence : } \omega_+ = 2 \omega_{\perp}
 \tag{7.43}$$

$$\text{Poids : } 6 \sigma_{0\perp}^4
 \tag{7.44}$$

Transitions excitées par \hat{f}_-

$$\begin{aligned}(\hat{x} + i \hat{y})|0_g, 1_d\rangle &= \sigma_{0\perp} (\hat{a}_g^+ + \hat{a}_d)|0_g, 1_d\rangle \\ &= \sigma_{0\perp} (|1_g, 1_d\rangle + |0_g, 0_d\rangle)\end{aligned}\tag{7.45}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_-|0_g, 1_d\rangle &= (\hat{x} + i \hat{y})^2|0_g, 1_d\rangle \\ &= \sigma_{0\perp}^2 (\hat{a}_g^+ + \hat{a}_d)(|1_g, 1_d\rangle + |0_g, 0_d\rangle) \\ &= \sigma_{0\perp}^2 [\sqrt{2}|2_g, 1_d\rangle + (1+1)|1_g, 0_d\rangle]\end{aligned}\tag{7.46}$$

2 états finals possibles

2 transitions de fréquences différentes peuvent être excitées par \hat{f}_-

Fréquences et poids des 2 transitions pouvant être excitées par f_{\perp}

- Etat final $|2_g, 1_d\rangle$
Fréquence $\omega_{\text{up}}^- = 2\omega_{\perp}$ (7.47)
Poids $\sigma_{\text{up}}^- = 2\sigma_{0\perp}^4$

- Etat final $|1_g, 0_d\rangle$
Fréquence $\omega_{\text{down}}^- = 0$ (7.48)
Poids $\sigma_{\text{down}}^- = 4\sigma_{0\perp}^4$

Amélioration de l'hypothèse des 2 transitions prédominantes

Quand les interactions sont faibles, il n'est donc plus légitime de considérer qu'une seule transition épuise la règle de somme sur $S_-(E)$

Une approximation meilleure que (7.22) consiste donc à poser

$$\begin{cases} S_+(E) = \sigma^+ \delta(E - \hbar \omega_+) \\ S_-(E) = \sigma_{\text{up}}^- \delta(E - \hbar \omega_{\text{up}}^-) + \sigma_{\text{down}}^- \delta(E - \hbar \omega_{\text{down}}^-) \end{cases} \quad (7.49)$$

et à essayer de déterminer les paramètres apparaissant dans (7.49) à partir des moments

Moments d'ordre supérieur

Les 3 moments calculés plus haut ne sont plus suffisants pour déterminer les fréquences et poids des 3 transitions intervenant dans l'équation (7.49)

Trois moments supplémentaires doivent être calculés pour avoir suffisamment d'équations permettant de déterminer les 6 inconnues des équations (7.49). Leur expression, tirée de la référence 15, est donnée ci-dessous

$$\begin{aligned}m_3^+ &= \frac{16 \hbar^4 \omega_{\perp}^2}{M} N \langle r_{\perp}^2 \rangle \left[1 + \frac{\langle E_{\text{cin}\perp} \rangle}{\langle E_{\text{pot}\perp} \rangle} \right] \\m_4^- &= \frac{64 \hbar^5 \omega_{\perp}^2}{M^2} N \langle \hat{\ell}_z \rangle \\m_5^+ &= \frac{32 \hbar^6 \omega_{\perp}^4}{M} N \langle r_{\perp}^2 \rangle \left[1 + 3 \frac{\langle E_{\text{cin}\perp} \rangle}{\langle E_{\text{pot}\perp} \rangle} + \frac{\langle E_{\text{int}} \rangle}{16 \langle E_{\text{pot}\perp} \rangle} \right]\end{aligned}\tag{7.50}$$

Etude numérique

Principe

A partir de la résolution numérique de l'équation de G-P indépendante du temps décrivant le condensat à l'équilibre, il est possible de calculer les valeurs moyennes des énergies cinétique transverse, potentielle transverse, et d'interaction apparaissant dans les équations (7.50). Ce calcul est fait pour diverses valeurs du paramètre χ_{cond} caractérisant l'importance des interactions (voir T-14, Eq.1.24).

Le report de ces résultats dans les équations (7.50) donne alors les valeurs des 3 nouveaux moments.

6 équations analogues à (7.23), (7.24), (7.25), peuvent alors être écrites avec le choix (7.49) des densités spectrales.

A partir de ces équations, les fréquences et les poids des 3 transitions apparaissant dans (7.49) peuvent être déterminés.

Etude numérique (suite)

Résultats

(pour un condensat sphérique)

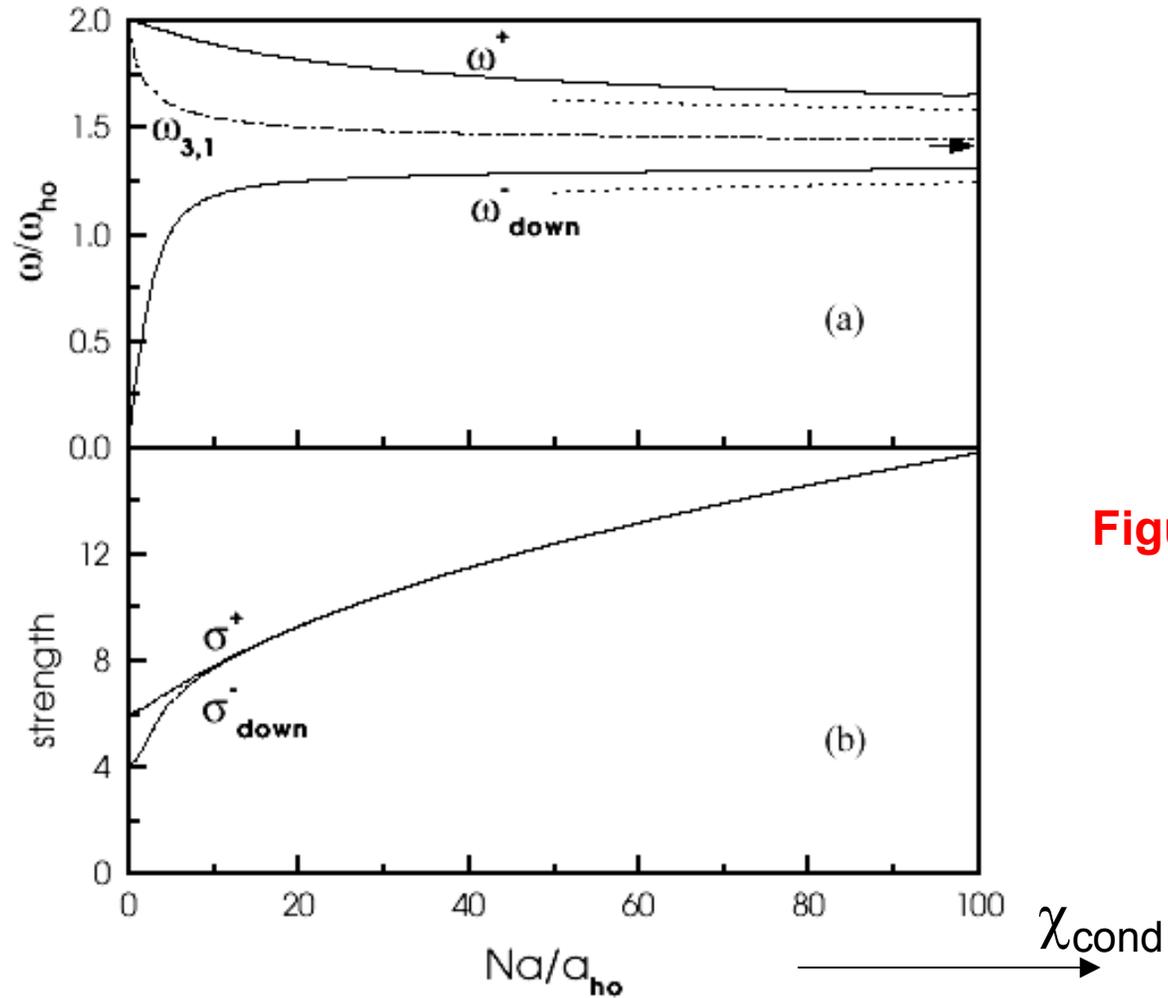


Figure VII-2

Figure extraite de la référence 15

Commentaires sur la figure VII-2

Les résultats concernant ω_{-}^{up} et σ_{-}^{up} ne sont pas reportés sur la figure car le poids de cette transition devient très rapidement négligeable quand χ_{cond} croit.

Dès que χ_{cond} atteint des valeurs de l'ordre de 100, les poids des 2 transitions restantes deviennent égaux et leurs fréquences très proches des valeurs

$$\omega_{\pm} = \omega_{\perp} \sqrt{2} \pm \delta\omega/2 \quad (7.51)$$

où $\delta\omega$ est en accord avec le résultat (7.33). Ces valeurs asymptotiques sont représentées par les lignes en pointillés de la figure VII-2. La courbe en traits tirets est la fréquence des modes en l'absence de tourbillon

L'approximation des 2 transitions prédominantes est donc très satisfaisante, sauf pour χ_{cond} très petit

Etude d'autres géométries de piégeage

Condensat contenu dans un récipient de forme torique

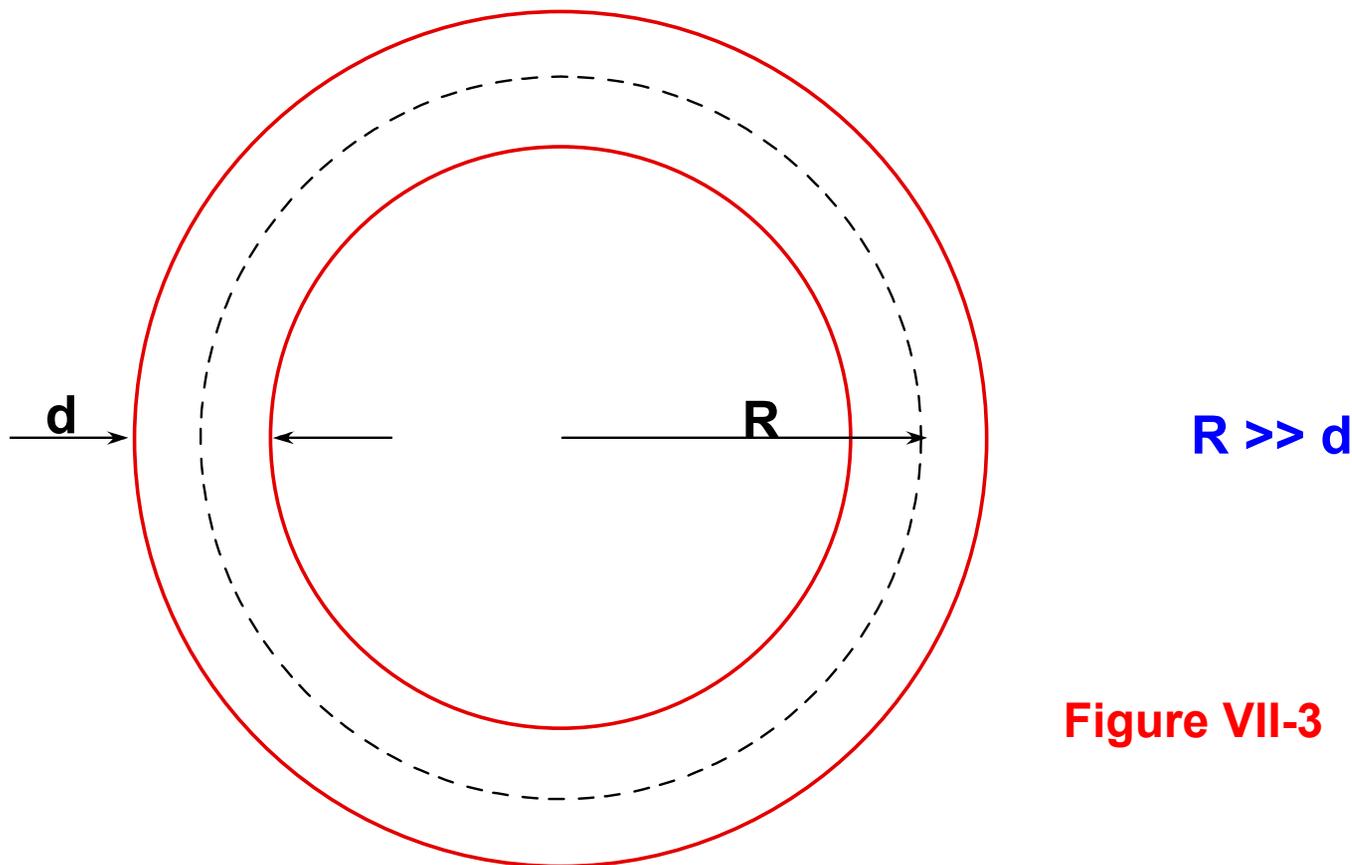


Figure VII-3

Problème analysé dans la référence 17
à partir de la théorie de Bogolubov

Problèmes abordés

- Un tourbillon $m=1$ correspond à un mouvement de rotation d'ensemble du condensat à la vitesse

$$v = \frac{\hbar}{M R} \quad (7.52)$$

- Les modes $m = \pm 2$ sont des modes de compression longitudinaux (phonons), de forme elliptique, donc de longueur d'onde $2 \pi R / 2 = \pi R$, se propageant à la vitesse c du son

En l'absence de tourbillon

$$\omega_+ = \omega_- = 2 \pi \frac{c}{\lambda} = 2 \frac{c}{R} \quad (7.53)$$

- Pour étudier la modification de ces fréquences due à la présence d'un tourbillon, la méthode des moments introduite plus haut est directement applicable

Expression des divers opérateurs

Hamiltonien non perturbé

Se réduit au terme d'énergie cinétique

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{h}_0(i) \quad \hat{h}_0 = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (7.54)$$

Dans cette expression R est considéré comme un nombre car seul le mouvement azimutal est excité

En fait, il s'agit d'un problème à une dimension, où la seule variable est la variable φ

Opérateurs d'excitation des modes $m = \pm 2$

$$(\hat{x} \pm i \hat{y})^2 = R^2 e^{\pm 2i\varphi} \quad (7.55)$$

Ici R est un nombre. On peut donc prendre

$$\hat{F}_{\pm} = \sum_{i=1}^N \hat{f}_{\pm}(i) \quad \hat{f}_{\pm} = e^{\pm 2i\varphi} \quad (7.56)$$

Quelques commutateurs utiles

Ils interviennent dans l'expression des 3 premiers moments

$$\left[\frac{d}{d\varphi}, e^{\pm 2i\varphi} \right] = \pm 2i e^{\pm 2i\varphi} \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2}, e^{\pm 2i\varphi} \right] &= \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{d}{d\varphi}, e^{\pm 2i\varphi} \right] + \left[\frac{d}{d\varphi}, e^{\pm 2i\varphi} \right] \frac{d}{d\varphi} \\ &= \frac{d}{d\varphi} [\pm 2i e^{\pm 2i\varphi}] + [\pm 2i e^{\pm 2i\varphi}] \frac{d}{d\varphi} \\ &= -4 e^{\pm 2i\varphi} \pm 4i e^{\pm 2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \end{aligned} \quad (7.58)$$

Calcul des 3 premiers moments

Calcul de m_0^-

$$m_0^- = N \left\langle \left[\hat{f}_-, \hat{f}_+ \right] \right\rangle = N \left\langle \left[e^{-2i\varphi}, e^{+2i\varphi} \right] \right\rangle = 0 \quad (7.59)$$

Calcul de m_1^+

$$\left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2}, e^{+2i\varphi} \right] = \frac{2\hbar^2}{MR^2} \left[e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\left[\hat{f}_-, \left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] \right] = \frac{2\hbar^2}{MR^2} \left[e^{-2i\varphi}, e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\left[e^{-2i\varphi}, e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right] = 1 - i \frac{d}{d\varphi} - e^{+2i\varphi} \left(1 - i \frac{d}{d\varphi} \right) e^{-2i\varphi} = 2$$

On en déduit

$$m_1^+ = N \left\langle \left[\hat{f}_-, \left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] \right] \right\rangle = \frac{4N\hbar^2}{MR^2} \quad (7.60)$$

Calcul des 3 premiers moments (suite)

Calcul de m_2^-

$$\left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] = \frac{2\hbar^2}{M R^2} \left[e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\left[\hat{f}_-, \hat{h}_0 \right] = -\frac{2\hbar^2}{M R^2} \left[e^{-2i\varphi} + i e^{-2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\begin{aligned} \left[\left[\hat{f}_-, \hat{h}_0 \right], \left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] \right] &= -\frac{4\hbar^4}{M^2 R^4} \left[e^{-2i\varphi} + i e^{-2i\varphi} \frac{d}{d\varphi}, e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right] \\ &= -\frac{16\hbar^4}{M^2 R^4} i \frac{d}{d\varphi} \end{aligned}$$

Comme

$$\hat{\ell}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\varphi} \tag{7.61}$$

on en déduit

$$m_2^- = \frac{16 N \hbar^3}{M^2 R^4} \left\langle \hat{\ell}_z \right\rangle \tag{7.62}$$

Expression de l'écart de fréquence

Comme plus haut, faisons l'approximation des 2 transitions prédominantes.

On peut alors utiliser l'équation (7.27) et obtenir, compte tenu de (7.60) et (7.62) :

$$\begin{aligned}\omega_+ - \omega_- &= \frac{1}{\hbar} \frac{m_2^-}{m_1^+} \\ &= \frac{\frac{16\hbar^2}{M^2 R^4} \langle \hat{\ell}_z \rangle}{\frac{4\hbar^2}{M R^2}} = \frac{4 \langle \hat{\ell}_z \rangle}{M R^2}\end{aligned}\quad (7.63)$$

expression qui rappelle beaucoup (7.33)

Discussion physique

Le raisonnement utilisé plus haut pour calculer l'ordre de grandeur de $\delta\omega$ s'applique ici de manière quantitative, car R a une valeur bien définie.

Le déplacement de fréquence de chaque onde s'écrit, compte tenu des expressions (7.52) et (7.53) de v et ω

$$\begin{aligned}\delta\omega &= \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \\ &= \omega \frac{v}{c} = \frac{2c}{R} \frac{\hbar}{M R c} = \frac{2\hbar}{M R^2}\end{aligned}\tag{7.64}$$

On retrouve exactement le même résultat qu'en (7.63) (pour un tourbillon $m=1$)

Références

(Suite de T-156, T-192 et T-232)

- 15 - F. Zambelli, S. Stringari, Phys.Rev.Lett. 81, 1754 (1998).
- 16 - Une autre approche hydrodynamique, conduisant aux mêmes résultats, est présentée dans :
A. Svidzinsky, A. Fetter, cond-mat/9803181
- 17 - D. Rokhsar, cond-mat/9709212.
- 18 - C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, « Mécanique Quantique », Hermann, Paris (1973), Complément D_{VI}