

# Modes propres de vibration d'un gaz classique d'atomes piégés

- Atomes piégés dans un potentiel harmonique
- Gaz classique (pas de dégénérescence quantique  
cas d'un nuage thermique de bosons pour  $T \gg T_C$ )
- Étude des modes propres de vibration d'un tel système
  - Fréquences propres
  - Taux d'amortissement

# Deux régimes extrêmes

## 1. Régime sans collisions

Le libre parcours moyen entre deux collisions est beaucoup plus grand que la dimension du nuage.

L'atome oscille plusieurs fois dans le piège avant de subir une collision.

## 2. Régime hydrodynamique

Situation opposée où l'atome subit plusieurs collisions pendant une période d'oscillation.

Un équilibre thermodynamique local peut être atteint en chaque point.

## Motivations d'une telle étude

Comparer le comportement du nuage thermique à celui du condensat étudié dans les cours antérieurs

Ne pas se contenter de décrire le nuage thermique comme un gaz parfait d'atomes

Tenir compte des collisions entre atomes et étudier l'évolution des phénomènes quand on passe progressivement du régime sans collisions au régime hydrodynamique

## Méthode suivie (référence 19)

- Partir de l'équation de Boltzmann décrivant l'évolution de la distribution dans l'espace des phases sous l'effet des collisions binaires entre atomes.
- En déduire l'équation d'évolution des valeurs moyennes de grandeurs physiques reliées aux modes propres de vibration étudiés.
- Ces valeurs moyennes sont en général couplées aux valeurs moyennes d'autres grandeurs physiques.

Ensemble d'équations d'évolution couplées qu'il faut essayer de résoudre avec certaines approximations

# Plan

- Équation de Boltzmann
- Équation d'évolution des valeurs moyennes.
- Grandeurs conservées au cours des collisions
- Etude d'un premier exemple simple
- Etude des modes ciseaux. Fréquences des modes propres de vibration et taux d'amortissement
- Transition du régime sans collision au régime hydrodynamique

# Équation de Boltzmann

Voir référence 20 et cours 1996-97 pages VI-1 à VI-4

Équation donnant l'évolution temporelle de la distribution  $f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)$  dans l'espace des phases

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) - \frac{1}{M} \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \right) \cdot \left( \vec{\nabla}_{\vec{v}_1} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \right) = I_{\text{coll}} [f] \quad (8.1)$$

$$I_{\text{coll}} [f] = \frac{\sigma_0}{4\pi} \int d^2\Omega' d^3v_2 |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \quad (8.2)$$

Collision  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$

$\sigma_0 = 8\pi a^2$  : section efficace

$\Omega'$  : angle solide dans la direction de  $\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$

# Description de la collision dans le système du centre de masse

Fig. 2, p. VI-2 du cours 96-97 avec les notations de la référence 19

$\vec{C}$ : Vitesse du centre de masse

$\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ : Vitesse relative avant collision

$\vec{V}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$ : Vitesse relative après collision

$$\vec{v}_1 = \vec{C} + \frac{\vec{V}}{2} \quad \vec{v}_2 = \vec{C} - \frac{\vec{V}}{2}$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{C} + \frac{\vec{V}'}{2} \quad \vec{v}'_2 = \vec{C} - \frac{\vec{V}'}{2}$$

$$|\vec{V}| = |\vec{V}'|$$

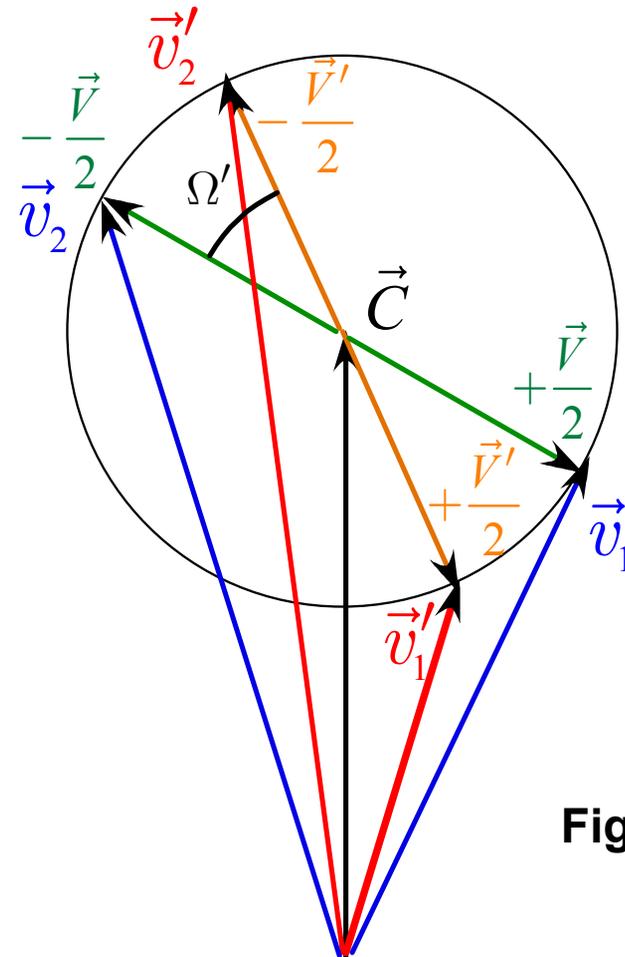


Figure VIII-1

## Remarques

Nous utilisons ici les notations de la référence 19

[Par rapport au cours 1996-97](#)

- La collision est décrite par les vitesses et non par les impulsions
- La collision intervenant dans  $I_{\text{coll}}$  est

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$$

au lieu de

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

- $f(\vec{r}, \vec{v})$  est normalisée à N, alors que c'était  $f(\vec{r}, \vec{p})/h^3$  qui avait cette normalisation

# Évolution des valeurs moyennes

Grandeur physique  $\chi(\vec{r}, \vec{v})$

$$\langle \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle = \frac{1}{N} \int d^3r d^3v \chi(\vec{r}, \vec{v}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (8.3)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle = \frac{1}{N} \int d^3r d^3v_1 \chi(\vec{r}, \vec{v}_1) \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \quad (8.4)$$

Reportons (8-1) dans (8-4). Les termes de la première ligne de (8-1) se transforment aisément par intégrations par parties. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle - \langle \vec{v} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \chi) \rangle + \frac{1}{M} \langle (\vec{\nabla}_{\vec{r}} V_{\text{ext}}) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{v}} \chi) \rangle = \\ = \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} \end{aligned} \quad (8.5)$$

# Évolution des valeurs moyennes due aux collisions

$$\left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{1}{N} \int d^3 r d^3 v_1 \chi(\vec{r}, \vec{v}_1) \left( \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \right)_{\text{coll}} \quad (8.6)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \right)_{\text{coll}} = \frac{\sigma_0}{4\pi} \int d^2 \Omega' d^3 v_2 |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}_1') f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \quad (8.7)$$

$$\left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2 \Omega' d^3 r d^3 v_1 d^3 v_2 \times \chi(\vec{r}, \vec{v}_1) |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}_1') f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \quad (8.8)$$

## Autre expression équivalente à (8-8)

L'équation (8-6) peut être réécrite sous la forme

$$\left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{1}{N} \int d^3 r d^3 v_2 \chi(\vec{r}, \vec{v}_2) \left( \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_2, t) \right)_{\text{coll}} \quad (8.9)$$

c-à-d encore, en permutant les indices 1 et 2 dans (8-7) et en reportant l'expression ainsi obtenue dans (8-9) [Notons que  $\Omega'$  ne change pas dans cette permutation]

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2 \Omega' d^3 r d^3 v_1 d^3 v_2 \times \\ &\quad \times \chi(\vec{r}, \vec{v}_2) |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \end{aligned} \quad (8.10)$$

Notons que  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2$  ont les mêmes valeurs dans les termes à intégrer de (8-8) et (8-10)

# Utilisation des symétries des collisions

- Invariance par renversement du sens du temps. Si

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \quad (8.11)$$

est une collision possible, il en est de même de :

$$(-\vec{v}'_1) + (-\vec{v}'_2) \rightarrow (-\vec{v}_1) + (-\vec{v}_2) \quad (8.12)$$

- Invariance par réflexion d'espace. Si la collision (8-12) est possible, il en est de même de :

$$\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (8.13)$$

- On a par ailleurs [voir équations (6-5) et (6-8) du cours 1996-97]

$$d^3v'_1 d^3v'_2 = d^3v_1 d^3v_2 \quad (8.14)$$

## Autre expression équivalente à (8-8)

Considérons la collision (8-13) et réécrivons (8-6) sous la forme

$$\left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{1}{N} \int d^3 r d^3 v'_1 \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) \left( \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}'_1, t) \right)_{\text{coll}} \quad (8.15)$$

c-à-d encore en permutant  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}'_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}'_2$  dans (8-7) et en reportant l'expression ainsi obtenue dans (8-15)

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2 \Omega' d^3 r d^3 v'_1 d^3 v'_2 \times \\ &\times \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) |\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1| [f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2)] \end{aligned} \quad (8.16)$$

Là encore, ce sont les mêmes valeurs de  $\vec{v}_1$   $\vec{v}'_1$   $\vec{v}_2$   $\vec{v}'_2$  qui apparaissent dans le terme à intégrer de (8-16)

## Autre expression équivalente à (8-8) (suite)

L'utilisation de (8-14), de

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = |\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2| \quad (8.17)$$

(voir Fig VIII-1) donne alors

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2\Omega' d^3r d^3v_1 d^3v_2 \times \\ &\times \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}'_1)f(\vec{v}'_2)] \end{aligned} \quad (8.18)$$

Un calcul analogue donnerait

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2\Omega' d^3r d^3v_1 d^3v_2 \times \\ &\times \chi(\vec{r}, \vec{v}'_2) |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}'_1)f(\vec{v}'_2)] \end{aligned} \quad (8.19)$$

# Récapitulation

Finalemment, nous avons obtenu 4 expressions différentes, mais équivalentes, pour la vitesse de variation de la valeur moyenne d'une grandeur physique due aux collisions :

Équations (8-8), (8-10), (8-18) et (8-19). La somme de ces 4 équations, divisée par 4, donne

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{16\pi N} \int d^2\Omega' d^3r d^3v_1 d^3v_2 \times \\ &\times [\chi(\vec{r}, \vec{v}_1) + \chi(\vec{r}, \vec{v}_2) - \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) - \chi(\vec{r}, \vec{v}'_2)] \times \\ &\times |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_1)f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)] \end{aligned} \quad (8.20)$$

## Conséquence

Si la grandeur physique étudiée est conservée au cours de la collision, c-à-d si

$$\chi(\vec{r}, \vec{v}_1) + \chi(\vec{r}, \vec{v}_2) = \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) + \chi(\vec{r}, \vec{v}'_2) \quad (8.21)$$

alors

$$\left( \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = 0 \quad (8.22)$$

### Expression générale des grandeurs conservées

$$\chi(\vec{r}, \vec{v}) = a(\vec{r}) + \vec{b}(\vec{r}) \cdot \vec{v} + c(\vec{r}) v^2 \quad (8.23)$$

Les collisions sont en effet locales et conservent  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$  (impulsion totale) de même que  $v_1^2 + v_2^2$  (énergie totale)

# Étude d'un premier exemple simple

Mode monopolaire dans un piège sphérique

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2 \quad (8.24)$$

Pour étudier le mode monopolaire, il convient d'étudier l'évolution de la valeur moyenne de

$$\chi(\vec{r}, \vec{v}) = r^2 \quad (8.25)$$

Dans l'équation (8-5) apparaissent

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} V_{\text{ext}}(\vec{r}) = M \omega_0^2 \vec{r} \quad (8.26)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} r^2 = 2 \vec{r} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} r^2 = \vec{0} \quad (8.27)$$

Le dernier terme de (8-5) est nul car  $r^2$  est conservé au cours de la collision [voir(8-23)]

## Equation d'évolution de $\langle r^2 \rangle$

Le report de (8-26) et (8-27) dans (8-5) donne, compte tenu de l'annulation du dernier terme de (8-5)

$$\frac{d}{dt} \langle r^2 \rangle = 2 \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle \quad (8.28)$$

Comme l'évolution de  $\langle r^2 \rangle$  est couplée à celle de  $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle$ , il faut étudier l'évolution de  $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle$

## Equation d'évolution de $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} (\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{r} \quad (8.29)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle \right)_{\text{coll}} = 0 \quad (8.30)$$

car  $\vec{r} \cdot \vec{v}$  est une grandeur conservée. Finalement

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle = \langle v^2 \rangle - \omega_0^2 \langle r^2 \rangle \quad (8.31)$$

## Equation d'évolution de $\langle v^2 \rangle$

Il faut l'étudier car, d'après (8-31), l'évolution de  $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle$  est couplée à celle de  $\langle v^2 \rangle$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} (v^2) = \vec{0} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} (v^2) = 2\vec{v} \quad (8.32)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle \right)_{\text{coll}} = 0 \quad (8.33)$$

car  $v^2$  est une grandeur conservée. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle = -2 \omega_0^2 \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle \quad (8.34)$$

Il n'apparaît pas de nouvelles grandeurs. On obtient un système fermé de 3 équations couplées.

## Conclusion sur le mode monopolaire dans un piège sphérique

Les 3 équations (8-28), (8-31) et (8-34) forment un système de 3 équations différentielles linéaires couplées, ayant une solution oscillante non amortie, de fréquence.

$$\omega = 2 \omega_0 \quad (8.35)$$

Dans un piège harmonique isotrope, le mode monopolaire de compression d'un gaz classique n'est pas amorti et garde la même fréquence quel que soit le régime de collisions.

Noter la différence entre le résultat (8.35) et celui obtenu pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi (voir T-38, Eq. 2-1)

# Modes ciseaux pour un gaz classique

## Motivations de cette étude

Essayer de comprendre comment les modes ciseaux d'un gaz classique évoluent quand on passe du régime sans collisions (étudié dans le cours V) au régime hydrodynamique

Pour cela, on va suivre la même démarche que précédemment en étudiant l'évolution des valeurs moyennes de grandeurs physiques liées au mode  $xy$

Le calcul sera cependant plus compliqué que celui présenté plus haut car certaines grandeurs physiques couplées à  $xy$  ne sont pas conservées au cours de la collision

## Evolution de $\langle xy \rangle$

- Comme dans le cours V, on prend

$$V_{\text{ext}} = \frac{M}{2} \left[ \omega_0^2 (1 + \varepsilon) x^2 + \omega_0^2 (1 - \varepsilon) y^2 + \omega_z^2 z^2 \right] \quad (8.36)$$

de sorte que

$$\vec{\nabla} V_{\text{ext}} / M = \left\{ \omega_0^2 (1 + \varepsilon) x, \omega_0^2 (1 - \varepsilon) y, \omega_z^2 z \right\} \quad (8.37)$$

- Comme le mode ciseaux est en  $x y$ , il convient d'étudier l'évolution de

$$\chi_1 = x y \quad (8.38)$$

$xy$  est conservé au cours des collisions [voir (8.23)], et

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} (x y) = \{y, x, 0\} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} (x y) = \vec{0} \quad (8.39)$$

- L'équation (8.5) s'écrit donc :

$$\partial \langle x y \rangle / \partial t = \langle \chi_2 \rangle \quad (8.40)$$

où

$$\chi_2 = x v_y + y v_x \quad (8.41)$$

## Evolution de $\langle x v_y + y v_x \rangle$

Cette grandeur est elle aussi conservée au cours des collisions et un calcul très analogue au précédent donne

$$\partial \langle x v_y + y v_x \rangle / \partial t = 2 \langle v_x v_y \rangle - 2 \omega_0^2 \langle x y \rangle \quad (8.42)$$

En plus de  $xy$ , on voit apparaître une nouvelle grandeur

$$\chi_4 = v_x v_y \quad (8.43)$$

## Evolution de $\langle v_x v_y \rangle$

A la différence des précédentes, cette nouvelle grandeur n'est pas conservée au cours des collisions et un nouveau terme doit donc être ajouté dans son équation d'évolution

$$\begin{aligned} (\partial \langle \chi_4 \rangle / \partial t)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{16\pi N} \int d^2\Omega' d^3r d^3v_1 d^3v_2 \times \\ &\times [\chi_4(\vec{r}, \vec{v}_1) + \chi_4(\vec{r}, \vec{v}_2) - \chi_4(\vec{r}, \vec{v}'_1) - \chi_4(\vec{r}, \vec{v}'_2)] \times \\ &\times |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \end{aligned} \quad (8.44)$$

## Evolution de $\langle v_x v_y \rangle$ (suite)

L'équation (8.5) donne

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}(v_x v_y) = \vec{0} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}}(v_x v_y) = \{v_y, v_x, 0\} \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} \partial \langle v_x v_y \rangle / \partial t = & -\omega_0^2 \langle x v_y + y v_x \rangle - \varepsilon \omega_0^2 \langle x v_y - y v_x \rangle \\ & + \left( \partial \langle v_x v_y \rangle / \partial t \right)_{\text{coll}} \end{aligned} \quad (8.46)$$

On voit apparaître une nouvelle grandeur

$$\chi_3 = x v_y - y v_x \quad (8.47)$$

## Evolution de $\langle x v_y - y v_x \rangle$

Cette grandeur est conservée au cours des collisions et l'équation (8.5) donne

$$\partial \langle x v_y - y v_x \rangle / \partial t = 2 \varepsilon \omega_0^2 \langle x y \rangle \quad (8.48)$$

Il n'apparaît plus de nouvelle grandeur physique. Il faut donc essayer de résoudre le système d'équations couplées (8.40), (8.42), (8.46) et (8.48)

## Approximation sur le terme décrivant l'effet de collisions

Il faut trouver une expression approchée pour le dernier terme de (8.46)

A l'équilibre thermodynamique, la distribution de vitesses est isotrope et

$$\langle v_x v_y \rangle = 0 \quad (8.49)$$

Si cette valeur moyenne n'est pas nulle, cela signifie donc que la distribution de vitesses n'est pas isotrope. L'effet des collisions est de faire disparaître cette anisotropie et de la faire tendre vers zéro avec un temps de relaxation  $\tau$  qui est de l'ordre de grandeur du temps entre collisions

Une approximation raisonnable consiste donc à écrire

$$\left( \frac{\partial \langle v_x v_y \rangle}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = -\frac{1}{\tau} \langle v_x v_y \rangle \quad (8.50)$$

## Traitement plus précis

Un traitement plus précis, décrit en détail dans la référence 19, consiste à postuler une forme particulière anisotrope pour la fonction de distribution  $f$  (« ansatz ») et à l'utiliser ensuite dans l'équation (8.44)

Au lieu de prendre une distribution isotrope en vitesses, on prend une distribution contenant une déformation en  $v_x v_y$

$$\exp\{-Mv^2 / 2k_B T\} \Rightarrow \exp\{-M[v^2 + \alpha v_x v_y] / 2k_B T\} \quad (8.51)$$

où  $\alpha$  est un paramètre sans dimension

A l'ordre le plus bas en  $\alpha$  (faible anisotropie), la fonction de distribution  $f$  peut être réécrite

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{r}, \vec{v}, t) \left( 1 - \alpha \frac{M v_x v_y}{2k_B T} \right) \quad (8.52)$$

où  $f_0$  est la distribution d'équilibre

## Traitement plus précis (suite)

Calcul de  $\langle v_x v_y \rangle$

Avec la nouvelle fonction de distribution (8.52), on obtient

$$\langle v_x v_y \rangle = -\alpha (M / 2 k_B T) \langle v_x^2 v_y^2 \rangle_0 \quad (8.53)$$

car le terme d'ordre 0 de (8.52) donne 0

$\langle \rangle_0$  : Valeur moyenne à l'équilibre

La factorisation de  $f_0$  à l'équilibre et le théorème de l'équipartition de l'énergie donnent alors

$$\langle v_x^2 v_y^2 \rangle_0 = (k_B T / M)^2 \quad (8.54)$$

de sorte que

$$\langle v_x v_y \rangle = -\alpha k_B T / 2M \quad (8.55)$$

Il apparaît ainsi clairement que la valeur moyenne de  $v_x v_y$  est proportionnelle au paramètre  $\alpha$  caractérisant l'anisotropie de la distribution de vitesses

# Calcul approché du temps de relaxation

Reportons (8.52) dans (8.44). On obtient l'équation

$$\left(\frac{\partial \langle v_x v_y \rangle}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \alpha K = -\frac{1}{\tau} \langle v_x v_y \rangle \quad (8.56)$$

où l'on a utilisé (8.55) et posé

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2M}{k_B T} K \quad (8.57)$$

Dans (8.57)  $K$  est une intégrale multiple qui peut être calculée analytiquement

Pour les détails d'un tel calcul, voir l'appendice de la référence 19. En fait, cette référence étudie, non pas les modes ciseaux, mais les modes quadrupolaires d'un gaz piégé dans un potentiel de symétrie cylindrique. Mais le principe du calcul est le même que celui considéré ici et on peut montrer par des arguments de symétrie que la valeur de  $\tau$  est la même

## Expression obtenue pour $\tau$

Le calcul explicite de l'intégrale multiple apparaissant quand on reporte (8.52) dans (8.44) conduit à

$$\tau = \frac{5}{\gamma_{\text{coll}}} \quad (8.58)$$

où  $\gamma_{\text{coll}}$  est le taux de collisions élastiques donné par

$$\gamma_{\text{coll}} = \frac{n(0) v_{\text{th}} \sigma_0}{2} \quad (8.59)$$

$n(0)$  est la densité spatiale au centre du piège et

$$\sigma_0 = 8\pi a^2 \quad v_{\text{th}} = \sqrt{8k_B T / \pi M} \quad (8.60)$$

la section efficace de collision élastique

## Récapitulation

Le report de l'expression approchée (8.56) dans (8.46) donne le système suivant d'équations couplées

$$\begin{aligned} \partial \langle \chi_1 \rangle / \partial t &= \langle \chi_2 \rangle \\ \partial \langle \chi_2 \rangle / \partial t &= 2 \langle \chi_4 \rangle - 2 \omega_0^2 \langle \chi_1 \rangle \\ \partial \langle \chi_3 \rangle / \partial t &= 2 \varepsilon \omega_0^2 \langle \chi_1 \rangle \\ \partial \langle \chi_4 \rangle / \partial t &= -\omega_0^2 \langle \chi_2 \rangle - \varepsilon \omega_0^2 \langle \chi_3 \rangle - \langle \chi_4 \rangle / \tau \end{aligned} \quad (8.61)$$

Cherchons une solution de (8.61) de la forme

$$\langle \chi_i \rangle = c_i \exp(i \omega t) \quad (8.62)$$

Les équations (8.61) deviennent

$$\begin{aligned} i \omega c_1 &= c_2 \\ i \omega c_2 &= 2 c_4 - 2 \omega_0^2 c_1 \\ i \omega c_3 &= 2 \varepsilon \omega_0^2 c_1 \\ i \omega c_4 &= -\omega_0^2 c_2 - \varepsilon \omega_0^2 c_3 - c_4 / \tau \end{aligned} \quad (8.63)$$

# Fréquences propres des modes ciseaux

Le système d'équations (8.63) n'admet de solutions non nulles que si le déterminant correspondant est nul. On obtient ainsi l'équation

$$\omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + 4\varepsilon^2 \omega_0^4 + \frac{\omega}{i\tau} (\omega^2 - 2\omega_0^2) = 0 \quad (8.64)$$

qui donne les fréquences propres des modes ciseaux

Régime sans collisions (limite  $\omega \tau \rightarrow \infty$ )

le second terme de (8.64) est négligeable.

Régime hydrodynamique (limite  $\omega \tau \rightarrow 0$ )

le premier terme de (8.64) est négligeable.

## Régime sans collisions

L'équation

$$\omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + 4\varepsilon^2 \omega_0^4 = 0 \quad (8.65)$$

donnant les fréquences des modes dans cette limite a 2 racines

$$\omega_{SC1} = \omega_x + \omega_y = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \varepsilon} + \sqrt{1 - \varepsilon} \right] \quad (8.66)$$

$$\omega_{SC2} = \omega_x - \omega_y = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \varepsilon} - \sqrt{1 - \varepsilon} \right] \quad (8.67)$$

On retrouve les résultats obtenus dans le cours V pour un gaz parfait

Notons que ces racines sont réelles. Il n'y a aucun amortissement.

# Régime hydrodynamique

Il faut maintenant utiliser l'équation

$$\omega(\omega^2 - 2\omega_0^2) = 0 \quad (8.68)$$

qui a 2 racines

$$\omega_{HD1} = \omega_0\sqrt{2} \quad (8.69)$$

$$\omega_{HD2} = 0 \quad (8.70)$$

Là également, il n'y a pas d'amortissement

Finalemment, l'équation (8.64) peut être réécrite

$$\left[\omega^2 - \omega_{SC1}^2\right]\left[\omega^2 - \omega_{SC2}^2\right] + \frac{1}{i\omega\tau}\left[\omega^2 - \omega_{HD1}^2\right]\left[\omega^2 - \omega_{HD2}^2\right] = 0 \quad (8.71)$$

## Régime intermédiaire

Étudions l'évolution du mode propre de vibration passant de  $\omega_{SD1}$  à  $\omega_{HD1}$  quand  $\tau$  tend vers 0.

Supposons  $\varepsilon$  très petit de sorte que

$$\omega_{SC1} \gg \omega_{SC2} \quad (8.72)$$

Par ailleurs

$$\omega_{HD1} \gg \omega_{HD2} \quad (8.73)$$

Quand  $\omega$  varie de  $\omega_{SC1}$  à  $\omega_{HD1}$ , on peut alors, compte tenu de (8.72) et (8.73), négliger  $\omega_{SC2}^2$  et  $\omega_{HD2}^2$  devant  $\omega^2$  dans (8.71) qui devient

$$\omega^2 - \omega_{SC1}^2 + \frac{1}{i\omega\tau} (\omega^2 - \omega_{HD1}^2) = 0 \quad (8.74)$$

## Régime intermédiaire (suite)

L'équation (8.74) peut être réécrite

$$\begin{aligned}\omega^2 \left( 1 - \frac{i}{\omega\tau} \right) &= \omega_{SC1}^2 - \frac{i}{\omega\tau} \omega_{HD1}^2 \\ &= \left( 1 - \frac{i}{\omega\tau} \right) \omega_{SC1}^2 - \frac{i}{\omega\tau} \left( \omega_{HD1}^2 - \omega_{SC1}^2 \right)\end{aligned}\quad (8.75)$$

c-à-d encore

$$\omega^2 = \omega_{SC1}^2 + \frac{\omega_{HD1}^2 - \omega_{SC1}^2}{1 + i\omega\tau}\quad (8.76)$$

Quant  $\tau$  décroît de l'infini à zéro, on retrouve bien que  $\omega$  varie  $\omega_{SC1}$  à  $\omega_{HD1}$ .

On constate aussi que le taux d'amortissement n'est plus nul dans le régime intermédiaire.

# Taux d'amortissement

Séparons les parties réelle et imaginaire de  $\omega$

$$\omega = \omega_r + i\Gamma \quad (8.77)$$

Le report de (8.77) dans (8.76) donne (si  $\omega_r \gg \Gamma$ )

$$\Gamma \simeq \frac{\tau}{2} \frac{\omega_{SC1}^2 - \omega_{HD1}^2}{1 + (\omega_r \tau)^2} \quad (8.78)$$

Le taux d'amortissement, nul pour  $\tau$  infini, croît quand  $\tau$  décroît, passe par un maximum pour  $\omega_r \tau$  de l'ordre de 1, puis décroît de nouveau et s'annule quand  $\tau$  s'annule.

Si l'on porte, en abscisses  $\omega_r$ , en ordonnées  $\Gamma$  on obtient une courbe dont l'allure est représentée sur la figure VIII-2.

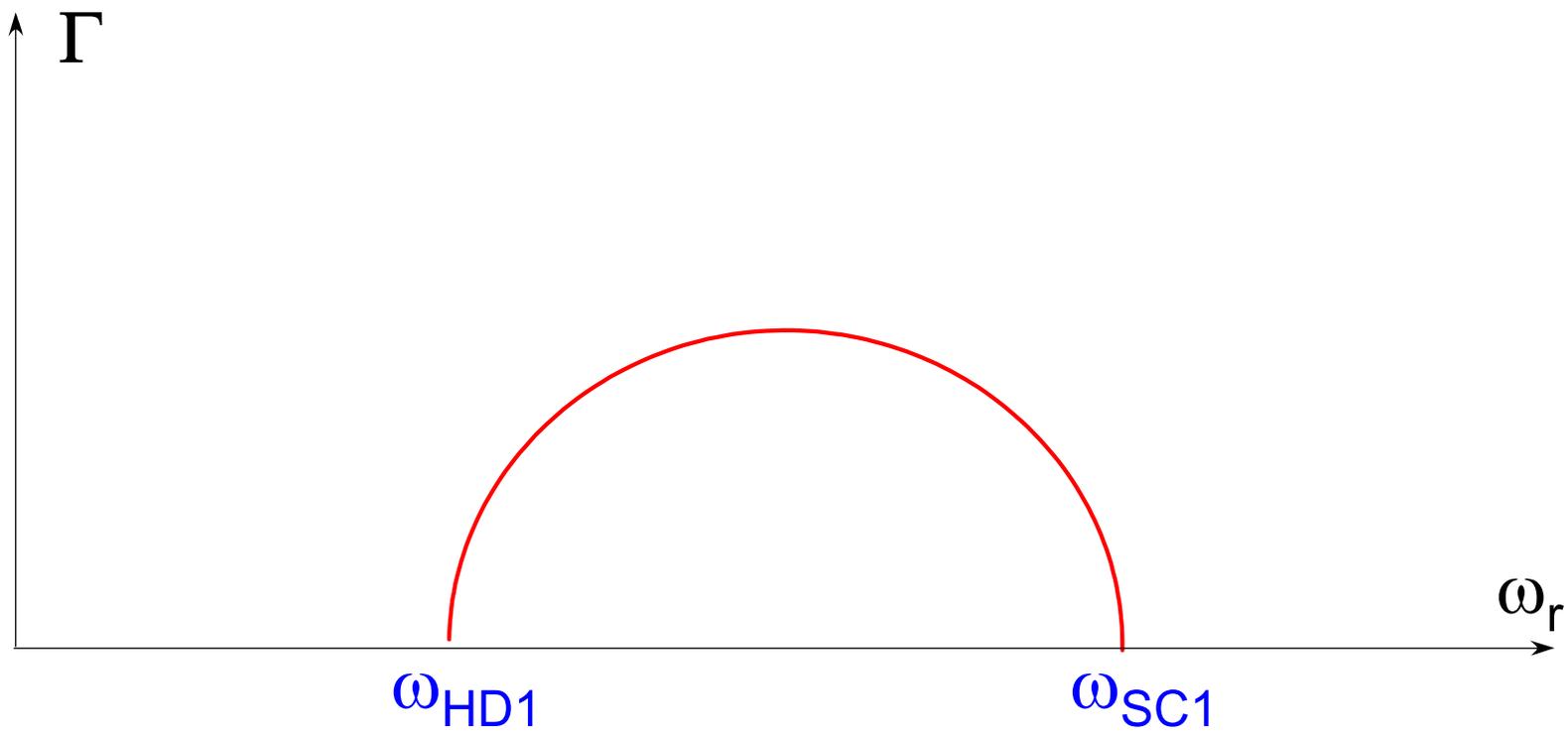


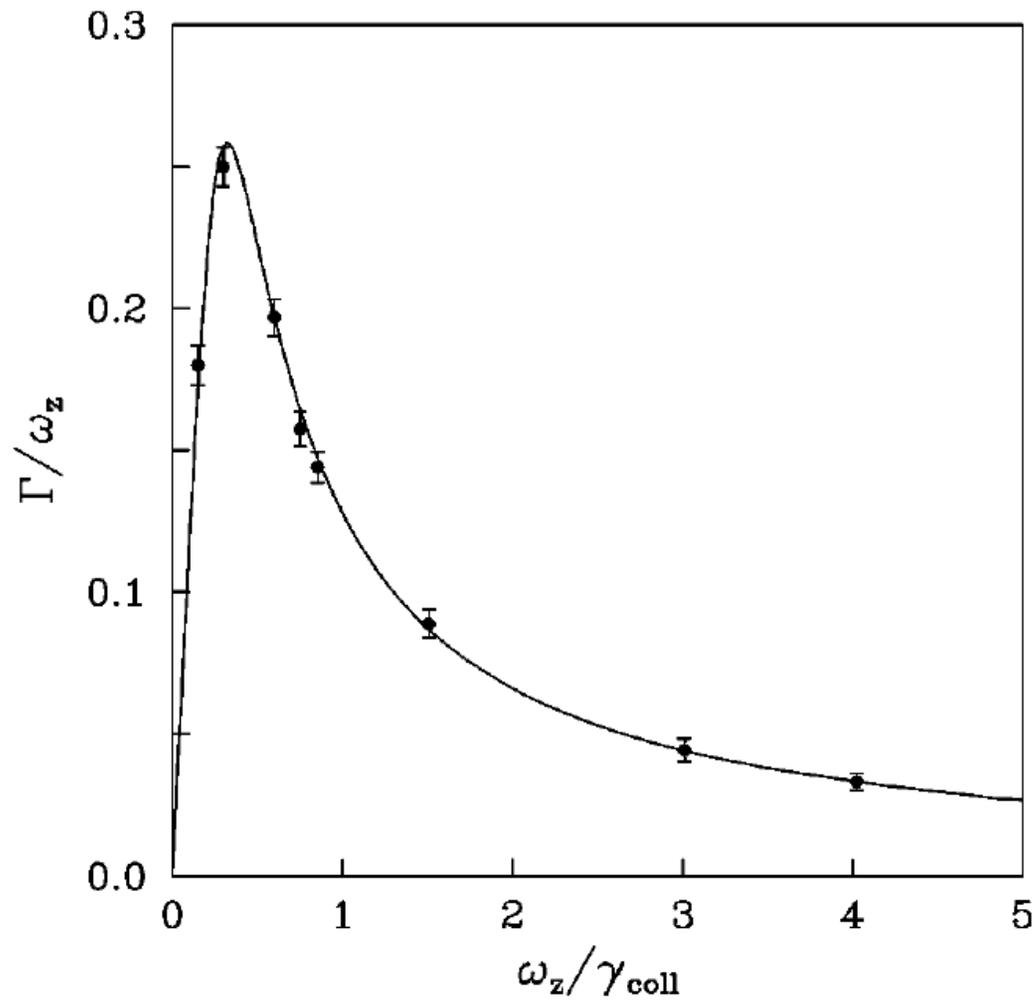
Figure VIII-2

## Comparaison avec les résultats d'un calcul de dynamique moléculaire

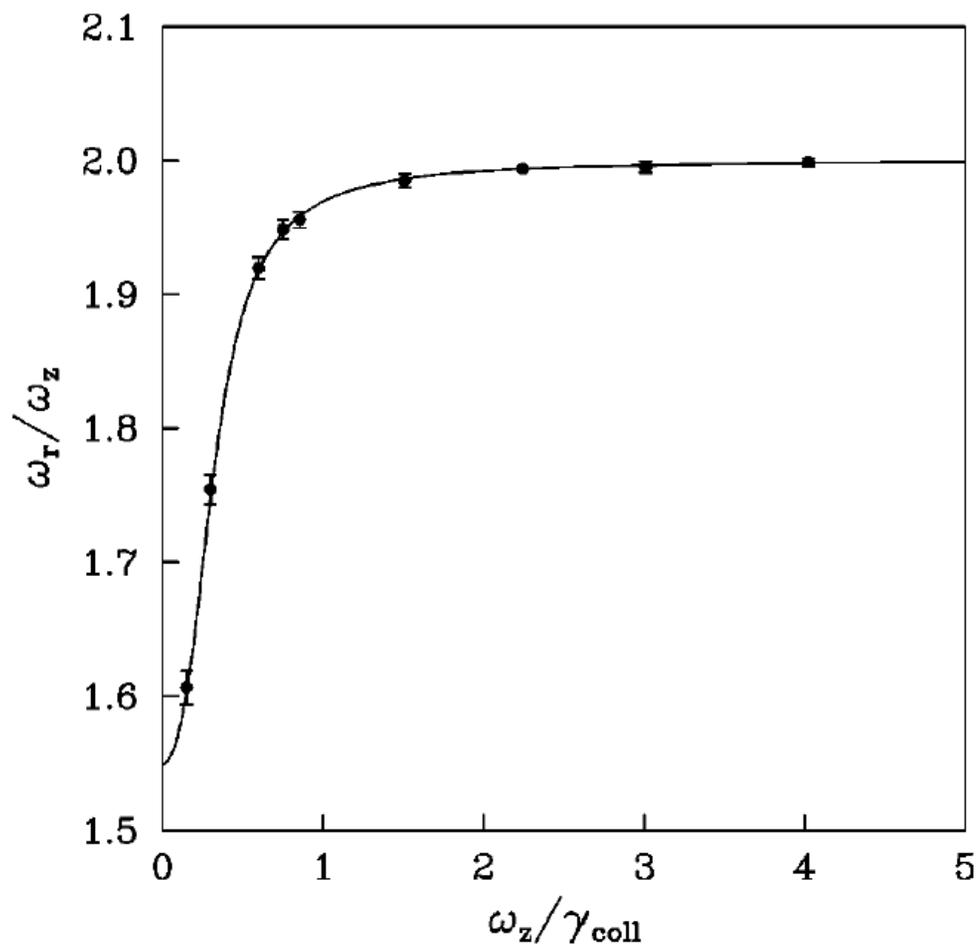
Dans la référence 19, une expression analogue à (8.76) est obtenue pour la fréquence des modes  $m=0$  (monopôle-quadrupôle) dans un piège à symétrie cylindrique.

Les figures VIII-3 et VIII-4 donnent les variations avec  $\tau$  des paramètres  $\Gamma$  et  $\omega_r$  définis en (8.77) (Courbes en traits pleins des figures).

Les points avec barres d'erreur représentent les résultats d'un calcul numérique basé sur une simulation de dynamique moléculaire portant sur  $N = 2 \times 10^4$  atomes. Le très bon accord donne confiance dans les approximations à la base de la dérivation de (8.76)



**Figure VIII-3**  
**[extraite de (19)]**



**Figure VIII-4**  
**[extraite de (19)]**

## Références

(Suite de T-156, T-192, T-232 et T-273)

- 19 - D. Guéry-Odelin, F. Zambelli, J. Dalibard, S. Stringari, *Phys.Rev. A* 60, 4851 (1999).
- 20 - K.Huang, « *Statistical Mechanics* », 2nd edition (Wiley, New York 1987)
- 21 - Une autre approche au problème des modes propres de vibration d'un nuage thermique est présentée dans :  
U. Al Khawaja, C. Pethick, H. Smith, *J. of Low Temp. Phys.* 118, 127 (2000)