

## Condensat dans un piège tournant

### Moment cinétique et moment d'inertie

Connaissant la fonction d'onde qui décrit le condensat dans le référentiel tournant (voir cours III), il est possible de calculer le moment cinétique du condensat tournant, aussi bien en l'absence qu'en présence d'interactions.

Un tel moment cinétique est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation, le coefficient de proportionnalité n'étant autre, à la limite des faibles vitesses de rotation, que le moment d'inertie du condensat.

Nous allons montrer que le moment d'inertie d'un condensat est beaucoup plus faible que celui d'un système classique ou celui d'un nuage thermique de bosons non condensés, ce qui constitue une manifestation spectaculaire de la superfluidité du condensat.

# Plan

- 1. Moment cinétique du condensat**
- 2. Limite des faibles vitesses de rotation.  
Moment d'inertie**
- 3. Différences avec d'autres systèmes physiques**
  - Gaz parfait classique
  - Gaz parfait de bosons partiellement condensé
- 4. Evolution des phénomènes quand la vitesse de rotation augmente**
  - Etude de quelques valeurs particulières des paramètres de la rotation
  - Excitation des ondes de surface

## Moment cinétique du condensat

$$\langle \hat{L}_z \rangle = N \int d^3 r' \varphi_0^* (\vec{r}') \left[ x' \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y'} - y' \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \right] \varphi_0 (\vec{r}') \quad (4.1)$$

En effet,  $(\hbar/i)\vec{\nabla}'$  est l'opérateur associé à l'impulsion  $\vec{p}'$  dans le référentiel tournant, qui coïncide avec la quantité de mouvement  $\vec{p} = m\vec{v}$  dans le référentiel du labo [ voir l'équation (3.8)].

$$\langle \hat{L}_z \rangle = N m \int d^3 r' \left[ x' J_{y'} (\vec{r}') - y' J_{x'} (\vec{r}') \right] \quad (4.2)$$

où  $\vec{J}$  est le courant

$$\vec{J}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') = \alpha \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}(x'y') \quad (4.3)$$

de composantes

$$\{ \alpha \rho(\vec{r}') y', \alpha \rho(\vec{r}') x', 0 \} \quad (4.4)$$

## Moment cinétique du condensat (suite)

En reportant (4.4) dans (4.2), on obtient :

$$\langle \hat{L}_z \rangle = N m \alpha \int d^3 r' \varphi_0^* (\vec{r}') [x'^2 - y'^2] \varphi_0 (\vec{r}') = N m \alpha \langle x'^2 - y'^2 \rangle \quad (4.5)$$

### Bosons sans interactions

Utilisons l'expression (3.41) de  $\alpha$  et le fait que  $\langle x'^2 \rangle \propto (\tilde{\omega}_x)^{-1}$ ,  $\langle y'^2 \rangle \propto (\tilde{\omega}_y)^{-1}$  [voir (3.25)]. Il vient :

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z \rangle &= -N m \langle x'^2 - y'^2 \rangle \frac{\langle x'^2 \rangle^{-1} - \langle y'^2 \rangle^{-1}}{\langle x'^2 \rangle^{-1} + \langle y'^2 \rangle^{-1}} \Omega \\ &= N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \left( \frac{\langle x'^2 - y'^2 \rangle}{\langle x'^2 + y'^2 \rangle} \right)^2 \Omega = N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \left( \frac{\tilde{\omega}_x - \tilde{\omega}_y}{\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_y} \right)^2 \Omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

## Bosons en interaction à la limite de Thomas-Fermi

Il faut maintenant utiliser l'expression (3.64) de  $\alpha$  et le fait que, pour une densité spatiale ayant la forme d'un paraboloïde inversé,  $\langle x'^2 \rangle \propto (\tilde{\omega}_x)^{-2}$ ,  $\langle y'^2 \rangle \propto (\tilde{\omega}_y)^{-2}$ .

Il vient ainsi:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z \rangle &= -N m \langle x'^2 - y'^2 \rangle \frac{\langle x'^2 \rangle^{-1} - \langle y'^2 \rangle^{-1}}{\langle x'^2 \rangle^{-1} + \langle y'^2 \rangle^{-1}} \Omega \\ &= N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \left( \frac{\langle x'^2 - y'^2 \rangle}{\langle x'^2 + y'^2 \rangle} \right)^2 \Omega = N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \left( \frac{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2}{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2} \right)^2 \Omega \end{aligned} \quad (4.7)$$

## Définition générale du moment d'inertie

- Système physique dans un piège tournant à la fréquence angulaire  $\Omega$
- Dans le référentiel tournant, il faut ajouter à l'hamiltonien la perturbation  $-\Omega \hat{L}_z$
- A cause de cette perturbation, il apparaît un moment cinétique moyen  $\langle \hat{L}_z \rangle$  qui, à l'ordre 1 en  $\Omega$ , vaut  $\langle \hat{L}_z \rangle = \Theta \Omega$

$\Theta$  est par définition le moment d'inertie

## Calcul du moment d'inertie

Les expressions (4.6) et (4.7) du moment cinétique contiennent déjà la fréquence de rotation  $\Omega$ .

A l'ordre le plus bas en  $\Omega$ , il suffit de remplacer dans (4.6) et (4.7)  $\tilde{\omega}_x$  et  $\tilde{\omega}_y$  par leurs valeurs d'ordre le plus bas en  $\Omega$ , qui d'après (3.41), (3.64), (3.67) et (3.68), ne sont autres que  $\omega_x$  et  $\omega_y$

Il est intéressant également d'exprimer le moment d'inertie ainsi obtenu en fonction du moment d'inertie qui serait celui de la même densité spatiale tournant de manière rigide

$$\Theta_{\text{rig}} = N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \quad (4.8)$$

# Expressions du moment d'inertie

## Bosons sans interactions

$$\Theta = \Theta_{\text{rig}} \left( \frac{\omega_x - \omega_y}{\omega_x + \omega_y} \right)^2 \quad (4.9)$$

## Bosons en interaction à la limite de Thomas-Fermi

$$\Theta = \Theta_{\text{rig}} \left( \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \right)^2 \quad (4.10)$$

Dans les 2 cas étudiés, le moment d'inertie obtenu est beaucoup plus faible que la valeur rigide.

Il est intéressant de comparer ce résultat à celui attendu pour d'autres systèmes non condensés, comme des gaz classiques ou des nuages thermiques

# Moment d'inertie d'un gaz classique

Dans le référentiel tournant, l'hamiltonien est indépendant du temps et le gaz atteint un état d'équilibre thermodynamique décrit par la densité classique (dans l'espace des phases)

$$f = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\beta \sum_{i=1}^N [h_0(i) - \Omega L'_{zi}] \right\} \quad (4.11)$$

$$h_0 = \frac{1}{2m} (p'_x{}^2 + p'_y{}^2 + p'_z{}^2) + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x'^2 + \omega_y^2 y'^2 + \omega_z^2 z'^2) \quad (4.12)$$

$$L'_z = x' p'_y - y' p'_x$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad Z = \text{fonction de partition} \quad (4.13)$$

## A l'ordre 1 inclus en $\Omega$

$$f = f_0 \left[ 1 + \beta \Omega \sum_i L'_{zi} \right] \quad Z = Z_0 \quad (4.14)$$

$f_0, Z_0$  : valeurs de  $f$  et  $Z$  pour  $\Omega = 0$

## Valeur moyenne de $L_z$ (à l'ordre 1 inclus en $\Omega$ )

$$\begin{aligned} \langle L'_z \rangle &= \beta \Omega \int \cdots \int d^3 r'_i dp'_i f_0 \left( \sum_i L'^2_{zi} \right) \\ &= \beta \Omega N \langle L'^2_z \rangle = \beta \Omega N \langle (x' p'_y - y' p'_x)^2 \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\langle \rangle_0$  : valeur moyenne dans l'état  $f_0$

Comme

$$\langle p'_x p'_y \rangle_0 = 0 \quad \langle p'_x \rangle^2 = \langle p'_y \rangle^2 = m k_B T = m \beta^{-1} \quad (4.16)$$

$$\langle L'_z \rangle = \Omega \sum_{i=1}^N m \langle x_i'^2 + y_i'^2 \rangle_0 = \Omega \Theta_{\text{rig}} \quad (4.17)$$

Le moment d'inertie a la valeur d'un corps rigide

# Moment d'inertie d'un gaz parfait de bosons

## Motivations de cette étude

Le calcul perturbatif du moment cinétique est relativement facile.

Si le gaz est partiellement condensé, on peut évaluer les contributions respectives du condensat et du nuage thermique et mettre ainsi directement en évidence les différences de comportement.

## Calcul perturbatif de $\langle \hat{L}_z \rangle$

Au lieu de calculer la structure du champ de vitesses dans l'état fondamental perturbé, puis d'en déduire  $\langle \hat{L}'_z \rangle$ , puis  $\Theta$ , nous allons ici directement calculer le moment cinétique moyen des N bosons à partir de leur état perturbé  $|\tilde{\varphi}_0\rangle$

$$\langle \hat{L}'_z \rangle = \langle \tilde{\varphi}_0 | \hat{L}'_z | \tilde{\varphi}_0 \rangle \quad (4.18)$$

$$|\tilde{\varphi}_0\rangle = |\varphi_0\rangle - \Omega \sum_{n \neq 0} |\varphi_n\rangle \frac{\langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_0 \rangle}{E_0 - E_n} \quad (4.19)$$

$$\langle \tilde{\varphi}_0 | \hat{L}'_z | \tilde{\varphi}_0 \rangle \simeq 2\Omega \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_0 \rangle|^2}{E_n - E_0} \quad (4.20)$$

## Généralisation

Au lieu de supposer initialement le système dans l'état fondamental  $|\varphi_0\rangle$  de l'hamiltonien  $\hat{H}_0$  des N bosons, on peut le supposer dans un mélange statistique des états propres  $|\varphi_m\rangle$  de  $\hat{H}_0$  avec des poids  $\pi_m$ . L'expression généralisant (4.20) est alors

$$\langle \hat{L}'_z \rangle = 2\Omega \sum_{n \neq m} \sum_m \pi_m \frac{|\langle \varphi_n | \hat{L}_z | \varphi_m \rangle|^2}{E_n - E_m} \quad (4.21)$$

Les valeurs des  $\pi_m$  dépendent de l'équilibre thermodynamique considéré (canonique, grand canonique)

## Transformation de l'expression de $\langle \hat{L}'_z \rangle$

Supposons qu'on trouve un opérateur  $A$  tel que

$$\langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_m \rangle = \frac{\langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_m \rangle}{E_n - E_m} \quad (4.22)$$

Un tel opérateur  $\hat{A}$  permet alors d'écrire :

$$2 \frac{|\langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_m \rangle|^2}{E_n - E_m} = \langle \varphi_m | \hat{L}'_z | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_m \rangle - \langle \varphi_m | \hat{A} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_m \rangle \quad (4.23)$$

La sommation sur  $n$  fait alors apparaître la relation de fermeture et conduit à :

$$\langle \hat{L}'_z \rangle = \Omega \sum_m \pi_m \langle \varphi_m | [\hat{L}'_z, \hat{A}] | \varphi_m \rangle = \Omega \langle [\hat{L}'_z, \hat{A}] \rangle \quad (4.24)$$

## Calcul de $\hat{A}$

L'équation (4.22) de définition de  $\hat{A}$  est équivalente à

$$\langle \varphi_n | \hat{H}_0 \hat{A} - \hat{A} \hat{H}_0 | \varphi_m \rangle = \langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_m \rangle \quad (4.25)$$

c-à-d, comme  $|\varphi_m\rangle$  et  $|\varphi_n\rangle$  sont quelconques

$$[\hat{H}_0, \hat{A}] = \hat{L}'_z \quad (4.26)$$

Pour trouver la solution de (4.26), il suffit de remarquer que  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}'_z$  étant des fonctions quadratiques de  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x, \hat{p}_y$ ,  $\hat{A}$  doit être aussi une fonction quadratique qui mélange  $x$  et  $y$

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^N (a \hat{x}'_i \hat{y}'_i + b \hat{p}'_{xi} \hat{p}'_{yi} + c \hat{x}'_i \hat{p}'_{yi} + d \hat{y}'_i \hat{p}'_{xi}) \quad (4.27)$$

## Expression de $\hat{A}$

Reportons (4.27) dans (4.28). Le calcul des commutateurs avec les divers termes de  $\hat{H}_0$  ne présente pas de difficultés. L'identification du résultat obtenu avec  $\hat{L}'_z$  détermine  $a, b, c, d$ ,

$$\hat{A} = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \sum_{i=1}^N \left[ (\omega_x^2 + \omega_y^2) \hat{x}'_i \hat{y}'_i + \frac{2}{m} \hat{p}'_{xi} \hat{p}'_{yi} \right] \quad (4.28)$$

expression qui n'a de sens que si  $\omega_x$  est différent de  $\omega_y$

### Calcul de $[\hat{L}'_z, \hat{A}]$

Le calcul du commutateur de  $\hat{A}$  écrit en (4.28) avec

$$\hat{L}'_z = \sum_i (\hat{x}'_i \hat{p}'_{yi} - \hat{y}'_i \hat{p}'_{xi}) \text{ donne}$$

$$[\hat{L}'_z, \hat{A}] = \frac{1}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \sum_{i=1}^N \left[ m (\omega_x^2 + \omega_y^2) (\hat{y}'_i{}^2 - \hat{x}'_i{}^2) + \frac{2}{m} (\hat{p}'_{yi}{}^2 - \hat{p}'_{xi}{}^2) \right] \quad (4.29)$$

## Expression de $\langle \hat{L}'_z \rangle$

Elle est obtenue par report de (4.29) dans (4.24)

Comme l'opérateur densité du système est diagonal dans la base d'énergie (mélange statistique d'états propres de  $\hat{H}_0$ ), seuls les éléments diagonaux de  $\hat{x}'^2$ ,  $\hat{y}'^2$ ,  $\hat{p}'_x$ ,  $\hat{p}'_y$  apparaissent, de sorte qu'on peut utiliser les relations :

$$\langle \hat{p}'_x{}^2 \rangle = m^2 \omega_x^2 \langle \hat{x}'^2 \rangle \quad \langle \hat{p}'_y{}^2 \rangle = m^2 \omega_y^2 \langle \hat{y}'^2 \rangle \quad (4.30)$$

ce qui permet finalement d'écrire

$$\Theta = \frac{\langle \hat{L}'_z \rangle}{\Omega} = \frac{m N}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \left[ (\omega_x^2 + \omega_y^2) (\langle \hat{y}'^2 \rangle - \langle \hat{x}'^2 \rangle) + 2 (\omega_y^2 \langle \hat{y}'^2 \rangle - \omega_x^2 \langle \hat{x}'^2 \rangle) \right] \quad (4.31)$$

## Contributions respectives du condensat et du nuage thermique

En dessous de la température critique  $T_C$ ,  $N_0$  particules sont condensées dans l'état fondamental  $|\varphi_0\rangle$  de  $\hat{H}_0$ . Les  $N-N_0$  autres particules forment le nuage thermique.

$$\Theta = \Theta_{\text{cond}} + \Theta_{\text{th}} \quad (4.32)$$

$$\Theta_{\text{cond}} = \frac{m N_0}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \left[ (\omega_x^2 + \omega_y^2) \left( \langle \hat{y}'^2 \rangle_0 - \langle \hat{x}'^2 \rangle_0 \right) \right] + 2 \left( \omega_y^2 \langle \hat{y}'^2 \rangle_0 - \omega_x^2 \langle \hat{x}'^2 \rangle_0 \right) \quad (4.33)$$

$$\Theta_{\text{th}} = \frac{m (N - N_0)}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \left[ (\omega_x^2 + \omega_y^2) \left( \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} - \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} \right) \right] + 2 \left( \omega_y^2 \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} - \omega_x^2 \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} \right) \quad (4.34)$$

$\langle \rangle_0$  ( $\langle \rangle_{\text{th}}$ ): moyenne dans le condensat (nuage thermique)

## Calcul de $\Theta_{\text{cond}}$

Rappelons que [voir (3.25)]:

$$\langle \hat{x}'^2 \rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega_x} \quad \langle \hat{y}'^2 \rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega_y} \quad (4.35)$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{cond}} &= \frac{N_0 \hbar}{2} \left[ \left( \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \right) \left( \frac{1}{\omega_y} - \frac{1}{\omega_x} \right) + \frac{2}{\omega_x^2 - \omega_y^2} (\omega_y - \omega_x) \right] \\ &= \frac{N_0 \hbar}{2} \frac{1}{\omega_x + \omega_y} \left[ \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_x \omega_y} - 2 \right] = \frac{N_0 \hbar}{2} \left( \frac{1}{\omega_y} + \frac{1}{\omega_x} \right) \left( \frac{\omega_y - \omega_x}{\omega_y + \omega_x} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\Theta_{\text{cond}} = N_0 m \left( \langle x'^2 + y'^2 \rangle_0 \right) \left( \frac{\langle x'^2 - y'^2 \rangle_0}{\langle x'^2 + y'^2 \rangle_0} \right)^2 \quad (4.37)$$

On retrouve le résultat déjà obtenu en (4.6) ou (4.9)

# Densité spatiale du nuage thermique

Voir cours 1996-97, page V-3, équation (5.14)

$$\rho_{\text{th}}(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^3} g_{3/2} \left[ z \exp \left\{ -V_{\text{ext}}(\vec{r}) / k_B T \right\} \right] \quad (4.38)$$

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}} \quad (4.39)$$

Longueur d'onde de de Broglie thermique

$z$  Fugacité (égale à 1 pour  $T = T_C$ ) (4.40)

$$g_\alpha(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l^\alpha} \quad \text{Fonction de Bose} \quad (4.41)$$

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

## Expression de $\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}}$

$$\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} = \frac{\int d^3 r' \rho_{\text{th}}(r') x'^2}{\int d^3 r' \rho_{\text{th}}(r')} \quad (4.42)$$

Développons la fonction de Bose  $g_{3/2}$ . Les intégrales sur  $x', y', z'$  se factorisent.

Après le changement de variables

$$u^2 = \frac{\ell m \omega_x^2 x'^2}{k_B T} \quad v^2 = \frac{\ell m \omega_x^2 y'^2}{k_B T} \quad w^2 = \frac{\ell m \omega_x^2 z'^2}{k_B T} \quad (4.43)$$

on fait apparaître, au numérateur  $g_4(z)$ , au dénominateur  $g_3(z)$ , et les intégrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u^2 du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (4.44)$$

## Résultat obtenu pour $\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}}$ et $\langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}}$

$$\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} = \frac{k_B T}{m \omega_x^2} \frac{g_4(z)}{g_3(z)} \quad (4.45.a)$$

$$\langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} = \frac{k_B T}{m \omega_y^2} \frac{g_4(z)}{g_3(z)} \quad (4.45.b)$$

**Pour**  $T \gg T_C$ ,  $z \ll 1$ ,  $g_4(z)/g_3(z) \simeq 1$

On retrouve le résultat bien connu donné par l'équipartition de l'énergie:

$$\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} = k_B T / m \omega_x^2 \quad \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} = k_B T / m \omega_y^2 \quad (4.46)$$

**Pour**  $T < T_C$ ,  $z = 1$ ,  $g_4(z)/g_3(z) < 1$

Le nuage se contracte  
Effet de la statistique de Bose

## Calcul de $\Theta_{\text{th}}$

Reportons (4.45.a) et (4.45.b) dans (4.34)

Le dernier terme du crochet s'annule et il vient:

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{th}} &= m(N - N_0) \left( \frac{1 / \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} + 1 / \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}}}{1 / \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} - 1 / \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}}} \right) \left( \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} - \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} \right) \\ &= m(N - N_0) \left( \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} + \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} \right) = \Theta_{\text{rig}}\end{aligned}\quad (4.47)$$

Les  $N - N_0$  particules non condensées tournent  
comme un corps rigide

# Récapitulation

Quand on fait tourner un piège contenant un gaz parfait de bosons partiellement condensé,

- Les  $N-N_0$  bosons non condensés tournent comme un corps rigide, même quand  $\omega_x$  tend vers  $\omega_y$
- Le condensat est beaucoup moins entraîné et a un moment d'inertie beaucoup plus petit, qui tend vers 0 quand  $\omega_x$  tend vers  $\omega_y$

Manifestation spectaculaire de la superfluidité du condensat

## Evolution des phénomènes quand la vitesse de rotation augmente

Les paramètres qui décrivent l'anisotropie du condensat tournant et son champ de vitesses

$$\tilde{\omega}_x^2, \tilde{\omega}_y^2, \alpha \quad (4.48)$$

dépendent de la vitesse de rotation  $\Omega$  et du coefficient

$$\varepsilon = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (4.49)$$

caractérisant l'anisotropie du piège.

Étudions les variations de ces divers paramètres quand  $\Omega$  augmente.

## Equation donnant $\alpha$

Etudions plus particulièrement le cas de bosons en interaction à la limite de Thomas-Fermi.

Repartons des équations (3.67), (3.68) et (3.64) du cours III

$$\tilde{\omega}_x^2 = \omega_x^2 + \alpha^2 - 2\alpha\Omega \quad (4.50)$$

$$\tilde{\omega}_y^2 = \omega_y^2 + \alpha^2 + 2\alpha\Omega \quad (4.51)$$

$$\alpha = -\Omega \frac{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2}{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2} \quad (4.52)$$

## Equation donnant $\alpha$ (suite)

Reportons (4.50) et (4.51) dans (4.52). Il vient :

$$\alpha = -\Omega \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2 - 4\alpha\Omega}{\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\alpha^2} \quad (4.53)$$

qui peut encore s'écrire

$$2\alpha^3 + \alpha(\omega_x^2 + \omega_y^2 - 4\Omega^2) + \Omega(\omega_x^2 - \omega_y^2) = 0 \quad (4.54)$$

Equation du troisième degré

Les seules racines acceptables sont celles qui donnent

$$\tilde{\omega}_x^2 \geq 0 \quad \tilde{\omega}_y^2 \geq 0$$

# Etude de quelques cas limites

**Limite**  $\Omega \ll \omega_x, \omega_y$

L'équation (4.54) n'a alors qu'une racine égale, à l'ordre le plus bas en  $\Omega$  à :

$$\alpha \simeq - \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \Omega \quad (4.55)$$

D'après (4.50), (4.51) et (4.52),  $\tilde{\omega}_x$  et  $\tilde{\omega}_y$  ne diffèrent de  $\omega_x$  et  $\omega_y$  que par des termes en  $\Omega^2$ .

L'anisotropie du condensat change donc très peu aux faibles vitesses de rotation

**Limite**  $\Omega \gg \omega_x, \omega_y$

L'équation (4.54) a alors une racine qui, à l'ordre le plus bas en  $1/\Omega$ , vaut :

$$\alpha \simeq + \frac{1}{4\Omega} (\omega_x^2 - \omega_y^2) \quad (4.56)$$

Les équations (4.50) et (4.51) donnent alors :

$$\tilde{\omega}_x^2 \simeq \tilde{\omega}_y^2 \simeq \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (4.57)$$

La rotation très rapide du piège fait ainsi apparaître un potentiel effectif isotrope, faisant intervenir la moyenne des 2 raideurs sur Ox et Oy.

Noter le changement de signe de  $\alpha$  quand on passe de la valeur (4.55) à la valeur (4.56).

## Cas d'un piège isotrope ( $\omega_x = \omega_y$ )

Pour  $\Omega \leq \omega_x / \sqrt{2}$

L'équation (4.54) n'a qu'une seule racine

$$\alpha = 0 \quad (4.58)$$

Pour  $\omega_x / \sqrt{2} < \Omega \leq \omega_x$

L'équation (4.54) a trois racines :

$$\alpha = 0 \quad (4.59)$$

$$\alpha = \pm \sqrt{2\Omega^2 - \omega_x^2} \quad (4.60)$$

Pour  $\Omega = \omega_x$

La racine  $\alpha = \omega_x$  conduit à  $\tilde{\omega}_x = 0$ , la racine  $\alpha = -\omega_x$  à  $\tilde{\omega}_y = 0$ .

Pour  $\Omega > \omega_x$

Les racines (4.60) ne sont plus acceptables car elles conduisent à  $\tilde{\omega}_x^2$  ou  $\tilde{\omega}_y^2$  négatif.

# Valeurs possibles de $\alpha$ en fonction de $\Omega / \omega_x$ pour $\omega_x = \omega_y$

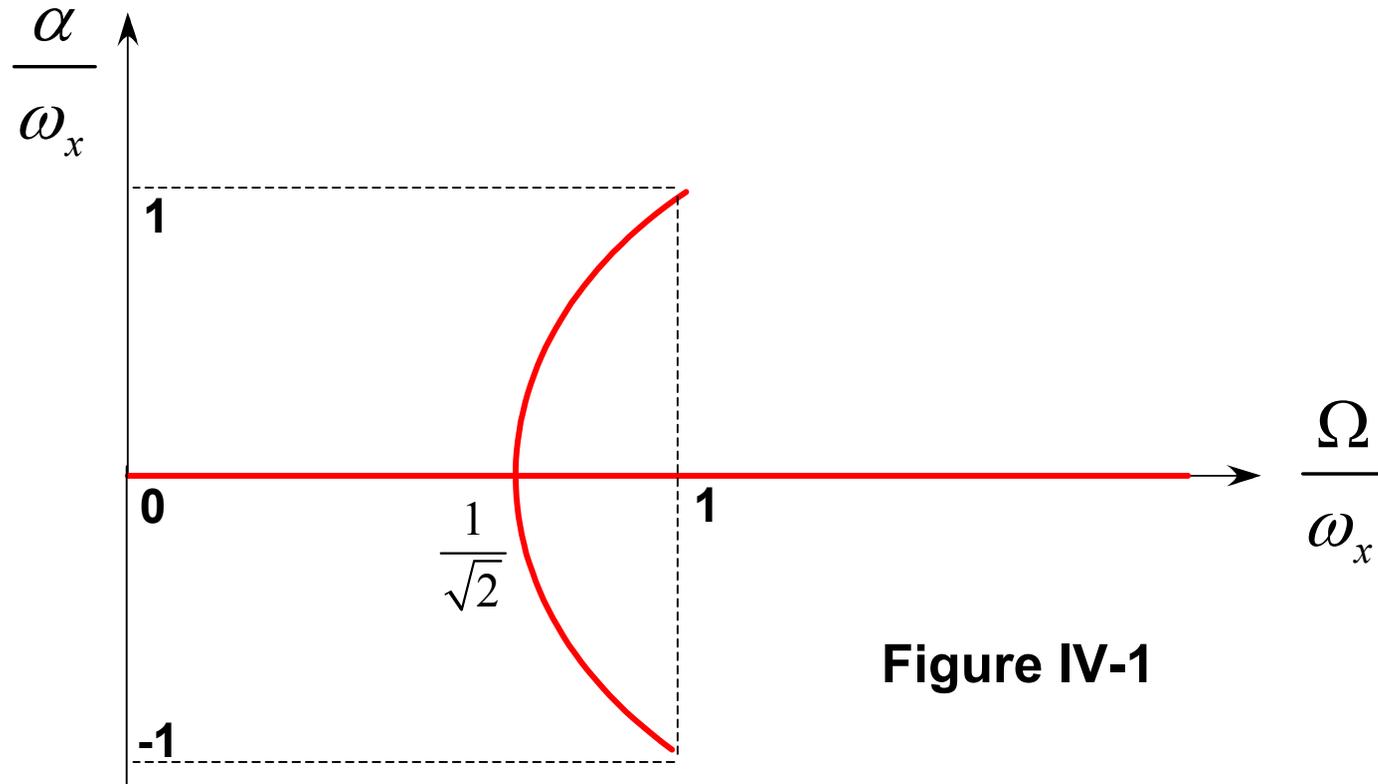
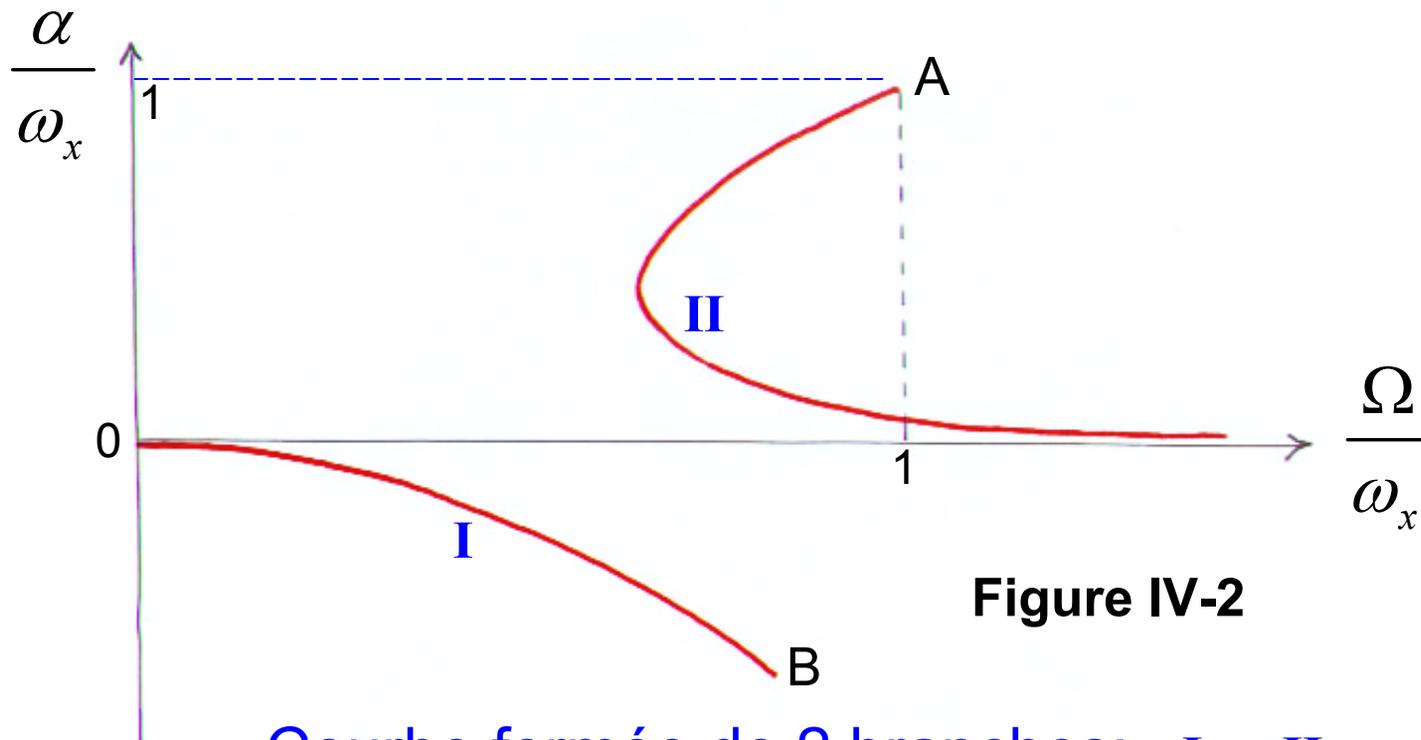


Figure IV-1

Bifurcation et brisure spontanée de symétrie quand  $\Omega$  atteint la valeur  $\omega_x / \sqrt{2}$

L'interprétation physique sera donnée ultérieurement

**Allure de la courbe donnant  $\alpha$  en fonction de  $\Omega/\omega_x$   
pour  $\omega_x \neq \omega_y$  ( $\omega_x > \omega_y$ )**



Courbe formée de 2 branches: I , II

-Changement de signe pour  $\Omega \rightarrow \infty$

-Point A       $\Omega = \omega_x$        $\alpha = \omega_x$  solution de (4.54)       $\tilde{\omega}_x = 0$

-Point B       $\Omega = \omega_y$        $\alpha = -\omega_y$  solution de (4.54)       $\tilde{\omega}_y = 0$

# Évolution de l'anisotropie du condensat

D'après (4.52),  $\alpha / \Omega$  est proportionnel à l'anisotropie du condensat

$$- \frac{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2}{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2} \quad (4.61)$$

Comme la concavité de la branche I de la figure IV-2 est dirigée vers le bas, l'anisotropie du piège augmente quand  $\Omega$  croît à partir de 0

Notons que si on diminue  $\Omega$  à partir d'une grande valeur (branche II), l'anisotropie du condensat a un signe opposé au précédent.

## Interprétation de la bifurcation apparaissant pour $\varepsilon = 0$

Le condensat reste isotrope tant que  $\Omega < \omega_x / \sqrt{2}$  et peut ensuite devenir très anisotrope quand  $\Omega$  atteint et dépasse cette valeur.

Un tel phénomène correspond à l'excitation résonnante du mode de surface  $n_r = 0$ ,  $\ell = 2$ ,  $m = 2$  qui consiste en une déformation elliptique tournant à la vitesse  $\omega_0 / \sqrt{2}$  dans le plan  $xOy$  (voir T-42 . Ici  $\omega_0 = \omega_x = \omega_v$ )

# Transfert d'énergie et de moment cinétique du piège tournant au condensat

Considérons le piège tournant et le condensat comme un système global isolé

## État initial

- Piège de moment d'inertie  $I$  tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_i$
- Condensat dans l'état fondamental

## État final

- Piège tournant à la vitesse  $\Omega_f$
- Excitation élémentaire créée dans le condensat

Energie :  $E = \hbar\omega(\ell)$       Moment cinétique :  $L_z = \hbar\ell$

# Équations de conservation

## Énergie

$$\frac{1}{2}I \Omega_i^2 = \frac{1}{2}I \Omega_f^2 + \hbar\omega(\ell) \quad (4.62)$$

## Moment cinétique

$$I \Omega_i = I \Omega_f + \hbar\ell \quad (4.63)$$

De (4.63), on déduit

$$\Omega_f = \Omega_i - \frac{\hbar\ell}{I} \quad (4.64)$$

qui, reporté dans (4.62) donne

$$\frac{(\hbar\ell)^2}{2I} - \hbar\ell\Omega_i = -\hbar\omega(\ell) \quad (4.65)$$

$$\Omega_i = \frac{\omega(\ell)}{\ell} + \frac{\hbar\ell}{2I} \quad (4.66)$$

## Limite $I \rightarrow \infty$

Le piège est un objet macroscopique et il faut faire tendre  $I$  vers l'infini.

L'équation (4.66) montre que le transfert résonnant d'énergie et de moment cinétique du piège tournant au condensat n'est possible que si

$$\Omega_i \geq \frac{\omega(\ell)}{\ell} \quad (4.67)$$

Pour une onde de surface quadrupolaire

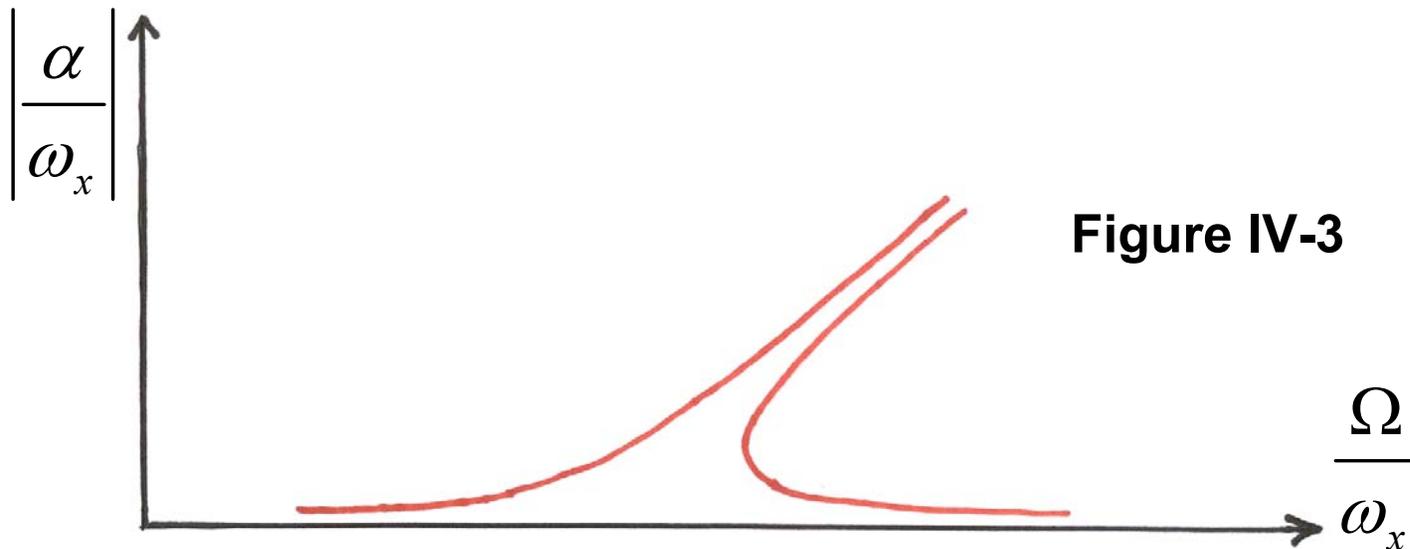
$$\ell = 2 \quad \omega(\ell) = \omega_0 \sqrt{2} \quad \omega(\ell)/\ell = \omega_0 / \sqrt{2}$$

On retrouve bien la condition  $\Omega \geq \omega_0 / \sqrt{2}$

Analogie avec la vitesse critique apparaissant pour un transfert résonnant d'énergie et de quantité de mouvement à un superfluide.

## Analogie avec la résonance d'un oscillateur non linéaire

Si, sur la courbe de la figure IV-2, on porte en ordonnées le module de  $\alpha$  et non  $\alpha$ , on obtient, pour  $\varepsilon \ll 1$ , une courbe ayant l'allure suivante



qui rappelle celle décrivant la résonance d'un oscillateur non linéaire dont la fréquence dépend de l'amplitude.

# Autres problèmes intéressants

## Stabilité dynamique

Les régimes stationnaires décrits par les branches de la figure IV-2 peuvent être dynamiquement instables, un faible écart à l'équilibre pouvant croître et diverger (voir références 1, 4)

Par exemple, le mouvement du centre de masse du condensat, indépendant des interactions, n'est stable que si

$$\Omega < \omega_y \quad \text{ou} \quad \Omega > \omega_x$$

## Nucléation de tourbillons

L'excitation résonnante du mode de surface  $\ell = 2, m = 2$  au voisinage de  $\omega_x / \sqrt{2}$  semble jouer un rôle important (voir référence 5)

# Références

(reprise et suite de T-116)

- 1 - A. Recati, F. Zambelli, S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 86, 377 (2001)
- 2 - J. Garcia-Ripoll, V. Pérez-Garcia, arXiv:cond-mat/0003451 v2
- 3 - S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 76, 1405 (1996)
- 4 - S. Sinha, Y. Castin, Phys. Rev. Lett. 87, 190402 (2001)
- 5 - K. Madison, F. Chevy, V. Bretin, J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. 86, 4443 (2001)