Modes de vibration d'un gaz de bosons piégés
Limite hydrodynamique pour T > T_C

<u>Système étudié</u>

- Gaz de bosons piégés dans un potentiel harmonique
  On tient compte de la statistique de Bose

- Le système n'est pas condensé

$$T > T_c \tag{9.1}$$

- Le taux de collisions est très élevé

$$\gamma_{\text{coll}} \gg \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega\tau \ll 1 \tag{9.2}$$

de sorte qu'un équilibre thermodynamique local peut être atteint en tout point

Motivations de cette étude

• Le cours précédent étudiait un gaz classique. Ici on essaie de tenir compte de la statistique de Bose-Einstein. Quels sont les modes de vibration du nuage thermique qui en dépendent ?

• Le cours précédent ne précisait rien sur le champ de vitesses. Peut-on calculer sa structure et la comparer à celle du champ de vitesses des modes de vibration du condensat ?

• Intérêt d'étudier en détail la limite hydrodynamique qui semble pouvoir être observée sur de nouveaux systèmes (He métastable)

Méthode suivie

(références 22 et 23)

- Partir de l'équation de Boltzmann avec une fonction de distribution décrivant un équilibre thermodynamique local caractérisé par

  - une température locale $T(\vec{r},t)$
  - une vitesse moyenne locale $\vec{v}(\vec{r},t)$
  - un potentiel chimique local $\mu(\vec{r},t)$

  ayant des valeurs très peu différentes des valeurs à l'équilibre

$$T_0\ ,\quad \vec{v}_0=\vec{0}\ ,\quad \mu_0(\vec{r})=\mu-\mathrm{V}_{\mathrm{ext}}(\vec{r}) \qquad (9.3)$$

5 fonctions inconnues à déterminer

Méthode suivie (suite)

- Écrire les équations d'évolution de 5 grandeurs physiques conservées au cours des collisions
    - Densité locale de particules
    - Densité locale de courant
    - Densité locale d'énergie cinétique
- Déduire de ces équations une équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesses correspondant au mode de vibration étudié.

Plan

- Exemples de grandeurs locales
- Équation de Boltzmann incluant les effets de la statistique
- Lois de conservation locales
- Dérivations d’une équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesses
- Etude de quelques modes propres de vibration

Équilibre thermodynamique local

Equilibre atteint à la limite hydrodynamique

<u>Fonction de distribution</u> (statistique de Bose-Einstein)

$$f\left(\vec{r},\vec{p},t\right)=\frac{1}{\exp\left\{\frac{\left[\vec{p}-M\vec{v}\left(\vec{r},t\right)\right]^2/2M-\mu\left(\vec{r},t\right)}{k_B T\left(\vec{r},t\right)}\right\}-1} \qquad (9.4)$$

f : nombre d'occupation d'une cellule de l'espace des phases de volume h^3

Nombre $\mathrm{d}\,\mathrm{N}$ de particules dans l'élément de volume $\mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 p$

$$\mathrm{d}\,N=\frac{\mathrm{d}^3 r\ \mathrm{d}^3 p}{h^3} f\left(\vec{r},\vec{p},t\right) \qquad (9.5)$$

Équilibre thermodynamique local (suite)

Déviations par rapport à l'équilibre complet

(aucune mode de vibration excité)

$$\begin{cases} T(\vec{r},t) = T_0 + \delta T(\vec{r},t) & (9.6a) \\ \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0} + \delta \vec{v}(\vec{r},t) & (9.6b) \\ \mu(\vec{r},t) = \mu_0(\vec{r}) + \delta \mu(\vec{r},t) & (9.6c) \end{cases}$$

$$\mu_0(\vec{r}) = \mu - V_{\text{ext}}(\vec{r}) \qquad (9.7)$$

Fugacité

$$z(\vec{r},T) = \exp\{\mu(\vec{r},t)/k_B T(\vec{r},t)\} \qquad (9.8)$$

Quelques valeurs moyennes locales

1 - Densité spatiale locale $n(\vec{r},t)$

$$n(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t) \qquad (9.9)$$

Utilisons (9.8) pour réécrire (9.4) sous la forme

$$f = \frac{z\, e^{-\delta\vec{p}^2 / 2 M k_B T}}{1 - z\, e^{-\delta p^2 / 2 M k_B T}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} e^{-\ell\delta\vec{p}^2 / 2 M k_B T} \qquad (9.10)$$

où

$$\delta\vec{p}(\vec{r},t) = \vec{p} - M\,\vec{v}(\vec{r},t) \qquad (9.11)$$

est la déviation de $\vec{p}$ par rapport à l'impulsion moyenne $M\,\vec{v}(\vec{r},t)$

Densité spatiale locale (suite)

L'intégrale sur p de (9.10) est élémentaire et donne

$$n(\vec{r},t)=\frac{1}{\Lambda(\vec{r},t)^3}\,g_{3/2}\left[z(\vec{r},t)\right] \tag{9.12}$$

où

$$\Lambda(\vec{r},t)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{M\,k_B\,T(\vec{r},t)}} \tag{9.13}$$

est la longueur d'onde de de Broglie locale et

$$g_{3/2}(z)=\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{z^{\ell}}{\ell^{3/2}} \tag{9.14}$$

la fonction de Bose d'indice 3/2.

2 - Courant local $\vec{j}(\vec{r},t)$

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p\,\frac{\vec{p}}{M}f(\vec{r},\vec{p},t) \qquad (9.15)$$

Utilisons (9.11) pour exprimer $\vec{p}$ en fonction de $M\vec{v}$ et $\delta\vec{p}$. Comme la moyenne locale de $\delta\vec{p}$ est nulle, on obtient

$$\vec{j}(\vec{r},t)=n(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t) \qquad (9.16)$$

A l'ordre le plus bas par rapport aux déviations à l'équilibre complet [voir (9.6)], on peut écrire

$$\vec{j}(\vec{r},t)=n_0(\vec{r})\vec{v}(\vec{r},t) \qquad (9.17)$$

où $n_0(\vec{r})$ est la densité spatiale de l'équilibre.

3 - Energie cinétique locale $\varepsilon(\vec{r},t)$

$$\varepsilon(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p\,\frac{p^2}{2M}f(\vec{r},p,t) \tag{9.18}$$

Un calcul analogue au précédent donne

$$\varepsilon(\vec{r},t)=\frac{1}{2}M\,n(\vec{r},t)\vec{v}^2(\vec{r},t)+\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p\,\frac{\delta\vec{p}^2}{2M}f(\vec{r},\vec{p},t) \tag{9.19}$$

Le calcul du second terme de (9.19) au moyen de (9.10) est élémentaire et conduit à

$$\varepsilon(\vec{r},t)=\frac{1}{2}M\,n(\vec{r},t)\vec{v}^2(\vec{r},t)+\frac{3}{2}k_BT(\vec{r},t)\,n(\vec{r},t)\,\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \tag{9.20}$$

Le premier terme de (9.20), d'ordre 2 en $\vec{v}$, peut être négligé

$$\varepsilon(\vec{r},t)\simeq\frac{3}{2}k_BT(\vec{r},t)n(\vec{r},t)\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \tag{9.21}$$

Intérêt des valeurs moyennes locales qui viennent d'être introduites

Réécrivons ces moyennes locales sous la forme

$$\begin{cases} n(\vec{r},t) = \langle \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \rangle & \text{(9.22.a)} \\ \vec{j}(\vec{r}_0,t) = \langle \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, \vec{p}/M \rangle & \text{(9.22.b)} \\ \varepsilon(\vec{r}_0,t) = \langle \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, \vec{p}^{\,2}/2M \rangle & \text{(9.22.c)} \end{cases}$$

Où la moyenne < > est globale (sur r et p) et définie comme en (8.3)

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3r\, \mathrm{d}^3p\ \chi(\vec{r},\vec{p})\, f(\vec{r},\vec{p},t) \qquad (9.23)$$

Toutes les grandeurs apparaissant en (9.22) sont de la forme (8.23) et sont donc conservées au cours des collisions. Le terme de collision de l'équation de Boltzmann ne contribue donc pas à leur évolution.

Structure de l'équation de Boltzmann

Analogue à (8.1). On prend ici les variables position et impulsion au lieu de position et vitesse et f/h^3 est normalisé à N

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r},\vec{p}_1,t) = -\frac{\vec{p}_1}{M}\vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r},\vec{p}_1,t) + \left[\vec{\nabla}_r V_{\text{ext}}(\vec{r})\right]\cdot\left[\vec{\nabla}_{\vec{p}_1} f(\vec{r},\vec{p}_1,t)\right] + I_{\text{coll}}(f) \tag{9.24}$$

Pour tenir compte de la statistique de Bose

$$f(\vec{p}_1')f(\vec{p}_2') - f(\vec{p}_1)f(\vec{p}_2) \tag{9.25}$$

est remplacé dans le terme de collision de (9.9) par

$$\begin{aligned} &f(\vec{p}_1')f(\vec{p}_2')\left[f(\vec{p}_1)+1\right]\left[f(\vec{p}_2)+1\right]- \\ &-f(\vec{p}_1)f(\vec{p}_2)\left[f(\vec{p}_1')+1\right]\left[f(\vec{p}_2')+1\right] \end{aligned} \tag{9.26}$$

Grandeurs conservées au cours des collisions

Le changement de forme de (9.25) à (9.26), du terme apparaissant dans l'intégrale de collision ne modifie pas la démonstration donnée dans le cours VIII pour les grandeurs obéissant à (8.21)

Pour toutes les grandeurs conservées au cours des collisions, le dernier terme de (9.9), $I_{\text{coll}}(f)$, ne contribue pas à l'évolution des moyennes.

Pour obtenir l'évolution de $n, \vec{j}, \varepsilon$, il suffit donc de multiplier les 2 membres de (9.24) par $1, \vec{p}/M, p^2/2M$, puis d'intégrer sur p, en ignorant le dernier terme, $I_{\text{coll}}(f)$

Équation de conservation

Les intégrales sur p se calculent aisément (après une intégration par parties) et donnent à <u>l'ordre 1 inclus</u> en $\vec{v}(\vec{r},t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\cdot\left[n_0(\vec{r})\vec{v}(\vec{r},t)\right] & (9.27) \\ M n_0(\vec{r})\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{v}(\vec{r},t) = -\left[\vec{\nabla}P(\vec{r},t) + n(\vec{r},t)\vec{\nabla}V_{\text{ext}}(\vec{r})\right] & (9.28) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\varepsilon(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\cdot\left[\dfrac{5}{3}\varepsilon_0(\vec{r})\vec{v}(\vec{r},t)\right] - n_0(\vec{r})\,\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla}V_{\text{ext}}(\vec{r}) & (9.29) \end{cases}$$

où la pression P et $\varepsilon_0(\vec{r})$ sont définis par

$$\vec{P}(\vec{r},t) = 2\varepsilon(\vec{r},t)/3 \qquad (9.30)$$

$$\varepsilon_0(\vec{r}) = \frac{3}{2}k_B\,T_0\,n_0(\vec{r})\,\frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} \qquad (9.31)$$

Interprétation physique

Équation 9.27

La variation de la densité d'atomes en $\vec{r}$ résulte de la compétition entre flux entrant et flux sortant.

Équation 9.28

Equation de la dynamique pour le mouvement du fluide en $\vec{r}$ sous l'effet des forces de pression interne et de piégeage.

Équation 9.29

Variation de la densité d'énergie en $\vec{r}$, due à une compétition entre flux entrant et flux sortant et au travail des forces de piégeage.

Contraintes imposées par l'équilibre global

Pour un condensat à l'équilibre les densités locales de particules et d'énergie sont constantes et la vitesse moyenne locale est nulle.

Les équations (9.27) et (9.29) sont satisfaites.

Par contre, l'équation (9.28) donne une condition qui doit être satisfaite à l'équilibre

$$\vec{\nabla} P_0(\vec{r}) + n_0(\vec{r})\, \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \vec{0} \tag{9.32}$$

Utilisons (9.8), (9.12),(9.21),(9.30) pour montrer qu'une telle équation est bien satisfaisante à l'équilibre

Démonstration de (9.32)

$$P_0(\vec{r}) = 2\varepsilon_0(\vec{r})/3 = \frac{k_B T_0}{\Lambda_0^3} g_{5/2}(z_0) \qquad \Lambda_0 = \Lambda(T_0)$$

$$z_0(\vec{r}) = \exp\left\{\left[\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})\right]/k_B T_0\right\}$$

$$\vec{\nabla} z_0 = \frac{z_0}{k_B T_0}\left[-\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})\right] \qquad z_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, z_0} g_{5/2}(z_0) = g_{3/2}(z_0)$$

$$\vec{\nabla} P_0(\vec{r}) = -\frac{1}{\Lambda_0^3}\, g_{3/2}(z_0)\left[\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})\right]$$

$$= -n_0(\vec{r})\left[\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})\right]$$

C.Q.F.D.

Équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesse

De (9.29) et (9.30) on déduit

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{r},t) = -\frac{5}{3}\,\vec{\nabla}\cdot\left[P_0(\vec{r})\,\vec{v}(\vec{r},t)\right]$$
$$-\frac{2}{3}\,n_0(\vec{r})\,\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \tag{9.33}$$

En prenant la dérivée temporelle des 2 membres de (9.28) et en utilisant (9.27) et (9.33), on obtient

$$M\,n_0(\vec{r})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{5}{3}\vec{\nabla}\left\{\vec{\nabla}\cdot\left[P_0(\vec{r})\vec{v}(\vec{r},t)\right]\right\}$$
$$+\frac{2}{3}\,\vec{\nabla}\left\{n_0(\vec{r})\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})\right\} \tag{9.34}$$
$$+\left\{\vec{\nabla}\cdot\left[n_0(\vec{r})\vec{v}(\vec{r},t)\right]\right\}\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})$$

Équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesses (suite)

En utilisant (9.32) et le fait (démontré plus loin - voir T-22) que $\vec{\nabla} n_0(\vec{r})$ est parallèle à $\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})$, on peut dériver de l'équation (9.34) l'équation suivante pour le champ de vitesses

$$
\begin{aligned}
M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}(\vec{r},t) = {} & \frac{5}{3} k_B T_0 \frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r},t)\right] \\
& - \vec{\nabla}\left[\vec{v}(\vec{r},t) \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})\right] \\
& - \frac{2}{3}\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r},t)\right] \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})
\end{aligned} \qquad (9.35)
$$

(voir T-335 à T-337)

Démonstration de (9.35)

- Première ligne de (9.34)

$$\vec{\nabla}\cdot\left[P_0\,\vec{v}\right]=\vec{\nabla}P_0\cdot\vec{v}+P_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{5}{3}\vec{\nabla}\left\{\vec{\nabla}\cdot\left[P_0\,\vec{v}\right]\right\}=\frac{5}{3}\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}P_0\cdot\vec{v}\right]+\frac{5}{3}\vec{\nabla}\left[P_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right]$$

$$=\frac{5}{3}\vec{\nabla}\left[\vec{v}\cdot\vec{\nabla}P_0\right]+\frac{5}{3}\left(\vec{\nabla}P_0\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)+\frac{5}{3}P_0\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) \qquad (9.36)$$

- Deuxième ligne de (9.34). Utilisons (9.32)

$$\frac{2}{3}\vec{\nabla}\left\{n_0\,\vec{v}\cdot\vec{\nabla}V_{\mathrm{ext}}\right\}=-\frac{2}{3}\vec{\nabla}\left(\vec{v}\,.\vec{\nabla}\,P_0\right) \qquad (9.37)$$

- Somme des deux premières lignes de (9.34)

$$\vec{\nabla}\left[\vec{v}\cdot\vec{\nabla}P_0\right]+\underbrace{\frac{5}{3}\left(\vec{\nabla}P_0\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)}_{-\frac{5}{3}n_0\left(\vec{\nabla}V_{\mathrm{ext}}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)}+\frac{5}{3}P_0\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) \qquad (9.38)$$

Démonstration de (9.35) (suite)

- Troisième ligne de (9.34)

$$\vec{\nabla}\cdot\left(n_0\,\vec{v}\right)=\left(\vec{\nabla}n_0\right)\cdot\vec{v}+n_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\left[\vec{\nabla}\cdot\left(n_0\,\vec{v}\right)\right]\vec{\nabla}V_{\text{ext}}=\left[\left(\vec{\nabla}n_0\right)\cdot\vec{v}\right]\vec{\nabla}V_{\text{ext}}+n_0\left(\vec{\nabla}V_{\text{ext}}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\qquad(9.39)$$

- Transformation du premier terme de (9.38)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}P_0\right)&=-\vec{\nabla}\left[n_0\vec{v}\cdot\vec{\nabla}V_{\text{ext}}\right]\\&=-\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}V_{\text{ext}}\right)\vec{\nabla}n_0-n_0\vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}V_{\text{ext}}\right)\qquad(9.40)\end{aligned}$$

- $\vec{\nabla}n_0$ et $\vec{\nabla}V_{\text{ext}}$ sont parallèles

$$\vec{\nabla}n_0=\frac{1}{\Lambda_0^3}\frac{\mathrm{d}\,g_{3/2}\left(z_0\right)}{\mathrm{d}\,z_0}\vec{\nabla}z_0=-\frac{z_0}{\Lambda_0^3\,k_BT_0}\frac{\mathrm{d}\,g_{3/2}\left(z_0\right)}{\mathrm{d}\,z_0}\vec{\nabla}V_{\text{ext}}\qquad(9.41)$$

On peut donc écrire

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}V_{\text{ext}}\right)\vec{\nabla}n_0=\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}n_0\right)\vec{\nabla}V_{\text{ext}}\qquad(9.42)$$

<u>**Démonstration de (9.35)**</u> (suite)

En ajoutant (9.38) [où le premier terme est remplacé par (9.40)] et (9.39) et en utilisant (9.42), on obtient

$$
\begin{aligned}
M\, n_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{v} = \frac{5}{3} P_0\, \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) \\
- n_0 \vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla} V_{\text{ext}}\right) \\
- \frac{2}{3} n_0 \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right)\vec{\nabla} V_{\text{ext}}
\end{aligned}
\qquad (9.43)
$$

Il suffit alors de diviser les 2 membres de (9.43) par n_o et d'utiliser (9.30) et (9.31) pour obtenir (9.35)

Cas simple d'un gaz homogène

Le potentiel de piégeage est alors nul et les 2 dernières lignes de (9.35) disparaissent.

L'équation (9.35) admet alors des solutions longitudinales

$$\vec{v}(\vec{r},t) \propto \vec{k}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (9.44)$$

En reportant (9.44) dans (9.35) on obtient la loi de dispersion des phonons

$$\omega = c\,k \qquad (9.45)$$

avec

$$c^2 = \frac{5}{3}\,\frac{k_B T_0}{M}\,\frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} \qquad (9.46)$$

Vitesse du son dans un gaz de bosons homogène

Gaz classique non dégénéré ($T \gg T_C$)

on a alors $z_0 \ll 1$ et par suite

$$g_{5/2}(z_0) \simeq g_{3/2}(z_0) \simeq z_0 \tag{9.47}$$

de sorte que

$$c_{\text{class}}^2 = \frac{5}{3}\frac{k_B T_0}{M} \tag{9.48}$$

C'est la loi de Laplace

Gaz de bosons près de la dégénérescence

On a alors $z \simeq 1$ et par suite

$$c^2 = \frac{5}{3}\frac{k_B T_0}{M}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} = 0.51\, c_{\text{class}}^2 \tag{9.49}$$

Modes avec champ de vitesses de divergence nulle

La première et troisième ligne de (9.35) sont alors nulles et on obtient :

$$M\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{v}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\left[\vec{v}(\vec{r},t).\vec{\nabla}V_{\text{ext}}(\vec{r})\right] \qquad (9.50)$$

Le seul terme de (9.35) qui dépend de la statistique (via la fugacité z_0) est le premier. Il s'ensuit que les modes avec champ de vitesses de divergence nulle ont les mêmes propriétés que les modes d'un champ classique, que la température soit très supérieure à T_C ou très proche de T_C

Il en est d'ailleurs de même des champs de vitesses dont la divergence est spatialement uniforme, puisque le premier terme de (9.35) est alors nul

Exemples de tels modes

1 – Modes en $\vec{\nabla}\, r^{\ell} Y_{\ell}^{\ell}(\theta,\varphi)$

dans un potentiel à symétrie de révolution autour de Oz

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} M \left(\omega_{\perp}^{2}\, r_{\perp}^{2} + \omega_{z}^{2}\, z^{2} \right) \qquad (9.51)$$

$r^{\ell} Y_{\ell}^{\ell}$ est proportionnel à $\left(x + i\, y\right)^{\ell}$ qui est un polynôme harmonique de Laplacien nul. Donc, on a bien :

$$\vec{\nabla}.\vec{v} \propto \Delta \left(x + i\, y\right)^{\ell} = 0 \qquad (9.52)$$

Montrons que le champ de vitesses

$$\vec{v}(\vec{r},t) = e^{i\omega t} \vec{\nabla} \left(x + i\, y\right)^{\ell} \qquad (9.53)$$

satisfait bien (9.50) et calculons ω

1 – Modes en $\vec{\nabla}\, r^{\ell} Y_{\ell}^{\ell}(\theta,\varphi)$ (suite)

De (9.53) on déduit les composantes de la vitesse

$$\vec{v} = e^{i\omega t}\,\ell\,\left(x + i\,y\right)^{\ell-1}\left\{1,\ i,\, 0\right\} \tag{9.54}$$

et de (9.51) celles du gradient de V_{ext}

$$V_{\text{ext}} = M\left\{\omega_{\perp}^{2} x,\ \omega_{\perp}^{2} y,\ \omega_{z}^{2} z\right\} \tag{9.55}$$

de sorte que :

$$\vec{v}\,.\vec{\nabla} V_{\text{ext}} = e^{i\omega t} M\,\ell\,\omega_{\perp}^{2}\left(x + i\,y\right)^{\ell} \tag{9.56}$$

En reportant (9.54) et (9.56) dans (9.50), on obtient

$$-M\,\omega^{2}\, e^{i\omega t}\,\vec{\nabla}\left(x + i\,y\right)^{\ell} = -M\,\ell\,\omega_{\perp}^{2}\, e^{i\omega t}\,\vec{\nabla}\left(x + i\,y\right)^{\ell} \tag{9.57}$$

équation qui est bien satisfaite si

$$\omega = \omega_{\perp}\sqrt{\ell} \tag{9.58}$$

Exemples de tels modes (suite)

2 – Modes en $\vec{\nabla}\, r^{\ell} Y_{\ell}^{\ell-1}(\theta,\varphi)$

Le principe du calcul est le même

$$r^{\ell} Y_{\ell}^{\ell-1} \propto \left(x+i\,y\right)^{\ell-1} z \tag{9.59}$$

qui est bien un polynôme harmonique

$$\vec{v} = e^{i\,\omega\,t}\left(x+i\,y\right)^{\ell-2}\left\{\left(\ell-1\right)z,\ \ i\left(\ell-1\right)z,\ \ x+i\,y\right\} \tag{9.60}$$

$$\vec{v}\,.\vec{\nabla} V_{\text{ext}} = e^{i\,\omega\,t} M\left(x+i\,y\right)^{\ell-1} z\left[\left(\ell-1\right)\omega_{\perp}^{2}+\omega_{z}^{2}\right] \tag{9.61}$$

Le report de (9.60) et (9.61) dans (9.50) donne

$$-M\,\omega^{2}\,e^{i\,\omega\,t}\,\vec{\nabla}\left(x+i\,y\right)^{\ell-1} z =$$

$$-M\left[\left(\ell-1\right)\omega_{\perp}^{2}+\omega_{z}^{2}\right] e^{i\,\omega\,t}\,\vec{\nabla}\left(x+i\,y\right)^{\ell-1} z \tag{9.62}$$

équation satisfaite si

$$\omega = \sqrt{\left(\ell-1\right)\omega_{\perp}^{2}+\omega_{z}^{2}} \tag{9.63}$$

Comparaison avec un condensat

Etablissons l'équation équivalente à (9.35) pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi et piégé dans le potentiel (9.51)

Les équations hydrodynamiques linéarisées [voir (5.11) et (5.12) par exemple] s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho = -\vec{\nabla}.(\rho_0\,\vec{v}) = -\vec{v}\,.\vec{\nabla}\rho_0 - \rho_0\left(\vec{\nabla}.\vec{v}\right) \qquad (9.64)$$

$$M\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} = -\, g\vec{\nabla}\delta\rho \qquad (9.65)$$

avec

$$\rho_0(\vec{r}) = \left[\mu - V_{\mathrm{ext}}(\vec{r})\right]/\,g \qquad (9.66)$$

A partir de ces 3 équations, on déduit alors

$$M\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{v} = -\vec{\nabla}\left[\vec{v}\,.\vec{\nabla}V_{\mathrm{ext}}\right] + \vec{\nabla}\left\{\left[\mu - V_{\mathrm{ext}}\right]\left(\vec{\nabla}.\vec{v}\right)\right\} \qquad (9.67)$$

Comparaison avec un condensat (suite)

Pour un mode de vibration du condensat avec champ de vitesses de divergence nulle, le dernier terme de (9.67) est nul et on obtient :

$$M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} = -\vec{\nabla}\left[\vec{v} . \vec{\nabla} V_{\text{ext}}\right] \tag{9.68}$$

équation qui coïncide avec (9.50)

On en déduit le résultat important suivant : pour un mode de vibration avec champ de vitesses de divergence nulle, le champ de vitesses a la même structure

- pour un gaz classique
- pour un gaz de bosons, même proche de la dégénérescence
- pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi

La raison profonde est que de telles vibrations se font à densité constante et ne dépendent pas de la compressibilité du fluide (voir cours I)

Mode monopolaire dans un piége sphérique

Montrons que :

$$\vec{v} = e^{i\omega t}\vec{r} \qquad (9.69)$$

est une solution de (9.35) et calculons ω

Notons tout d'abord que :

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 3e^{i\omega t} \neq 0 \qquad (9.70)$$

de sorte que le champ de vitesses (9.69) n'est pas de divergence nulle. Par contre, le gradient de (9.70) est nul, et donc aussi le premier terme de (9.35)

Par ailleurs, pour un piège sphérique de fréquence ω_0, et pour le champ de vitesses (9.69)

$$\vec{\nabla}V_{\text{ext}}(\vec{r}) = M\omega_0^2\vec{r} \qquad (9.71)$$

$$\vec{v}.\vec{\nabla}V_{\text{ext}} = e^{i\omega t}M\,\omega_0^2\,r^2 \qquad (9.72)$$

Mode monopolaire dans un piége sphérique (suite)

Reportons (9,69), (9,70), (9,71) et (9,72) dans (9,35).
Il vient :

$$-M\,\omega^2\,e^{i\omega t}\,\vec{r} = -4\,M\;\omega_0^2\,e^{i\omega t}\,\vec{r} \qquad (9.73)$$

ce qui montre que (9.69) est bien une solution et donne :

$$\omega = 2\omega_0 \qquad (9.74)$$

Ce résultat est bien cohérent avec celui démontré dans le cours VIII (voir T-293), à savoir que le mode monopolaire dans un piège sphérique n'est pas amorti et garde la même fréquence, $2\omega_0$, quel que soit le régime de collisions

Mode m = 0 dans un piège à symétrie cylindrique

Dans un tel piège, l n'est plus un bon nombre quantique, et le mode m = 0 (« monopôle-quadrupôle ») est une superposition des modes l = 2, m = 0 et l = 0, m = 0. Cherchons donc une solution de (9.35) de la forme

$$\vec{v} = e^{i\omega t}\,\vec{\nabla}\left[\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta z^2\right] \tag{9.75}$$

La divergence de (9.75) est non nulle, mais le gradient de cette divergence est nul, de sorte que le dernier terme de (9.35) est nul. Les 2 autres termes de (9.35) se calculent aisément, et on trouve que (9.75) est une solution de (9.35) si α et β satisfont les équations

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(20\,\omega_\perp^2-6\omega^2\right)+4\,\beta\,\omega_\perp^2=0\\
&8\,\alpha\,\omega_z^2+\beta\left(16\,\omega_z^2-6\,\omega^2\right)=0
\end{aligned} \tag{9.76}$$

Mode m = 0 dans un piége à symétrie cylindrique (suite)

En écrivant que le déterminant associé au système (9.76) est nul, on obtient une équation du second degré en ω^2 dont les racines sont :

$$\omega^2 = \frac{1}{3}\left[5\omega_\perp^2 + 4\omega_z^2 \pm \sqrt{25\omega_\perp^4 + 16\omega_z^4 - 32\omega_\perp^2\omega_z^2}\right] \qquad (9.77)$$

Dans un piège très anisotrope, où

$$\omega_\perp \gg \omega_z \qquad (9.78)$$

la solution (9.77) de fréquence la plus basse est égale à

$$\omega \simeq \omega_z\sqrt{12/5} = 1.55\ \omega_z \qquad (9.79)$$

Il est intéressant de comparer cette solution à la solution correspondante pour un condensat à la limite de Thomas Fermi. L'équation 2.8.b de T-45 donne

$$\omega \simeq \omega_z\sqrt{5/2} = 1.58\ \omega_z \qquad (9.80)$$

Références

(Suite de T-156, T-192, T-232, T-273 et T-314)

22 - A. Griffin, W-C. Wu, S. Stringari, Phys.Rev.Lett. 78, 1838 (1997).

23 - L. Kadanoff, G. Baym, « Quantum Statistical Mechanics », (Benjamin, New York, 1962), Chap. 6.

24 - Une autre approche au problème des modes propres de vibration d’un nuage de bosons à la limite hydrodynamique est présentée dans : Yu. Kagan, E. Surkov, G. Shlyapnikov, Phys. Rev. A 55, R18 (1997).