

Cours 11

GAZ QUANTIQUES DÉGÉNÉRÉS

Buts de ce cours

- Passer en revue les propriétés nouvelles qui apparaissent dans un gaz d'atomes identiques à très basse température.
- Montrer qu'il existe divers régimes quantiques suivant les valeurs relatives des diverses longueurs caractéristiques : longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} , portée r_0 de l'interaction atome – atome, distance moyenne d entre atomes.
- Présenter une brève revue historique des recherches poursuivies dans ce domaine montrant les motivations initiales et l'évolution des idées.
- Décrire quelques approches théoriques qui ont été suivies pour analyser quantitativement les phénomènes observés.
- Une sélection, nécessairement très partielle, de quelques résultats obtenus sera présentée au cours 12.

Quelques références générales

Cours récents au Collège de France

1997-1998 : Condensation de Bose Einstein. Gaz sans interactions.

1998-1999 : Condensation de Bose Einstein. Effet des interactions.

1999-2000 : Propriétés de cohérence des condensats de Bose Einstein.

2000-2001 : Réponse d'un condensat à divers types d'excitation.

2001-2002 ; Condensats de Bose-Einstein en rotation.

Notes de cours disponibles sur : www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/

2 ouvrages récents

- C. Pethick, H. Smith, Bose Einstein condensation in dilute Bose gases, Cambridge University Press, 2002.
- L. Pitaevskii, S. Stringari, Bose Einstein condensation, Clarendon Press, Oxford, 2003.

Séminaire Poincaré sur la condensation de Bose Einstein

Journée du 29 Mars 2003

Texte des conférences sur : www.lpthe.jussieu.fr/poincare

Plan

Généralités

Bosons et fermions dans un piège harmonique.

Statistiques quantiques.

Longueurs caractéristiques. Les divers régimes.

Bref historique

Transport quantique dans un gaz de fermions polarisés.

Recherche de la condensation sur l'hydrogène polarisé.

Recherche de la condensation sur les alcalins.

Description des interactions à basse température

Longueur de diffusion.

Pseudopotentiel.

Condensats de Bose-Einstein. Théories de champ moyen

Equation de Gross Pitaevskii.

Gaz de Fermi dégénérés

GÉNÉRALITÉS

Fermions et Bosons

Les fermions

Particules de spin $\frac{1}{2}$ entier

Exemples : électron, proton, neutron

2 fermions identiques ne peuvent pas être dans le même état quantique (principe d'exclusion de Pauli)

Les bosons

Particules de spin entier

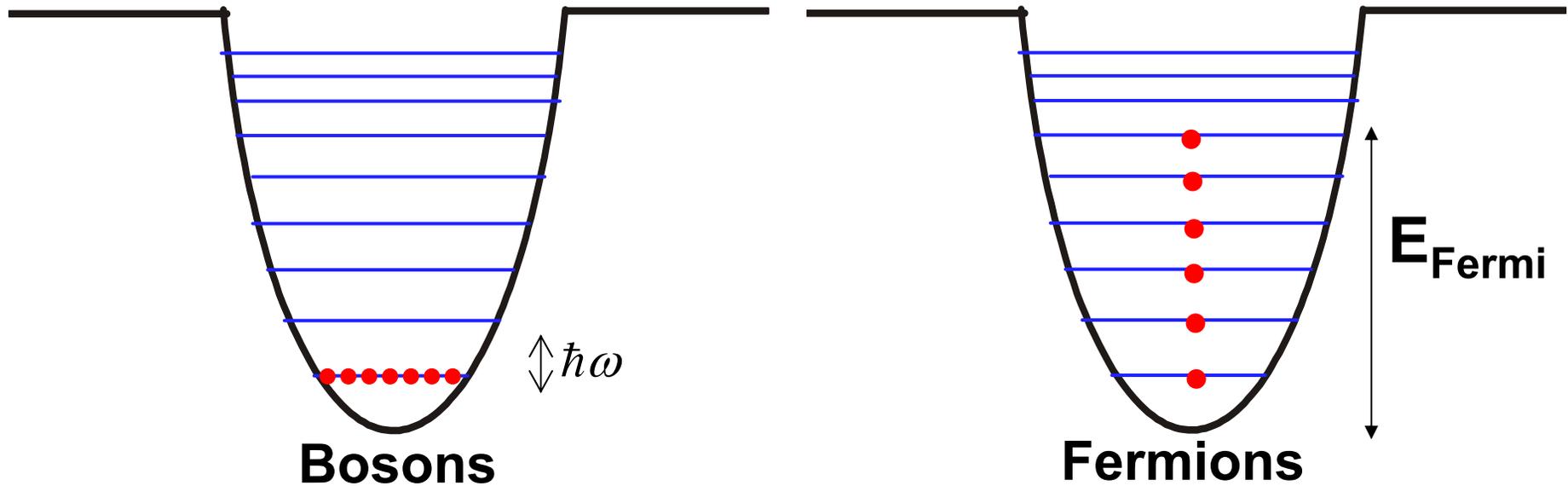
Exemples : photon, méson

Tendance à l'agglutination dans le même état quantique

Systemes composites comme les atomes

Un atome est un boson s'il contient un nombre pair de fermions (Ex : H, He⁴, Li⁷, Na²³, Rb⁸⁷), un fermion s'il contient un nombre impair de fermions (Ex : D, He³, Li⁶)

Gaz parfaits de bosons et fermions dans un piège



Température critique T_C pour la condensation de Bose Einstein

$$k_B T_C = \hbar \omega (0.83 N)^{1/3}$$

Température de Fermi T_F

$$k_B T_F = E_{\text{Fermi}} = \hbar \omega (6 N)^{1/3}$$

- Pour $T < T_C$, les bosons se condensent dans l'état fondamental du piège. Dégénérescence quantique.
- Chaque état est occupé par un seul fermion. Régime de dégénérescence quantique quand $T < T_F$

Condensation de Bose Einstein

$$k_B T_C = 0.94 \hbar \omega N^{1/3} \quad N \gg 1 \Rightarrow k_B T_C \gg \hbar \omega$$

La condensation n'est pas un effet thermique trivial qui apparaîtrait quand l'énergie thermique $k_B T$ devient de l'ordre de l'écart $\hbar \omega$ entre le niveau fondamental et le premier niveau excité. C'est une conséquence de la statistique de Bose-Einstein.

Le nombre d'occupation N_λ d'un niveau λ , d'énergie ε_λ vaut:

$$N_\lambda = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} - 1} = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_\lambda} - 1} = \frac{z}{e^{\beta \varepsilon_\lambda} - z}$$

$$\beta = 1/k_B T \quad \mu = \text{potentiel chimique}$$

$$z = \exp(+\beta \mu) = \text{fugacité} \quad \text{varie entre 0 et 1}$$

Limite classique : $z \ll 1$ $N_\lambda = z \exp(-\beta \varepsilon_\lambda)$

Statistique de Maxwell Boltzmann

Populations de l'état fondamental et de l'état excité

$$N = N_0 + N_{\text{exc}} \quad N_0 = \frac{z}{1-z} \quad \text{On prend } \varepsilon_{\text{min}} = \varepsilon_0 = 0$$

$$N_{\text{exc}} = \sum_{\lambda \neq 0} N_{\lambda} = \sum_{\lambda \neq 0} g_{\lambda} \frac{z}{e^{\beta \varepsilon_{\lambda}} - z} \quad g_{\lambda} : \text{dégénérescence du niveau } \lambda$$

Comme z varie de 0 à 1, on a, pour $n \neq 0$:

$$\frac{z}{e^{\beta \varepsilon_n} - z} < \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_n} - 1}$$

de sorte que :

$$N_{\text{exc}} < N_{\text{sat}} \quad \text{où} \quad N_{\text{sat}} = \sum_{n \neq 0} g_n \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_n} - 1}$$

En remplaçant la somme discrète qui apparaît dans N_{sat} par une intégrale, on obtient, pour un oscillateur isotrope:

$$N_{\text{sat}} \simeq 1.202 \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3$$

Phénomène de condensation

Pour T suffisamment grand, N_{sat} , qui varie comme T^3 , est grand devant N . Les populations des niveaux excités sont loin de leur valeur à saturation. On a $z \ll 1$ et la statistique se confond avec celle de Boltzmann : $N_n \simeq g_n z \exp(-\beta \varepsilon_n)$

Diminuons T jusqu'à atteindre une valeur T_C telle que :

$$N_{\text{sat}}(T = T_C) = 1.202 (k_B T_C / \hbar \omega)^3 = N$$

Quand $T < T_C$, on en déduit que :

$$N_{\text{sat}}(T < T_C) < N$$

Même saturée, la population globale des états excités n'arrive plus à accommoder la population globale N . L'excédent $N - N_{\text{sat}}(T)$ se retrouve donc nécessairement condensé dans l'état fondamental dont la population devient une proportion croissante de N au fur et à mesure que T décroît

Proportion d'atomes condensés

Au voisinage de T_C , et pour $T < T_C$, la population globale est pratiquement saturée, et on peut donc écrire :

$$N = N_0 + N_{\text{sat}}(T)$$

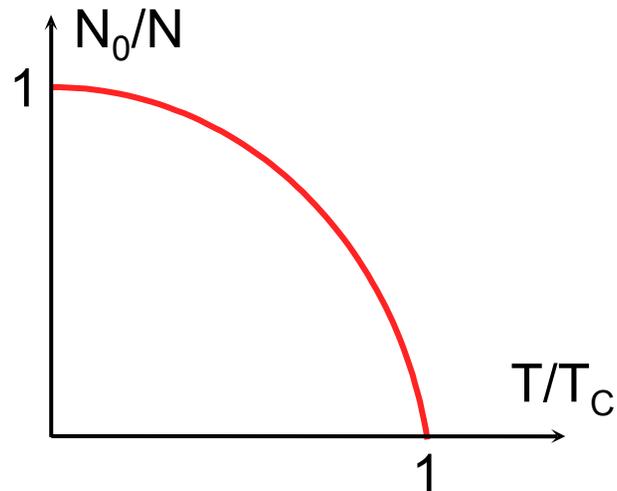
Par ailleurs, par définition même de T_C , $N = N_{\text{sat}}(T_C)$

De plus, comme $N_{\text{sat}}(T) \propto T^3$,

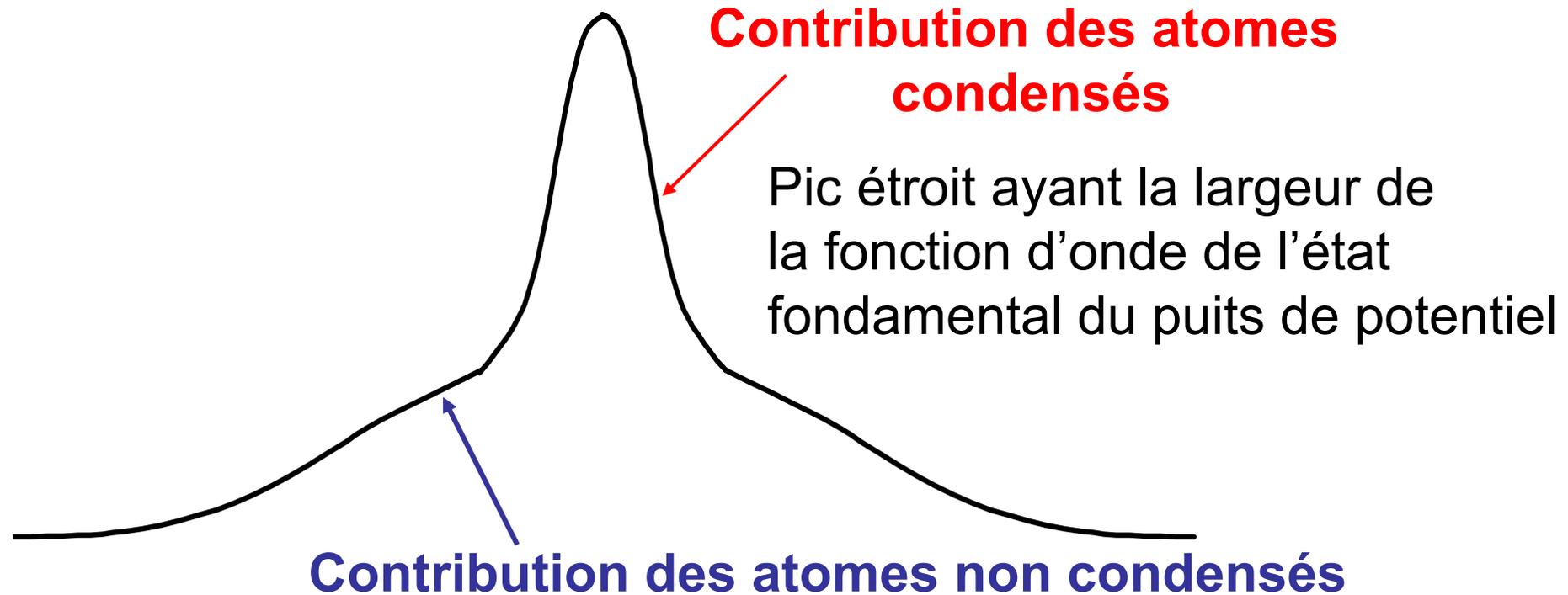
$$N_{\text{sat}}(T) = N_{\text{sat}}(T_C) \left(T / T_C \right)^3 = N \left(T / T_C \right)^3$$

On en déduit que $N = N_0 + N \left(T / T_C \right)^3$ et donc que :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^3$$



Structure bimodale de la distribution spatiale des bosons



Piédestal large provenant du nuage d'atomes non condensés qui sont répartis dans les états excités du puits décrits par des fonctions d'onde plus larges que celle de l'état fondamental

Phénomène de condensation

Interprétation ondulatoire

La température critique T_C correspond à une situation où la longueur d'onde de de Broglie, qui augmente quand la température diminue, devient de l'ordre de la distance moyenne entre atomes. Les paquets d'ondes des divers atomes commencent alors à se recouvrir et à interférer. Plus précisément, on peut montrer à partir de l'expression de T_C que:

$$n_0(T = T_C) [\lambda_{dB}(T = T_C)]^3 = 2.612$$

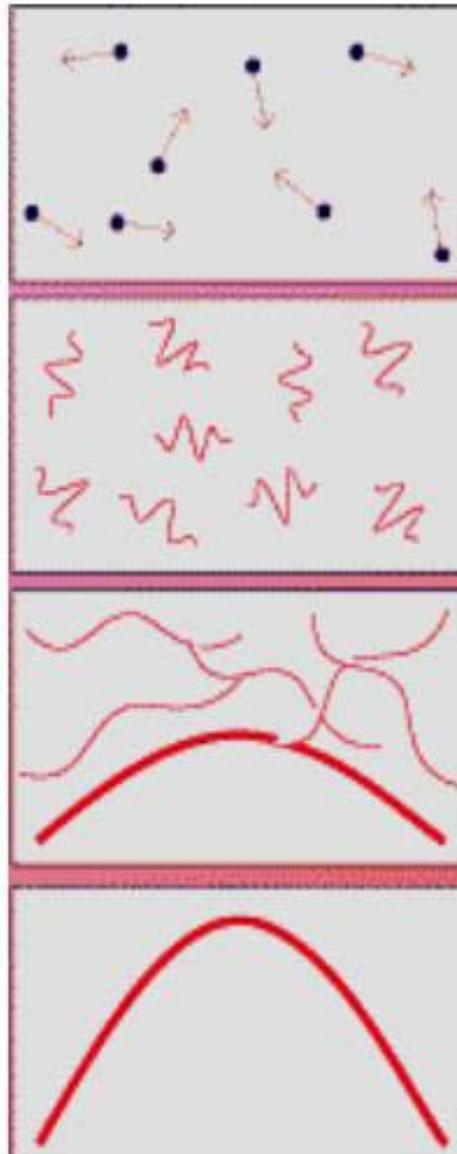
où $n_0(T=T_C)$ est la densité spatiale au centre du piège pour $T=T_C$ et où:

$$\lambda_{dB}(T = T_C) = \sqrt{\frac{\pi \hbar^2}{2mk_B T_C}}$$

La même relation entre n_0 et λ_{dB} demeure valable pour des bosons dans une boîte, la densité spatiale étant alors uniforme.

Allure des ondes associées aux atomes piégés

Evolution de ces ondes quand T décroît d'une valeur très supérieure à T_C à une valeur très inférieure



$$T \gg T_C$$

$$T > T_C$$

$$T \simeq T_C$$

$$T \ll T_C$$

W. Ketterle

Longueurs caractéristiques

Les divers régimes

Longueurs caractéristiques

r_0 : Portée du potentiel d'interaction $V(r)$ entre 2 atomes.

d : Distance moyenne entre atomes ($d=n^{-1/3}$ où n est la densité spatiale)

λ_{dB} : Longueur d'onde de de Broglie

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{\pi \hbar^2}{2m k_B T}}$$

Régime : $\lambda_{dB} \ll r_0 \ll d$

Gaz classique.

Aussi bien les collisions entre atomes que les populations d'équilibre des niveaux d'énergie peuvent être décrites classiquement.

Régime : $r_0 \ll \lambda_{dB} \ll d$

Les populations d'équilibre des niveaux d'énergie obéissent toujours à la statistique de Maxwell Boltzmann. Le gaz est non dégénéré puisque $\lambda_{dB} < d$.

Par contre, les collisions entre atomes identiques sont affectées par la statistique quantique puisque $r_0 < \lambda_{dB}$.

Gaz classique avec propriétés de transport quantiques.

Régime : $r_0 \ll d \ll \lambda_{dB}$

Gaz quantique dégénéré puisque $\lambda_{dB} > d$. La statistique classique de Maxwell Boltzmann n'est plus valable.

Les collisions ne peuvent toujours pas être décrites classiquement puisque $r_0 < \lambda_{dB}$.

Le gaz reste dilué puisque $r_0 < d$.

BREF HISTORIQUE

Transport quantique dans un gaz de fermions polarisés

2 fermions identiques polarisés ne peuvent pas être au même point de l'espace (principe de Pauli).

Ils ne peuvent donc pas entrer en collision dans l'onde s ($l=0$).

Dans l'onde p ($l=1$), leur distance minimale d'approche est de l'ordre de λ_{dB} . Si $\lambda_{dB} \gg r_0$, les 2 fermions ne ressentent plus leur interaction $V(r)$ et le gaz se comporte comme un gaz parfait.

Modification des propriétés de transport (conductivité thermique, viscosité), ondes de spin...

C. Lhuillier, F. Laloë

J. de Physique, 40, 239 (1979)

J. de Physique, 43, 127 and 225 (1982)

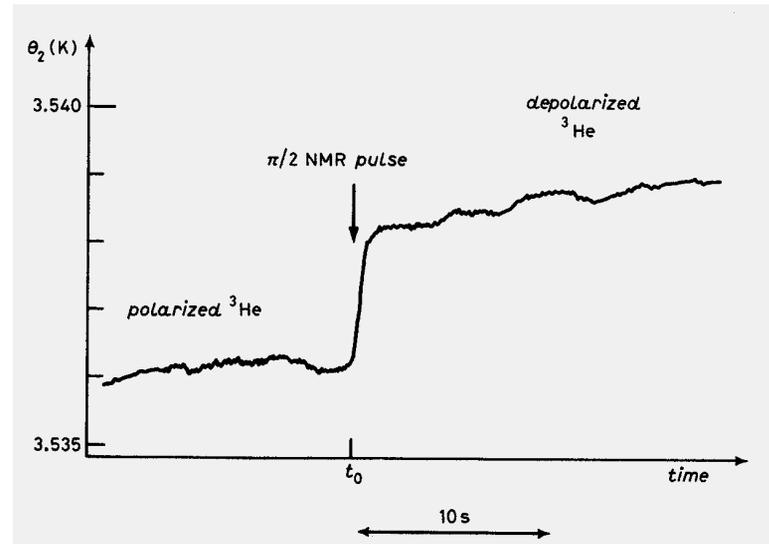
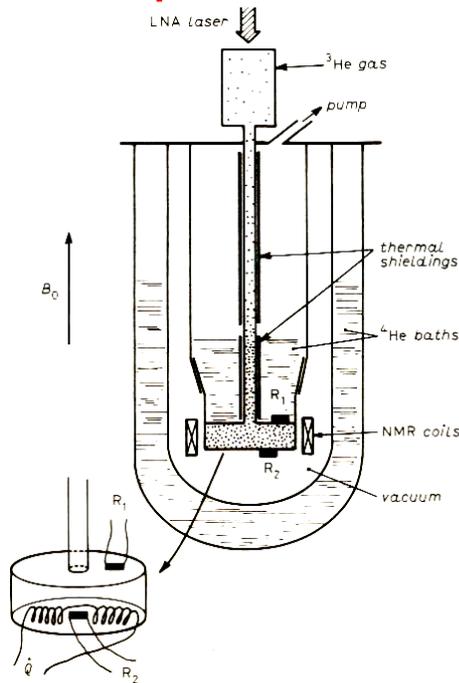
Série de colloques « SPOQS » (Spin Polarized Quantum Systems)

Transport quantique dans He³ polarisé

Intérêt de He³ polarisé: faible masse, possibilité de refroidissement cryogénique → grandes valeurs de λ_{dB} .

Exemple de résultat expérimental

Modification de la conductivité thermique d'un gaz de He³ quand on le polarise



M. Leduc, P-J. Nacher, D. Betts, J. Daniels, G. Tastevin, F. Laloë
Europhys. Lett. 4, 59 (1987)

La recherche d'effets de dégénérescence quantique sur un système gazeux- Bref historique

Pourquoi est-ce un défi?

Les effets de dégénérescence apparaissent quand λ_{dB} devient de l'ordre de la distance d entre particules.

Pour les valeurs de d correspondant à un gaz, la température T requise pour réaliser λ_{dB} de l'ordre de d est si basse que le système est à l'état liquide ou solide.

C'est pourquoi le phénomène de condensation d'un gaz parfait de bosons identiques, prévu par Einstein en 1924, a longtemps été considéré comme purement académique.

London suggère en 1938 que la transition superfluide de He4 à 2.17 K pourrait être reliée à une condensation de Bose-Einstein, mais le système est loin d'être un gaz parfait!

Voir la conférence de S. Balibar au séminaire Poincaré sur la condensation de Bose-Einstein.

Site WEB : www.lpthe.jussieu.fr/poincare

Le renouveau d'intérêt sur ces sujets (au milieu des années 1970)

W. Stwalley et L. Nosanow (P.R.L. 36, 910, 1976) soulignent que l'hydrogène polarisé doit rester gazeux à toute température et que la température de condensation de Bose-Einstein est accessible par des méthodes cryogéniques.

Intérêt scientifique d'un tel système

- Les interactions entre atomes sont faibles dans un gaz. Elles sont bien connues, surtout pour H, et leur effet peut être calculé de manière précise.
- La superfluidité n'avait jamais été observée dans un gaz.
- Retombées technologiques possibles (maser H)

Démarrage de nombreuses recherches théoriques et expérimentales sur l'hydrogène polarisé.

Équipes de D. Kleppner et T. Greytak à MIT, de I. Silvera et J. Walraven à Amsterdam, de Y. Kagan à Moscou...

Les avantages de l'hydrogène

- Masse la plus faible (λ_{dB} varie comme $m^{-1/2}$)
- Reste gazeux à toute température
- Entièrement calculable
- Facile à polariser dans un champ magnétique réalisable

Les difficultés

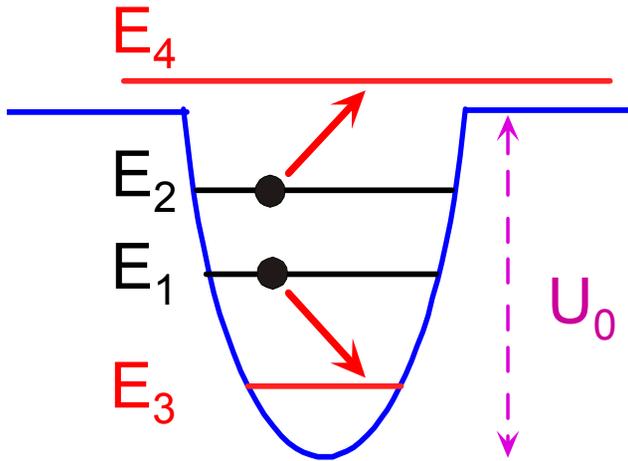
- La raie de résonance de l'hydrogéné ($Ly \alpha$) tombe dans l'ultra violet et les sources laser à ces fréquences ne sont pas faciles à réaliser
- Les limites Doppler (4 mK) et de recul (400 μ K) du refroidissement laser sont élevées.
- La détection optique des atomes n'est facile. Pas de diagnostic simple pour détecter la condensation.
- Il faut éviter la formation de molécules par basculement de spin d'un atome, ou par collisions à 3 corps en phase gazeuse ou dans la phase adsorbée dans le film d'hélium liquide sur la surface des parois.

Les diverses stratégies suivies pour condenser l'hydrogène

- 1 – Augmentation de la pression à température constante
(De l'ordre de 0.1 K sur la paroi recouvert d'hélium)
Les pertes dues aux collisions à 3 corps en volume ou sur la surface sont trop élevées et ne permettent pas d'atteindre la densité critique.
- 2 – Diminution de la température à une pression suffisamment faible pour réduire les pertes
Invention du refroidissement évaporatif qui va se révéler crucial pour toutes les expériences de condensation.
Hess, Phys. Rev. B34, 3476 (1986)
Parallèlement à ce progrès, les atomes sont piégés magnétiquement pour éviter tout contact avec les parois.

Voir Cours au Collège de France 1996-97

Redroissement évaporatif



Atomes piégés dans un puits de potentiel de profondeur finie U_0

2 atomes d'énergies E_1 et E_2 subissent une collision élastique

A l'issue de la collision, les 2 atomes ont de énergies E_3 et E_4 , avec

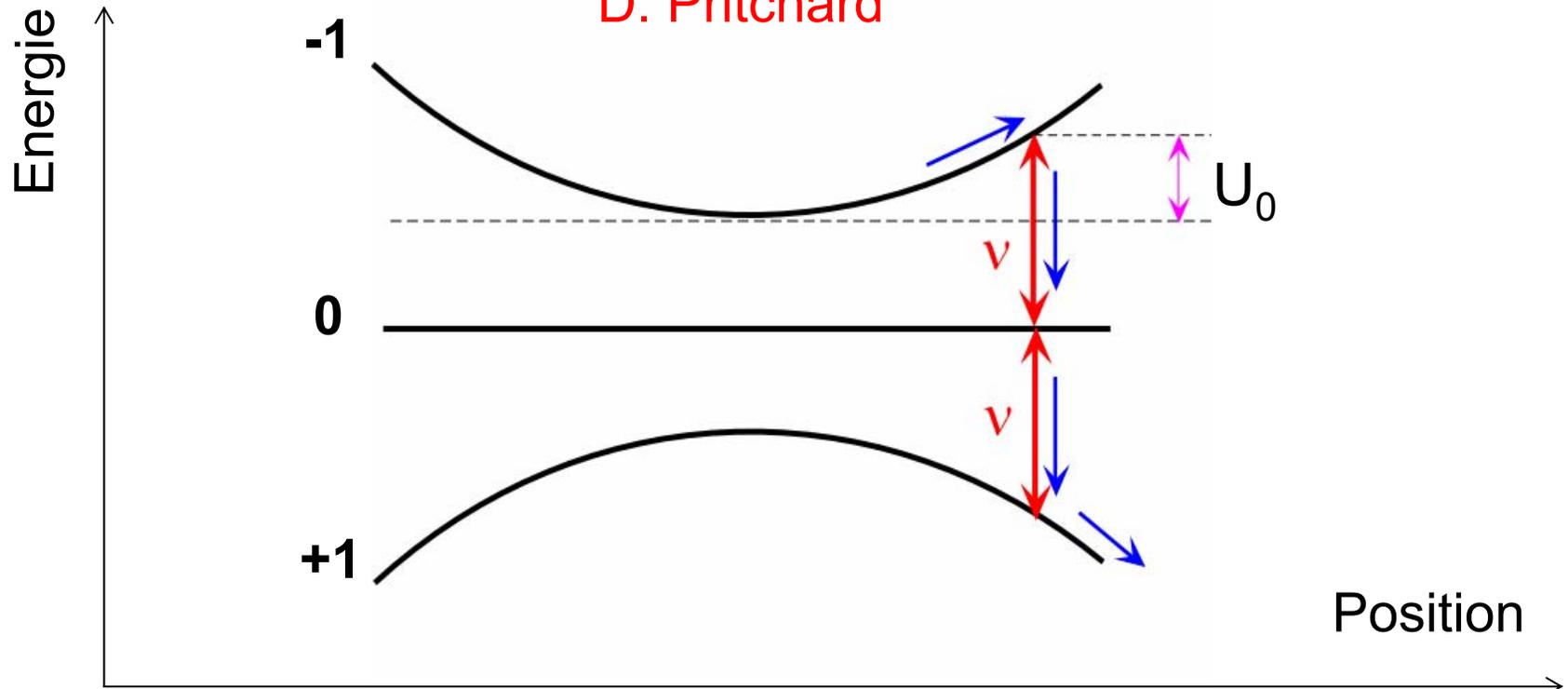
$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

Si $E_4 > U_0$, l'atome d'énergie E_4 s'échappe du puits

L'autre atome a une énergie E_3 plus basse. Après rethermalisation des atomes restant piégés, la température de l'ensemble diminue

Evaporation forcée

D. Pritchard



La profondeur U_0 du puits doit être diminuée quand la température décroît de manière à garder une évaporation efficace.

L'atome est transféré par un champ RF dans un état non piégeant quand son énergie potentielle atteint une valeur U_0 qui dépend de la fréquence ν du champ RF et qui peut donc être diminuée à volonté.

Les avantages des alcalins

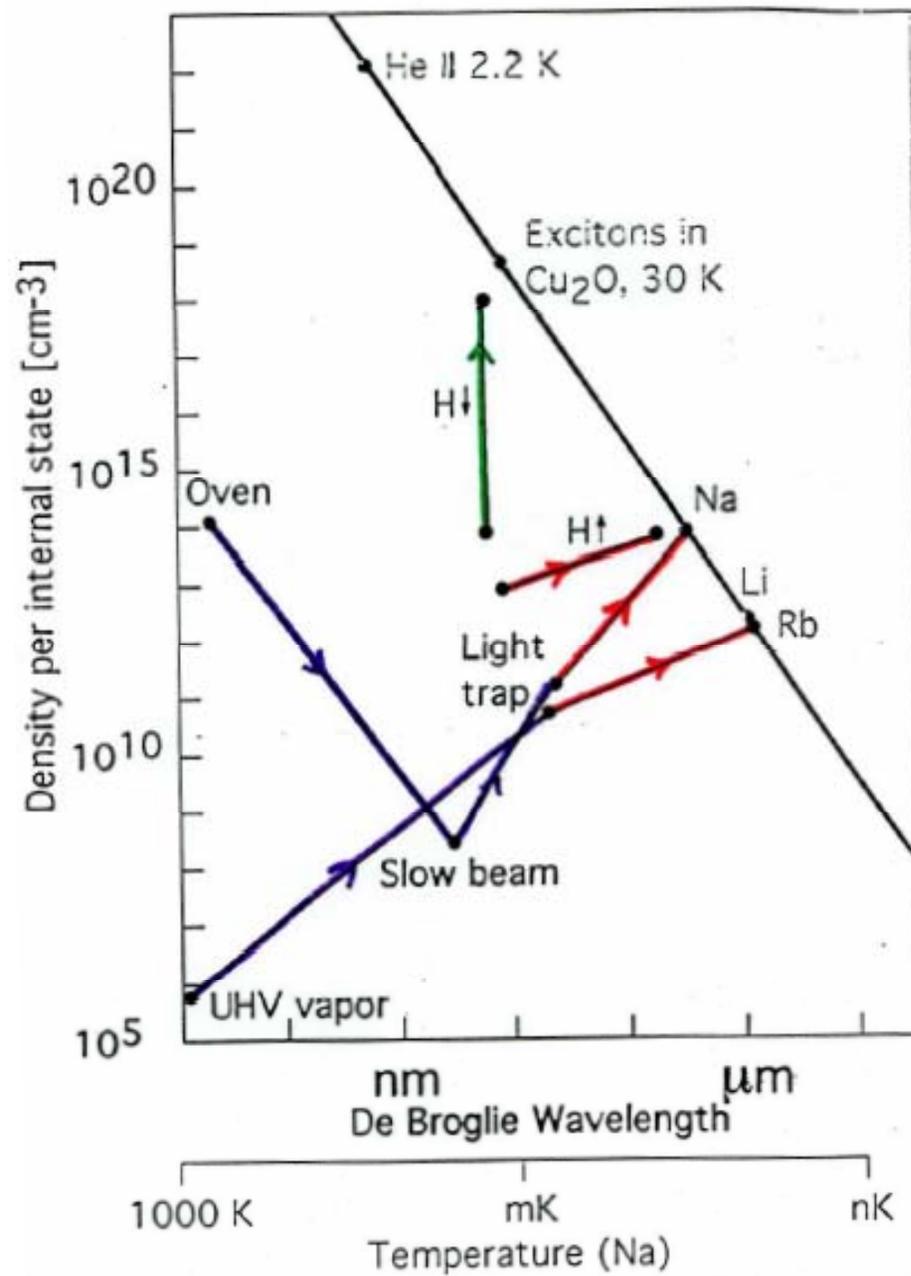
- Faciles à refroidir et à piéger avec des lasers.
Températures atteintes de l'ordre de quelques 10^{-6} K.
- Faciles à détecter optiquement

Les difficultés

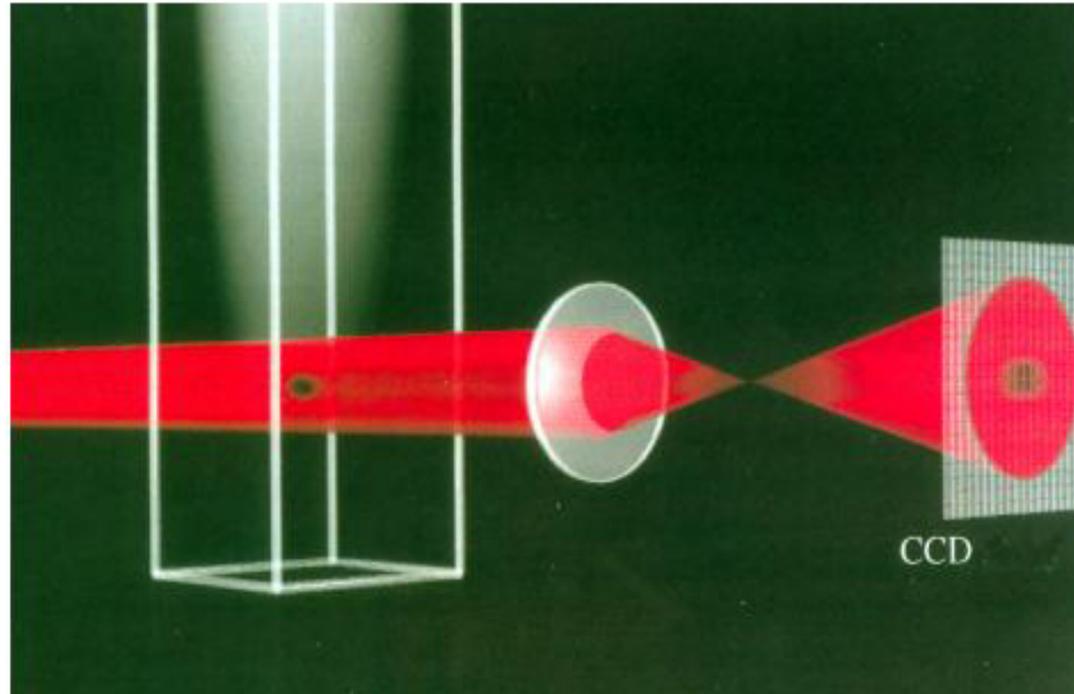
- Le condensat n'est pas l'état d'équilibre thermodynamique.
- Il faut donc éviter les collisions à 3 corps susceptibles de former des molécules et de conduire le système vers le vrai état d'équilibre qui est un solide.
- Les collisions élastiques à 2 corps doivent cependant être efficaces pour assurer une thermalisation efficace et permettre le refroidissement évaporatif.

Le condensat est un état métastable qui doit avoir une durée de vie suffisamment longue pour pouvoir être étudié et un temps de thermalisation suffisamment court.

Ce sont finalement les alcalins qui sont les premiers atomes à être condensés en 1995 à Boulder et au MIT.

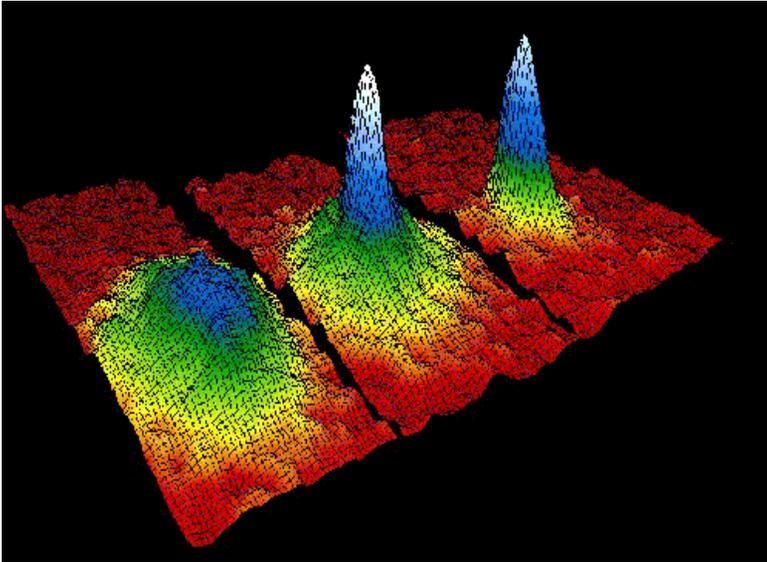


Visualisation du nuage atomique



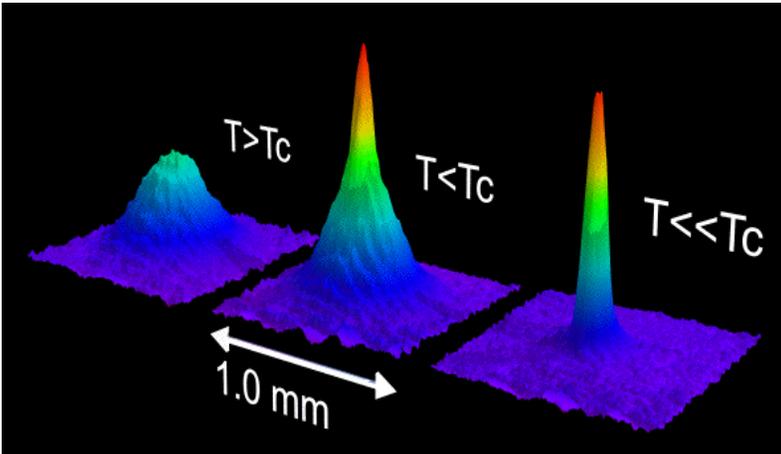
Dépendance spatiale de l'absorption
d'un faisceau laser sonde par le nuage

JILA



Science, 269, 198 (1995)

MIT



Phys. Rev. Lett. 75, 3969 (1995)

^{87}Rb

Boulder

^{23}Na

MIT

^7Li

Rice

^1H

MIT

$^4\text{He}^*$

Orsay, LKB

^{41}K

Florence

^{133}Cs

Innsbruck

^{174}Yb

Kyoto

DESCRIPTION DES INTERACTIONS

Description des interactions

Le gaz de bosons piégés n'est pas parfait. Les atomes interagissent lors de collisions. Le gaz est supposé dilué:

$$n r_0^3 \ll 1 \quad n : \text{densité spatiale} \quad r_0 : \text{portée des interactions}$$

Si le gaz est suffisamment dilué, les collisions à 3 corps sont négligeables devant les collisions élastiques à 2 corps (on suppose en plus que les collisions inélastiques à 2 corps négligeables).

Les atomes passent la plus grande partie de leur temps éloignés les uns des autres. Leurs interactions dépendent donc essentiellement de la forme asymptotique des états stationnaires de collision:

$$\psi(r) \underset{r \gg r_0}{\simeq} e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad f(\theta): \text{amplitude de diffusion}$$

À basse température, plus précisément si:

$$r_0 \ll \lambda_{dB} \quad \Leftrightarrow \quad k r_0 \ll 1$$

les collisions élastiques ont lieu dans l'onde s ($l=0$). Les interactions ne dépendent que de l'amplitude de diffusion isotrope f_0 dans l'onde s.

Amplitude de diffusion dans l'onde s. Longueur de diffusion

On peut montrer (voir références) que :

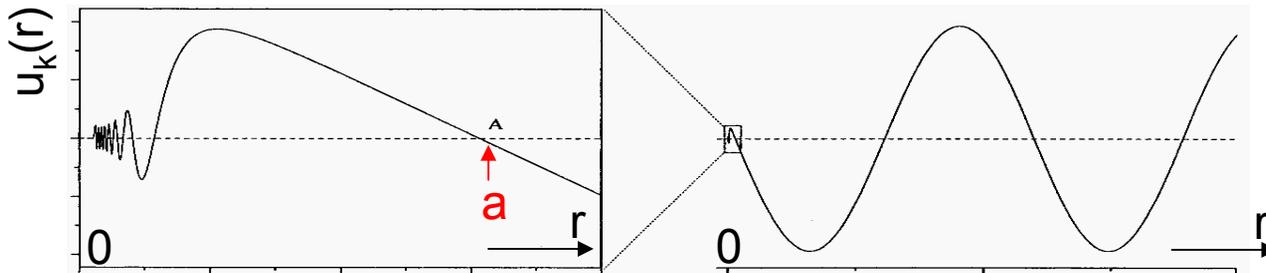
$$f_0 \simeq -\frac{a}{1+ika} \simeq -a \quad \text{si } ka \ll 1 \quad \sigma_{\text{tot}} = 8\pi \frac{a^2}{1+k^2a^2} \simeq 8\pi a^2 \quad \text{si } ka \ll 1$$

où a est un nombre réel, appelé longueur de diffusion.

Un seul paramètre, a , permet donc de caractériser les effets des interactions sur les propriétés physiques du condensat

Interprétation graphique de a

La fonction d'onde radiale dans l'onde s s'écrit $u_k(r)/r$. Pour $r \gg r_0$, $u_k(r)$ est une sinusoïde. a est l'abscisse du premier zéro de cette sinusoïde.

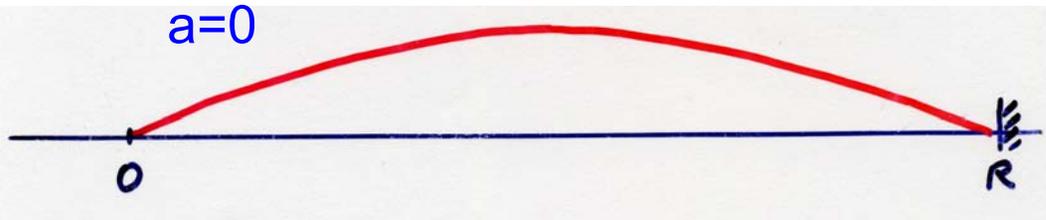


Références

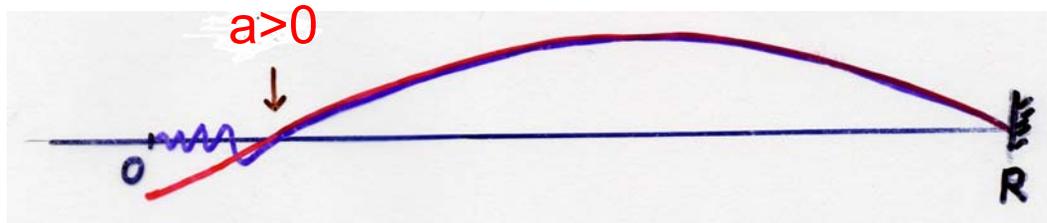
- Cours au Collège de France 1998-99
- J. Dalibard, in Proceedings of Enrico Fermi School, Course CXL, (eds M. Inguscio, S. Stringari, C. Wieman) IOS Press (Amsterdam 1999) p. 321.

Lien entre le signe de a et le caractère attractif ou répulsif des interactions effectives

En l'absence d'interactions, le spectre de la particule relative est celui d'une particule libre qu'il est commode de discrétiser en enfermant la particule dans une boîte sphérique de rayon R .

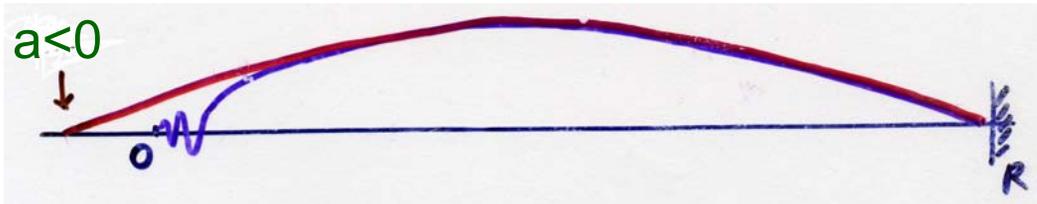


État fondamental : $\lambda/2 = R$
 $k = 2\pi/\lambda = \pi/R$ $E_0 = \hbar^2 k^2 / 2\mu$



Interactions avec $a > 0$

En dehors de la zone d'action de $V(r)$, l'énergie est purement cinétique. λ diminue, donc k et E_0 augmentent

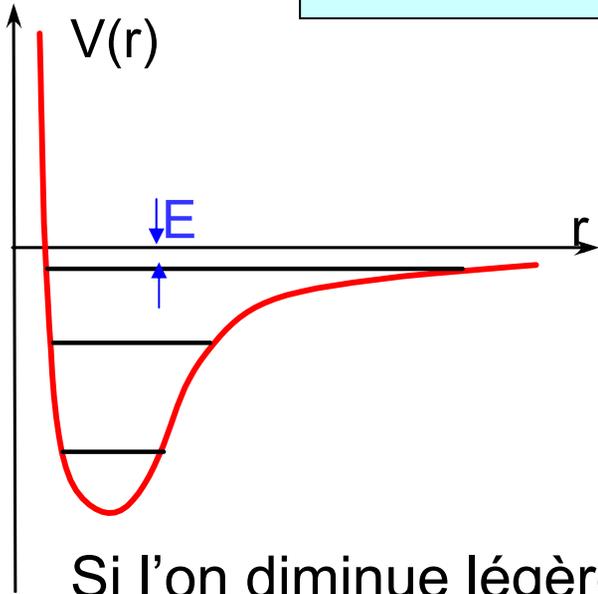


Interactions avec $a < 0$

λ augmente, donc k et E_0 diminuent

Même si le potentiel $V(r)$ est toujours attractif, les interactions effectives (à grande distance) entre atomes peuvent être répulsives si $a > 0$, attractives si $a < 0$, ou nulles si $a = 0$.

Cas où le potentiel $V(r)$ admet un état lié d'énergie de liaison E très faible



Posons : $E = -\hbar^2 \kappa^2 / 2\mu$ $\kappa \ll 1/r_0$

On peut montrer que a est alors très grand et positif:

$$a \approx 1/\kappa \gg r_0$$

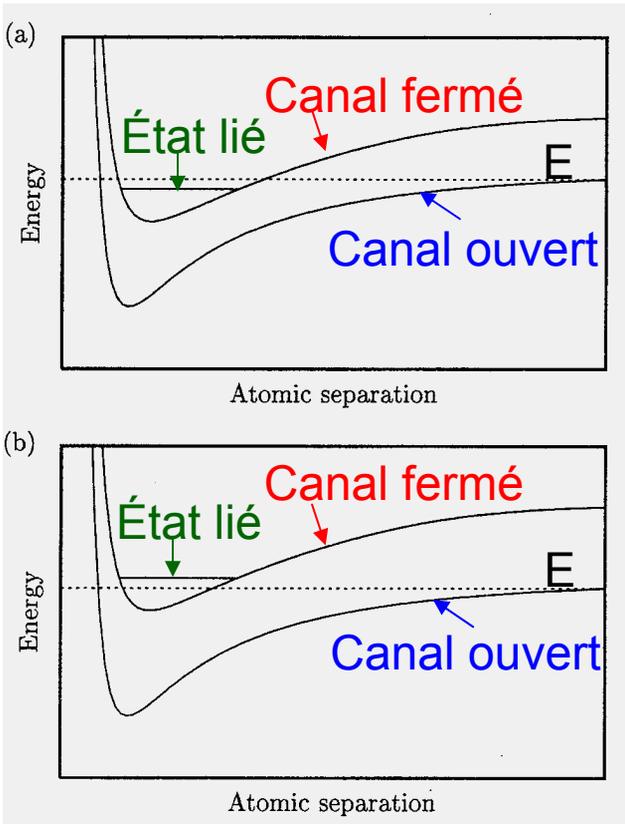
et que l'extension spatiale de l'état lié est de l'ordre de a

Si l'on diminue légèrement la profondeur du puits, E diminue et s'annule. L'état lié disparaît et passe en quelque sorte dans le continuum pour donner naissance à une résonance de diffusion à une énergie positive très petite. a est alors négatif et très grand

Quand a est très grand ($a \gg r_0$), on peut avoir ka de l'ordre de 1, tout en ayant kr_0 très petit. Il faut alors utiliser l'expression $8\pi a^2/(1+k^2a^2)$ de la section efficace totale σ_{tot} , révélant une résonance à énergie nulle. Si $ka > 1$, σ_{tot} tend vers $8\pi/k^2$ (limite unitaire).

Résonances de Feshbach

La particule relative incidente a une énergie $E > 0$. Elle appartient à un canal dit « ouvert ». L'énergie E peut être très proche de celle d'un état lié appartenant à un canal dit « fermé ». Le couplage entre les 2 canaux, dus à des interactions négligées dans la définition des canaux, donne naissance à des variations résonnantes de la longueur de diffusion a , quand on balaie, au moyen par exemple d'un champ magnétique, la différence entre E et l'énergie de l'état lié.



Si l'énergie de l'état lié est très proche de E et inférieure à E , a est positif et très grand.

Si l'énergie de l'état lié est très proche de E et supérieure à E , a est négatif et très grand en valeur absolue.

Si l'énergie de l'état lié est égale à E , a est infini.

Il est donc possible de manipuler les interactions entre atomes (ne dépendant que de a) en balayant un champ magnétique.

Pseudopotentiel

Dans les théories de champ moyen et à l'ordre le plus bas en V (approximation de Born), on peut remplacer le vrai potentiel $V(r)$ par un potentiel d'expression mathématique plus simple conduisant à la même longueur de diffusion a que $V(r)$.

Il est commode alors d'utiliser un potentiel en fonction delta:

$$V_{\text{pseudo}} = g \delta(r)$$

Où la constante de couplage g est déterminée en égalant à a la longueur de diffusion associée à V_{pseudo} .

$$g = \frac{4\pi \hbar^2}{m} a$$

Le pseudopotentiel $g \delta(r)$ conduit à des expressions divergentes au-delà de l'approximation de Born. Pour éviter ces divergences, on utilise aussi parfois un autre pseudopotentiel conduisant à la même longueur de diffusion a et à la bonne valeur de f_0 (voir références)

$$V_{\text{pseudo}} = g \delta(r) \frac{\partial}{\partial r} r$$

EQUATION DE GROSS PITAEVSKII

Equation de Gross Pitaevskii

Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} g \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Calcul variationnel de l'état fondamental de H

Famille variationnelle d'états où les N bosons sont tous dans le même état φ . Le meilleur état φ est celui qui minimise $\langle H \rangle$

$$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle |\varphi(2)\rangle \dots |\varphi(i)\rangle \dots |\varphi(N)\rangle \quad \langle H \rangle = E(\varphi) = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

Résultat du calcul variationnel

$$-\left(\hbar^2 / 2m\right) \Delta \varphi(\vec{r}) + V_{\text{ext}}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) + (N-1) g |\varphi(\vec{r})|^2 \varphi(\vec{r}) = \mu \varphi(\vec{r})$$

$$\varphi(\vec{r}) \text{ normé : } \int d^3 r |\varphi(\vec{r})|^2 = 1 \quad \mu : \text{potentiel chimique}$$

Equation non linéaire décrivant comment chaque boson se déplace dans le potentiel extérieur de piégeage et dans le champ moyen créé par les N-1 autres bosons

Equation de Gross Pitaevskii (suite)

Limite de Thomas Fermi

L'équation précédente (équation de G.P. indépendante du temps) permet d'étudier la forme spatiale du condensat. Quand la densité est suffisamment élevée, on peut montrer que le terme d'énergie cinétique en $\Delta\varphi$ peut être négligé, ce qui conduit alors à une équation algébrique pour la densité spatiale n :

$$n(\vec{r}) = N |\varphi(\vec{r})|^2 \simeq [\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})] / g$$

Forme de paraboloïde inversé si V_{ext} est harmonique.

Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps

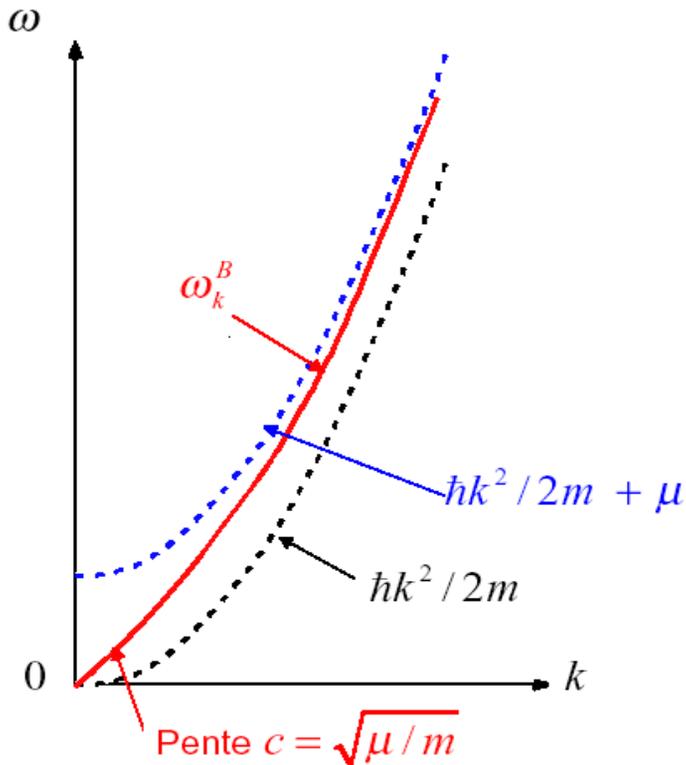
$$i \hbar \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}, t) + V_{\text{ext}}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}, t) + (N-1) g |\varphi(\vec{r}, t)|^2 \varphi(\vec{r}, t)$$

Étude au moyen de cette équation de divers phénomènes physiques

- Expansion balistique du condensat quand V_{ext} est coupé.
- Modes propres de vibration du condensat.
- Excitations élémentaires.

Voir cours au Collège de France 1998-99

Excitations élémentaires d'un condensat homogène



Étude par la transformation de Bogolubov (voir cours 1998-99)

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\hbar\omega_k^0(\hbar\omega_k^0 + \mu)}$$

ω_k^B : fréquence de l'excitation de vecteur d'onde k

$$\hbar\omega_k^0 = \hbar^2 k^2 / 2m$$

$\mu = gn =$ potentiel chimique

c : vitesse du son

La variation linéaire de ω avec k au voisinage de $k=0$ et la concavité de la courbe sont à l'origine du phénomène de superfluidité (explication de Landau). Une particule sonde se déplaçant dans le fluide avec une vitesse $v < c$ ne peut pas créer une excitation élémentaire en satisfaisant la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

Autre forme équivalente de l'équation de Gross Pitaevskii

Posons :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)} \exp[iS(\vec{r}, t)]$$

$n(\vec{r}, t)$: densité spatiale $S(\vec{r}, t)$: phase

L'équation de continuité pour n permet d'introduire un champ de vitesses :

$$\vec{v}(r, t) = (\hbar / m) \vec{\nabla} S(\vec{r}, t)$$

En reportant l'expression de φ en fonction de n et de S dans l'équation de G.P., et en négligeant un terme de « pression quantique », petit devant les autres à la limite des densités élevées, on obtient 2 équations pour la densité spatiale et le champ de vitesses analogues aux équations hydrodynamiques irrotationnelles d'un superfluide (équation de continuité + équation d'Euler)

$$\partial n(\vec{r}, t) / \partial t + \vec{\nabla} \cdot [n(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)] = 0$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V_{\text{ext}} + g n \right) = 0$$

Equations à la base de nombreux travaux théoriques.

GAZ DE FERMİ DÉGÉNÉRÉS

Le refroidissement sympathique

Comme pour les bosons, le refroidissement laser seul ne permet pas d'atteindre le régime de dégénérescence quantique $T < T_F$.

Le refroidissement évaporatif est inefficace pour les fermions dans un piège magnétique qui sont polarisés et ne peuvent donc pas entrer en collision dans l'onde s. Leur distance minimale d'approche, de l'ordre de λ_{dB} , est très grande devant la portée r_0 du potentiel et les collisions élastiques essentielles pour l'évaporation ont une section efficace négligeable.

La solution à ce problème consiste à mélanger des espèces différentes dans le piège: bosons et fermions. Les bosons peuvent être refroidis par évaporation. Les collisions élastiques entre bosons ultrafroids et fermions refroidissent les fermions (refroidissement dit « sympathique »).

Une autre solution consiste à mélanger des fermions dans des états de spin différents de manière à avoir des collisions élastiques importantes.

Un autre intérêt des mélanges bosons-fermions

La détermination de la température est plus facile sur les bosons par étude de la distribution de vitesses du nuage thermique (par temps de vol)

Si les 2 espèces, bosons et fermions, sont en équilibre thermique, on en déduit la température des fermions.

Même si les bosons et fermions sont 2 isotopes différents du même élément (par exemple Li^7 et Li^6), le déplacement isotopique de la raie de résonance optique permet d'imager séparément le nuage de bosons et le nuage de fermions.

L'entrée dans le régime de dégénérescence quantique est moins spectaculaire pour les gaz fermioniques que pour les gaz bosoniques car il ne se traduit pas par une condensation (dans l'espace des positions ou dans celui des vitesses).