

Cours 4

PERTURBATIONS LIÉES AUX INTERACTIONS ATOME - CHAMP HAUTE FRÉQUENCE

Problèmes étudiés

Dans le cours précédent, l'atome est supposé interagir avec un champ dont la fréquence ω est proche de celle d'une transition $f \leftrightarrow e$. On peut alors ne considérer que ces 2 niveaux et ignorer toutes les autres transitions.

On suppose maintenant que l'atome interagit avec un champ dont la fréquence ω est grande devant toutes les fréquences atomiques ω_{ij} .

$$\omega \gg \omega_{ij}$$

Des développements en puissances de ω_{ij}/ω peuvent alors être faits et conduisent à des expressions ayant une interprétation physique simple.

Plan

1 – Spin 1/2 couplé à un champ RF haute fréquence

Fréquence de Larmor $\omega_0 \ll$ Fréquence ω du champ

Modification du moment magnétique du spin

Interprétation physique. Observation expérimentale

2 – Électron faiblement lié couplé à un champ laser haute fréquence

Modification des propriétés dynamiques de l'électron

Interprétation physique

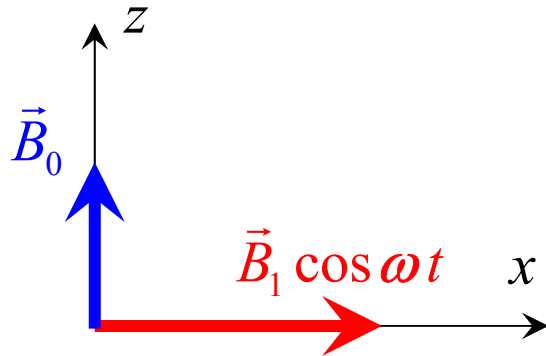
3 – Un nouvel éclairage sur les corrections radiatives

Comparaison des effets spontanés et des effets stimulés liés aux interactions avec un mode haute fréquence du champ.

Pourquoi $g - 2$ est-il positif?

SPIN $1/2$ COUPLÉ À UN CHAMP RF HAUTE FRÉQUENCE

Spin 1/2 couplé à un champ RF haute fréquence



$$\omega_0 = -\gamma B_0$$

γ : rapport gyromagnétique

ω_0 : fréquence de Larmor

$$\omega_1 = -\gamma B_1$$

Haute fréquence $\rightarrow \omega \gg \omega_0$

Hamiltonien semi-classique

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \hat{S}_z + \hbar \omega_1 \hat{S}_x \cos \omega t$$

$\hat{S}_i$: Composantes du spin ($i = x, y, z$)

Problème

Comment la précession de Larmor est-elle modifiée par l'interaction avec le champ RF?

Traitement quantique du champ RF

(voir P.I. Complément A_{VI})

Hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \hat{S}_z + \hbar \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \lambda \hat{S}_x (\hat{a} + \hat{a}^+)$$

$\hat{a}^+$ ($\hat{a}$) : crée (détruit) un photon RF

$\hat{a}^+ + \hat{a} \propto$ opérateur champ magnétique
(approximation dipolaire magnétique)

λ : constante de couplage

Si le champ RF est dans un état cohérent $\alpha e^{-i\omega t}$ avec une dispersion ΔN du nombre de photons petite devant $\langle N \rangle$, on peut remplacer les éléments de matrice de $\hat{a}$ et $\hat{a}^+$ par $\sqrt{\langle N \rangle}$ et dériver la relation suivante:

$$\lambda \langle \hat{S}_x (\hat{a} + \hat{a}^+) \rangle = \hbar \omega_1 \cos \omega t \rightarrow 2\lambda \sqrt{\langle N \rangle} = \hbar \omega_1$$

États non perturbés

Couplages induits par V

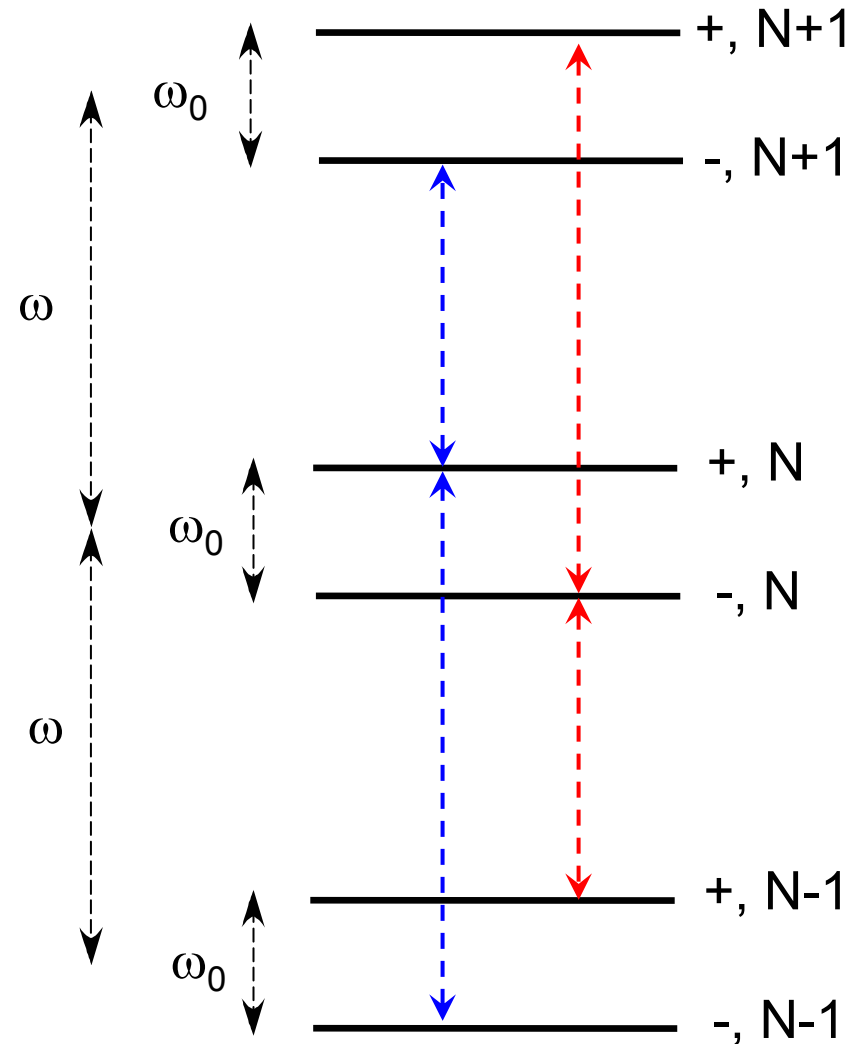
$$\begin{aligned}\hat{V} &= \lambda \hat{S}_x (\hat{a} + \hat{a}^+) \\ &= \frac{\lambda}{2} (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a} + \hat{a}^+)\end{aligned}$$

$+, N$ est couplé à
 $-, N+1$ et à $-, N-1$

$$\langle -, N \pm 1 | \hat{V} | +, N \rangle = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\langle N \rangle}$$

$-, N$ est couplé à
 $+, N+1$ et à $+, N-1$

$$\langle +, N \pm 1 | \hat{V} | -, N \rangle = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\langle N \rangle}$$



Modification de la fréquence de Larmor

Déplacement de $+, N$

$$\begin{aligned}\delta_+ &= \frac{\lambda^2}{4\hbar^2} \langle N \rangle \left[-\frac{1}{\omega - \omega_0} + \frac{1}{\omega + \omega_0} \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{4\hbar^2} \langle N \rangle \frac{-2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \simeq -\omega_0 \frac{\omega_1^2}{8\omega^2}\end{aligned}$$

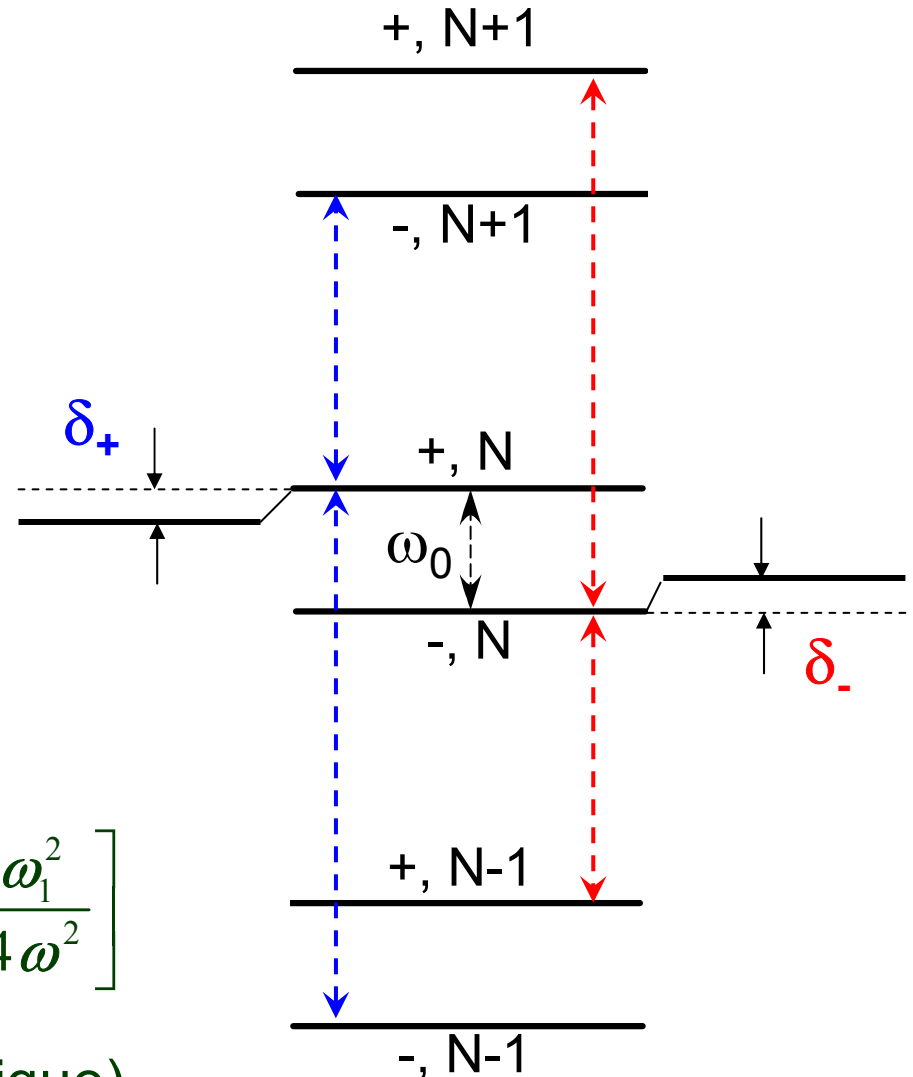
Déplacement de $-, N$

$$\begin{aligned}\delta_- &= \frac{\lambda^2}{4\hbar^2} \langle N \rangle \left[+\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{4\hbar^2} \langle N \rangle \frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \simeq +\omega_0 \frac{\omega_1^2}{8\omega^2}\end{aligned}$$

Modification de ω_0

$$\omega_0 \rightarrow \bar{\omega}_0 = \omega_0 + \delta_+ - \delta_- = \omega_0 \left[1 - \frac{\omega_1^2}{4\omega^2} \right]$$

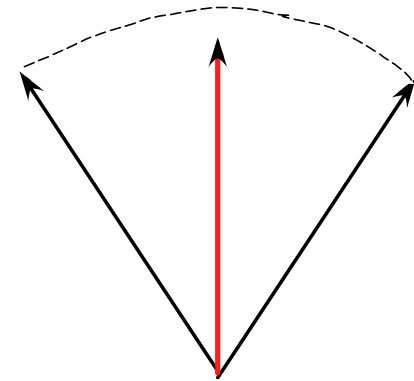
ω_0 est diminuée
(réduction du moment magnétique)



Interprétation de la diminution du moment magnétique

Le seul mouvement possible du spin est une précession. Le spin tourne en gardant la même longueur

Sous l'effet de l'interaction avec le champ RF, le spin effectue une vibration angulaire forcée à la fréquence ω



La composante statique obtenue après une moyenne sur une période $2\pi / \omega$ du champ a nécessairement une longueur plus courte.

C'est cette composante statique qui a une interaction moyenne non nulle avec le champ statique et qui a la signification d'un moment magnétique effectif.

Calcul non perturbatif

Un calcul de la modification de ω_0 à tous les ordres en ω_1/ω est possible (voir P.I., Complément A_{V1} et S. Haroche, Thèse, Paris, 1971).

On commence par prendre $\omega_0=0$. L'hamiltonien

$$\hbar \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \lambda S_x (\hat{a} + \hat{a}^+)$$

est alors diagonalisable exactement pour chaque valeur propre de S_x (hamiltonien quadratique). On traite ensuite l'effet du terme $\omega_0 J_z$ perturbativement, au premier ordre en ω_0 .

On trouve finalement le résultat suivant, valable quel que soit le moment cinétique J_f de f :

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

J_0 : Fonction de Bessel d'ordre 0.

Interprétation semi classique

Le mouvement de précession de $S_y + iS_z$ autour de B_1 obéit à l'équation:

$$\frac{d}{dt}(S_y + iS_z) = i \omega_1 \cos \omega t (S_y + iS_z)$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned} S_y + iS_z &\propto \exp \left\{ i \omega_1 \int \cos \omega t dt \right\} = \exp \left\{ i (\omega_1 / \omega) \sin \omega t \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n (\omega_1 / \omega) e^{in\omega t} \end{aligned}$$

La composante statique du mouvement de vibration angulaire du spin varie bien en $J_0(\omega_1/\omega)$.

Le facteur g du spin peut donc s'annuler sous l'effet de l'interaction avec le champ HF (pour tous les valeurs de ω_1/ω correspondant aux zéros de J_0). Il est toujours diminué car:

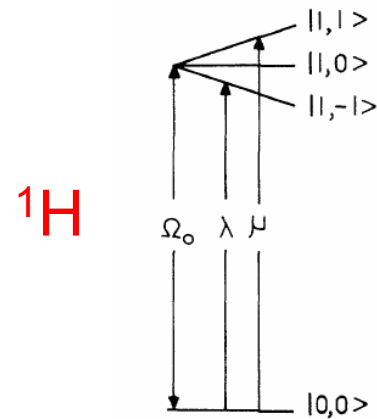
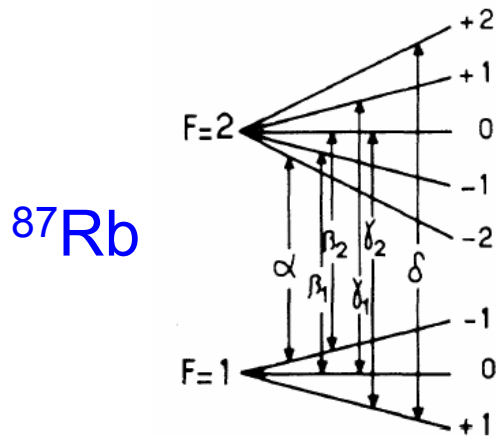
$$|J_0(\omega_1 / \omega)| \leq 1 \quad \text{quel que soit } \omega_1 / \omega$$

Observation expérimentale

Spectre Zeeman hyperfin dans l'état fondamental de ^{87}Rb et ^1H .

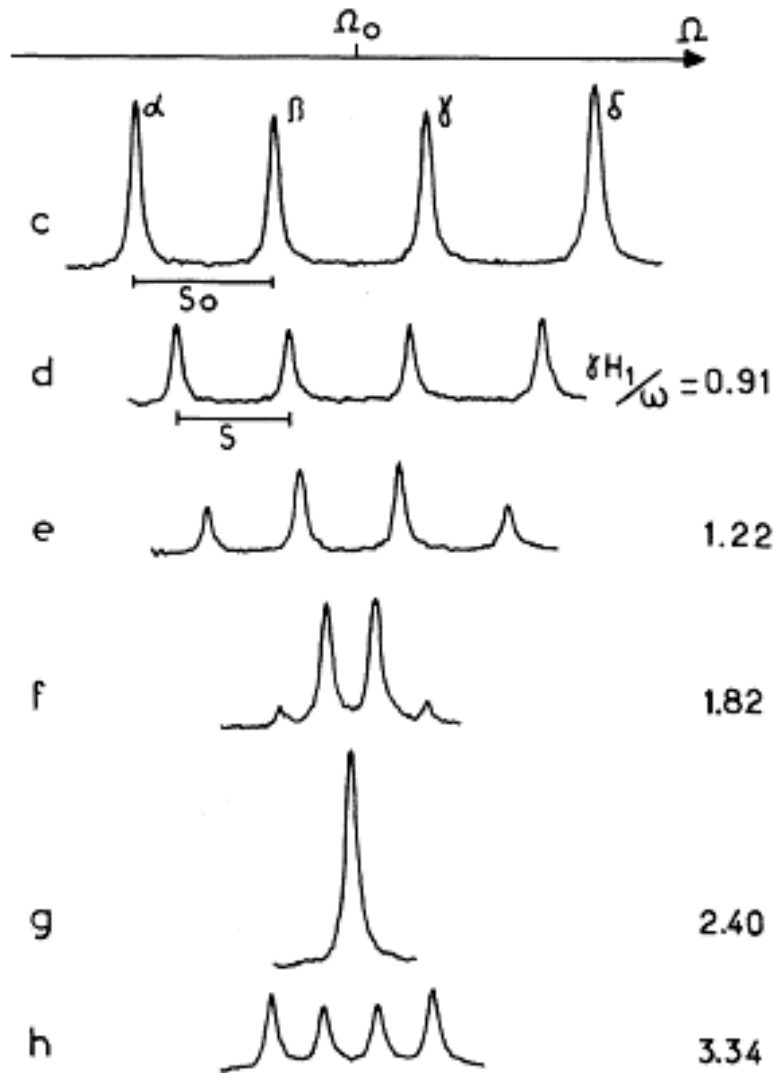
Facteurs de Landé opposés dans les niveaux hyperfins $F=1$ et $F=2$ de ^{87}Rb → 4 transitions de fréquences différentes en polarisation micro onde σ pour ^{87}Rb

2 transitions de fréquences différentes pour ^1H .

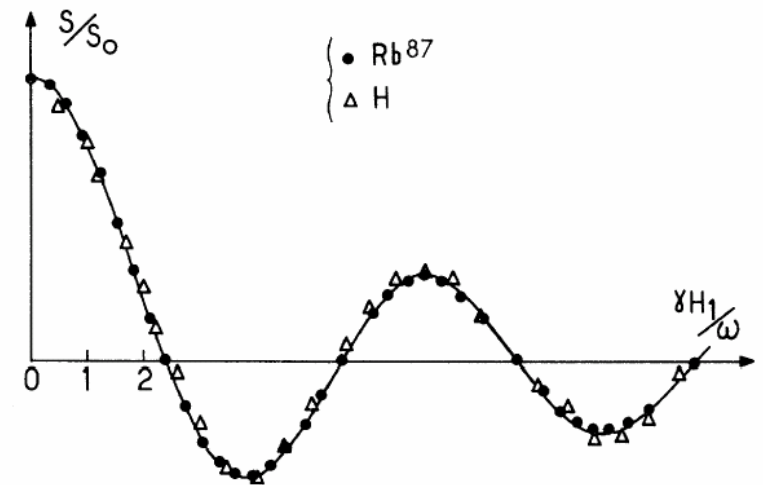


Comment sont modifiés ces spectres quand l'atome interagit avec un champ RF haute fréquence?

Résultats expérimentaux

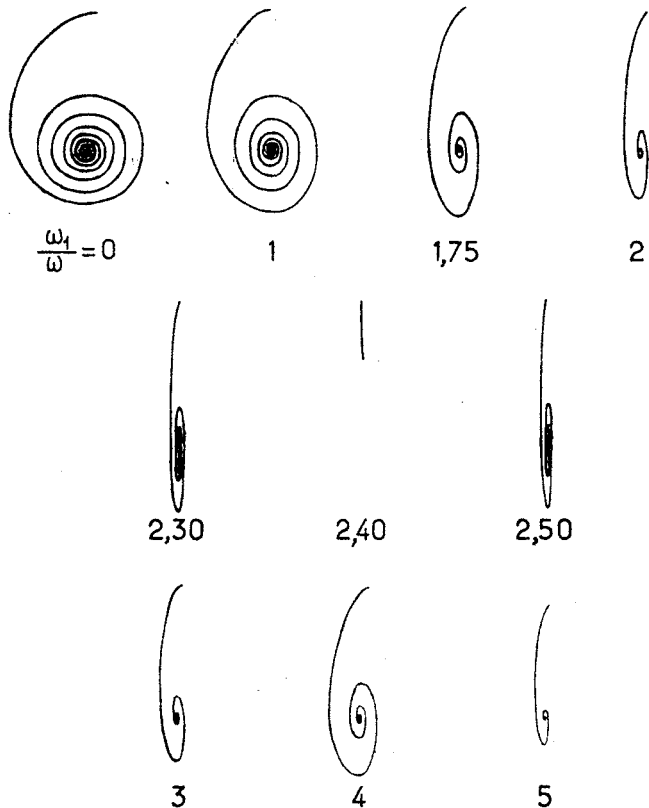


^{87}Rb



S. Haroche, C. Cohen-Tannoudji,
C. Audoin, J-P. Schermann;
Phys. Rev. Lett. 24, 861 (1970)

Observation de la précession de Larmor perturbée d'atomes ^{199}Hg



Détection de S_x et S_y au moyen de 2 faisceaux σ_+ le long des axes x et y

La précession de Larmor est anisotrope à cause de la perturbation des fonctions d'onde. S_y est réduit par un facteur $J_0(\omega_1/\omega)$ alors que S_x n'est pas modifié

C. Landré, C. Cohen-Tannoudji,
J. Dupont-Roc, S. Haroche
J. de Phys. 31, 971 (1970)

Conclusions de cette étude

Le facteur g d'un spin est modifié par le couplage avec un champ RF haute fréquence

$$g_{\text{spin habillé}} \neq g_{\text{spin nu}}$$

Peut - on comprendre l'anomalie du facteur g de l'électron par un couplage analogue au précédent, mais avec les fluctuations du vide? On somme le résultat précédent sur tous les modes du champ (avec une coupure à $\hbar\omega = mc^2$), en prenant une densité d'énergie $\hbar\omega/2$ par mode.

Problème : on trouve que g est toujours diminué alors que l'anomalie $g - 2$ est positive. g est augmenté par les corrections radiatives.

Une piste possible : l'électron a aussi une charge et le mouvement de vibration de la charge peut éventuellement modifier le résultat précédent.

ÉLECTRON FAIBLEMENT LIÉ COUPLÉ À UN CHAMP HAUTE FRÉQUENCE

Électron faiblement lié couplé à un champ haute fréquence

Comment le mouvement lent de la charge et du spin de l'électron est-il modifié par le mouvement rapide de vibration dans le champ haute fréquence?

Peut-on obtenir un hamiltonien effectif décrivant ce mouvement lent avec de nouveaux paramètres?

- Nouvelle masse, nouveau moment magnétique
- Facteurs de forme électrique et magnétique

Peut-on donner une interprétation semi classique de ces modifications?

Peut-on étendre ces images à l'interaction avec le champ du vide et obtenir une interprétation physique simple des corrections radiatives?

Quelques références

- 1- P. Avan, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, C. Fabre,
J. de Phys. 37, 993 (1976)
- 2- J. Dupont-Roc, C. Fabre, C. Cohen-Tannoudji,
J. Phys. B Atom. Mol. Phys. 11, 563 (1978)
- 3- J. Dalibard, J. Dupont-Roc, Cohen-Tannoudji,
J. de Phys. 43, 1617 (1982)
J. de Phys. 45, 637 (1984)
- 4- J. Dupont-Roc, C. Cohen-Tannoudji,
in « New trends in Atomic Physics », Les Houches,
Session XXXVIII 1982 (edited by G. Grynberg and R.
Stora), p.156. Elsevier (1984).
- 5- P.I. Complément A_{IV}

Hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{electron}} + \hat{H}_{\text{champ}} + \hat{H}_{\text{interaction}} = \hat{H}_e + \hat{H}_R + \hat{H}_I$$

$\hat{H}_e = mc^2 + \vec{\pi}_0^2 / 2m + q\phi_0(\vec{r}) - (q\hbar / 2m)\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0$ + corrections relativistes (spin-orbite, Darwin,...) à l'ordre $1/c^2$ inclus

$\vec{A}_0, \phi_0$: Potentiels vecteur et scalaire statiques

$$\vec{\pi}_0 = \vec{p} - q\vec{A}_0(\vec{r}) \quad \vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0(\vec{r})$$

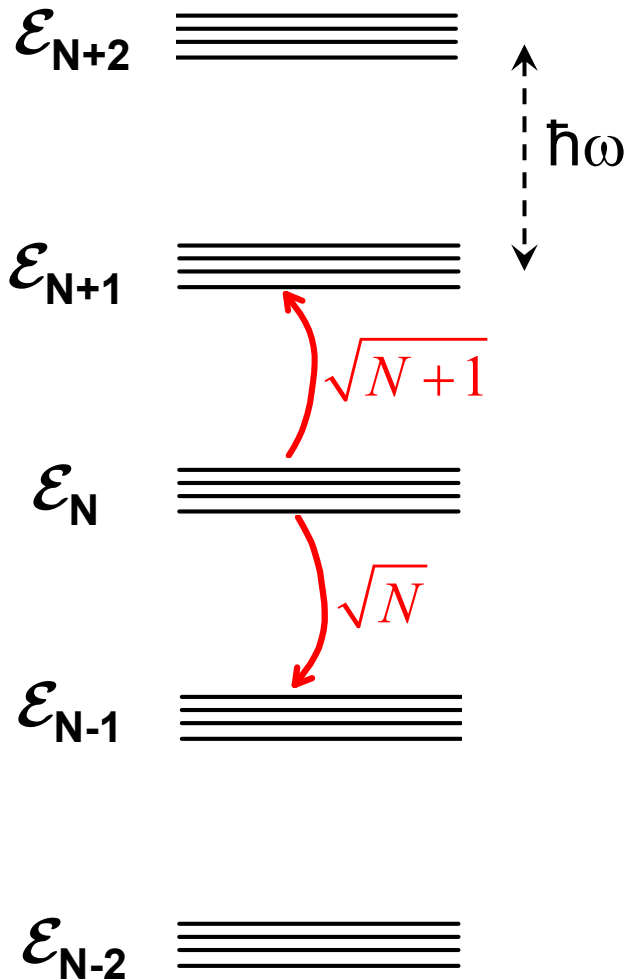
$(\hbar / 2m)\vec{\sigma}$: spin

$$\hat{H}_R = \sum_{\text{modes}} \hbar \omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + 1/2 \right)$$

$\hat{H}_I = -(q/m)\hat{\vec{A}}(\vec{r}) \cdot \hat{\vec{\pi}}_0 + (q^2 / 2m)\hat{\vec{A}}^2(\vec{r}) - (q\hbar / 2m)\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{B}}(\vec{r})$ + corrections relativistes à l'ordre $1/c^2$ inclus

$\hat{\vec{A}}, \hat{\vec{B}}$: opérateurs champ, superpositions linéaires de $\hat{a}$ et $\hat{a}^+$

Multiplicités non perturbées du système atome+mode ω



$\mathcal{E}_N$: multiplicité des états de e^- en présence de N photons

Termes linéaires en q de H_I : V_1

Combinaison linéaire de a et a^+ couplent $\mathcal{E}_N$ à $\mathcal{E}_{N+1}$ et $\mathcal{E}_{N-1}$

Éléments de matrice en $(N+1)^{1/2}$ et $(N)^{1/2}$

Termes quadratiques en q de H_I : V_2

$a a^+$ et $a^+ a$: couplent $\mathcal{E}_N$ à $\mathcal{E}_N$

a^2 et $(a^+)^2$: couplent $\mathcal{E}_N$ à $\mathcal{E}_{N\pm 2}$. Négligés dans un calcul à l'ordre 2 en q

Méthode de l'hamiltonien effectif

Idée générale

Effectuer une transformation unitaire U sur H telle que toutes les multiplicités $\mathcal{E}_N$ deviennent découplées les unes des autres à un ordre donné, 2, en q .

La restriction $\hat{U} \hat{H} \hat{U}^+$ du nouvel hamiltonien à l'intérieur de $\mathcal{E}_N$ est un hamiltonien effectif $\hat{H}_{\text{eff}}^N$ décrivant les corrections aux énergies électroniques en présence de N photons ω

Résultat obtenu

$$\begin{aligned} \langle \alpha, N | \hat{H}_{\text{eff}}^N | \beta, N \rangle &= \langle \alpha, N | \hat{H}_e | \beta, N \rangle + \langle \alpha, N | \hat{V}_2 | \beta, N \rangle + \\ &+ \sum_{\gamma} \langle \alpha, N | \hat{V}_1 | \gamma, N \pm 1 \rangle \langle \gamma, N \pm 1 | \hat{V}_1 | \beta, N \rangle \times \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E_{\alpha, N} - E_{\gamma, N \pm 1}} + \frac{1}{E_{\beta, N} - E_{\gamma, N \pm 1}} \right] \end{aligned}$$

Développement en puissances de $(E_\gamma - E_\alpha)/\hbar\omega$

Développement des dénominateurs d'énergie

$$\frac{1}{E_{\alpha,N} - E_{\gamma,N+1}} = \frac{1}{E_\alpha - E_\gamma - \hbar\omega} = -\frac{1}{\hbar\omega} - \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^2 (E_\alpha - E_\gamma) - \dots$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\langle \alpha, N | \hat{V}_1 | \gamma, N \pm 1 \rangle}{E_{\alpha,N} - E_{\gamma,N+1}} &= -\frac{1}{\hbar\omega} \langle \alpha, N | \hat{V}_1 | \gamma, N \pm 1 \rangle \\ &- \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \sqrt{N+1} \underbrace{\langle \alpha | \hat{V}_1^e | \gamma \rangle (E_\alpha - E_\gamma)}_{\langle \alpha | [\hat{H}_e, \hat{V}_1^e] | \gamma \rangle} - \dots \end{aligned}$$

En faisant remonter les $E_\alpha - E_\gamma$ au numérateur, on fait apparaître des commutateurs avec H_e , puis des relations de fermeture conduisant à l'élément de matrice entre α et β d'opérateurs purement électroniques

Structure du résultat final

$$\hat{H}_{\text{eff}}^N = (N+1)\hat{R} + N\hat{S} = N(\hat{R} + \hat{S}) + \hat{R}$$

$\hat{R}, \hat{S}$: opérateurs électroniques ayant une expression explicite

Terme proportionnels à N

Décrit les effets stimulés proportionnels au nombre N de photons incidents

Effets de la vibration de la charge et du spin dans le champ incident.

Terme indépendant de N

Décrit les effets spontanés existant même en l'absence de tout photon incident (N=0)

Contribution du mode ω aux corrections radiatives

Avantages d'un traitement quantique

La distinction des termes en N+1 et N permet d'identifier les termes indépendants de N, c-à-d les effets spontanés.

Énergies caractéristiques

$m c^2$: énergie au repos de l'électron

$\hbar \omega$: énergie du photon

E_L : énergie de liaison de l'électron

Électron faiblement lié $\rightarrow E_L \ll \hbar \omega$

$\mathcal{E}_v = \frac{q^2 \langle \hat{E}^2 \rangle}{2 m \omega^2}$: énergie cinétique de vibration de l'électron
dans le champ haute fréquence incident

Carré moyen de l'amplitude de vibration

$$\langle \delta x^2 \rangle = \frac{q^2 \langle \hat{E}^2 \rangle}{m^2 \omega^4}$$

Interprétation physique des effets stimulés

Toute une série de termes apparaissent dans la partie $N(R+S)$ de H_{eff} qui décrit les effets stimulés.

On ne garde que

- les termes linéaires en $\mathcal{E}_v$
- les termes linéaires en E_L
- les termes quadratiques en E_L prédominants

$$E_L^2 / m c^2 \quad \mathcal{E}_v E_L^2 / \hbar \omega$$

Nous ne donnerons pas ici l'expression de tous ces termes (voir références). Ils peuvent tous être interprétés semi classiquement. Nous passons en revue quelques unes de ces interprétations.

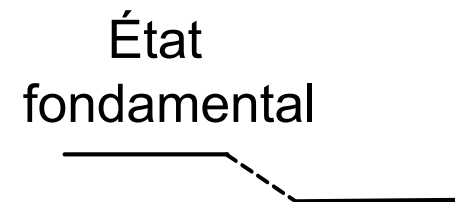
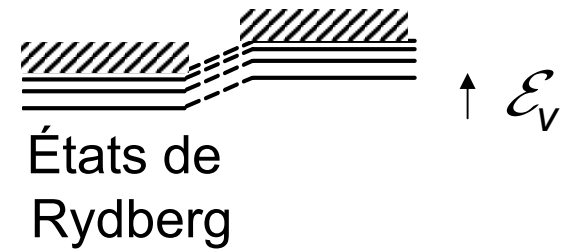
Quelques effets stimulés

1 – Tous les niveaux de $\mathcal{E}_N$ sont déplacés en bloc de $\mathcal{E}_V$

L'électron faiblement lié vibre comme un électron libre dans le champ incident et acquiert une énergie cinétique de vibration qui s'ajoute à son énergie

Pour un atome, déplacement en bloc des états de Rydberg qui sont faiblement liés.

Par contre, pour l'état fondamental, f, l'excitation n'est pas haute fréquence et le déplacement est différent (négatif si $\hbar\omega$ est plus petit que l'écart entre f et le 1er niveau excité).



Déplacement du seuil d'ionisation

Quelques effets stimulés (suite)

2 - À l'énergie $\mathcal{E}_v$ correspond une augmentation de masse

$$\delta m = \mathcal{E}_v / c^2$$

Interprétation simple de la correction à l'énergie cinétique.

$$\frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} \rightarrow \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} - \frac{\delta m}{m} \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} \simeq \frac{\vec{\pi}_0^2}{2(m + \delta m)}$$

3 - L'électron vibrant moyenne les champs statiques sur l'étendue de son mouvement de vibration. Par exemple,

$$\begin{aligned} \phi_0 &\rightarrow \phi_0 + \delta \phi_0 \\ \delta \phi_0 &= \frac{q^2 \langle E^2 \rangle}{2 m^2 \omega^4} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\nabla}) \phi_0 \end{aligned}$$

$\vec{\varepsilon}$: polarisation du champ incident

Quelques effets stimulés (suite)

- 3 - Si la polarisation du champ hf est circulaire, l'électron effectue un mouvement circulaire à la fréquence ω . Ce mouvement circulaire donne naissance à un moment magnétique qui se couple au champ statique B_0 .
- 4 - La vibration angulaire du spin dans le champ hf diminue son moment magnétique effectif.
Effet déjà étudié plus haut.
- 5 - La vibration à la fréquence ω de l'électron dans le champ électrique de l'onde incidente donne naissance à un champ magnétique motionnel « rectifié » qui se couple au moment magnétique du spin.

EFFETS SPONTANÉS

Effets spontanés

$$\hat{R} = \underbrace{\frac{1}{2}(\hat{R} + \hat{S})}_{\hat{H}_{FV}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\hat{R} - \hat{S})}_{\hat{H}_{RR}}$$

Terme $H_{FV} = (R + S) / 2$

Même structure que le terme $N(R+S)$ avec N remplacé par $1/2$.

Même interprétation que les effets stimulés, le champ réel incident étant remplacé par les fluctuations du vide.

(énergie $\hbar\omega / 2$ par mode)

Terme $H_{RR} = (R - S) / 2$

Effet de la réaction de rayonnement.

Interaction de l'électron avec son propre champ.

Confirmation de l'interprétation de H_R

À partir de l'hamiltonien total, on peut écrire les équations de Heisenberg de l'électron et du champ.

L'équation de Heisenberg pour le mode ω du champ est celle d'un oscillateur harmonique « piloté » par un terme source atomique.

L'intégration de cette équation donne pour le champ E:

$$\hat{E} = \hat{E}_{\text{vide}} + \hat{E}_{\text{source}}$$

Champ du vide
Solution de l'équation
homogène
(sans terme source)

Champ des sources
Solution de l'équation
inhomogène
(avec terme source)

Équation pour l'électron

Fait intervenir le champ $\mathbf{E}$ au point $\mathbf{r}$ où se trouve l'électron. Les opérateurs de champ et les opérateurs électroniques commutent et peuvent être rangés dans n'importe quel ordre. On choisit l'ordre tel que les termes obtenus en remplaçant $\mathbf{E}$ par $\mathbf{E}_{\text{vide}} + \mathbf{E}_{\text{source}}$ soient séparément hermitiques et aient donc un sens physique (Réf. 3, p.18)

Résultat

On trouve que la « force » agissant sur l'électron et associée à $\mathbf{E}_{\text{vide}}$ a le même effet que celle déduite du terme H_{FV} obtenu plus haut. Cette force décrit donc bien l'effet des fluctuations du vide.

On trouve que la « force » agissant sur l'électron et associée à $\mathbf{E}_{\text{source}}$ a le même effet que celle déduite du terme H_{RR} obtenu plus haut. Cette force décrit donc bien l'effet de la réaction de rayonnement.

Autre argument en faveur de cette interprétation

H_{FV} et H_{RR} peuvent être écrits sous la forme

$$\hat{H}_{FV} \propto \int d\omega C_v(\omega) \chi_e(\omega)$$

Fonction de corrélation
du champ du vide

Susceptibilité
de l'électron

Le champ du vide fluctue et polarise l'électron lié.
Interaction des fluctuations du vide avec la polarisation
qu'elles induisent sur l'électron lié.

$$\hat{H}_{RR} \propto \int d\omega \chi_v(\omega) C_e(\omega)$$

Susceptibilité
du champ du vide

Fonction de corrélation
de l'électron

Le dipôle de l'électron fluctue et « polarise » le champ,
c'est-à-dire crée un champ avec lequel il interagit

Corrections à l'énergie cinétique

$$\frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} \left[1 - \frac{(\delta m_{RR} + \delta m_{FV})}{m} \right] \simeq \frac{\vec{\pi}_0^2}{2(m + \delta m_{RR} + \delta m_{FV})}$$

$$\frac{\delta m_{FV}}{m} = \frac{\mathcal{E}_v}{m c^2} \quad \text{Vient de } \hat{H}_{FV} \qquad \frac{\delta m_{RR}}{m} = \frac{4}{3} \frac{\mathcal{E}_v}{\hbar \omega} \quad \text{Vient de } \hat{H}_{RR}$$

δm_{FV} : Correction de masse associée à l'énergie cinétique de vibration dans les fluctuations du vide.

δm_{RR} : Masse électromagnétique (comme dans l'équation de Abraham - Lorentz). L'intégrale sur ω de $\delta m_{RR} c^2$ donne l'énergie du champ de Coulomb.

Dans le domaine non relativiste ($\hbar \omega \ll m c^2$), $\delta m_{RR} \gg \delta m_{FV}$ et la correction à l'énergie cinétique est principalement due à la réaction de rayonnement.

Corrections à l'énergie potentielle

Proviennent de H_{FV} et décrivent une modification de ϕ_0

$$\delta\phi_0 = \frac{\mathcal{E}_v}{3m\omega^2} \Delta\phi_0 = \frac{1}{6} \langle \delta x^2 \rangle \Delta\phi_0$$

Accord avec l'image de Welton pour le « Lamb shift ».

L'électron vibre dans les fluctuations du vide et moyenne le potentiel sur un volume fini $\langle \delta x^2 \rangle^{3/2}$.

$\delta\phi_0$ déplace différemment les états $2s_{1/2}$ et $2p_{1/2}$ de l'hydrogène [$\Delta(1/r)$ est proportionnel à $\delta(\mathbf{r})$ et seul l'état $2s$ a une probabilité de présence non nulle en $r=0$], alors que la correction due à δm_{RR} est la même pour ces 2 états.

Le « Lamb shift » est donc dû aux fluctuations du vide.

Intégrale sur ω de ω_m à ω_M avec: $\hbar\omega_m \ll Ry$ $\hbar\omega_M \ll mc^2$

$$\frac{\alpha}{\pi} \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \text{Log} \frac{\omega_M}{\omega_m} \Delta\phi_0(\vec{r})$$

Taux d'émission spontanée

Il est possible aussi de calculer les contributions respectives des fluctuations du vide et de la réaction de rayonnement au taux R_a de variation d'énergie de l'atome dans l'état a , 0 photon.

$$R_a = \left\langle a, 0 \left| \frac{d}{dt} \hat{H}_{\text{atom}} \right| a, 0 \right\rangle$$

Contribution de la réaction de rayonnement

On trouve la perte due au rayonnement d'une charge accélérée.

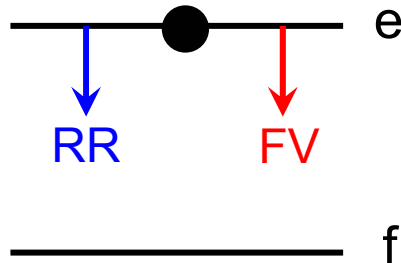
$-(R_a)_{RR}$ est proportionnel à $\langle a | (\ddot{\vec{r}})^2 | a \rangle$
valeur moyenne du carré de l'accélération dans l'état a .

Contribution des fluctuations du vide

On trouve que $(R_a)_{FV}$ est associé aux changements d'énergie dus aux transitions induites par le champ fluctuant du vide de l'état a vers les autres états atomiques b .

Cas d'un atome à 2 niveaux f, e

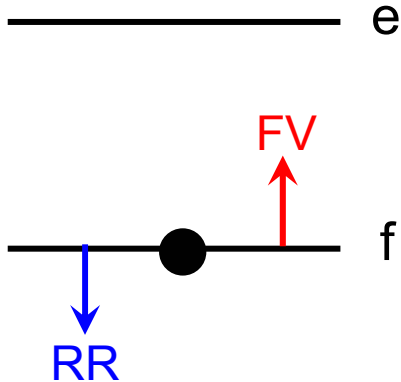
Résultat obtenu pour R_e



On trouve que : $(R_e)_{FV} = (R_e)_{RR} = R_e / 2$

Ceci explique pourquoi le calcul de R_e fait en ne considérant qu'un seul effet donne un résultat 2 fois trop petit

Résultat obtenu pour R_f



On trouve que : $(R_f)_{FV} = -(R_f)_{RR}$

$$\Rightarrow R_f = 0$$

Les 2 taux se compensent pour donner un état fondamental stable

(voir aussi V. Fain et Y. Khanin)

Moment magnétique de spin

Corrections dues aux fluctuations du vide

$$-\frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \rightarrow -\frac{q\hbar}{2m} \left[1 - \frac{5}{3} \frac{\mathcal{E}_v}{m c^2} \right] \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0$$

Diminution du magnétisme de spin. La charge de l'électron ne modifie pas le signe de l'effet discuté plus haut (atome neutre).

Corrections dues à la réaction de rayonnement

$$-\mathcal{E}_v \frac{\hbar \omega}{3m c^2} (\vec{\sigma})^2$$

Comme $(\sigma)^2=3$, pas de changement du magnétisme du spin.

Dépendance en $1/c^2$ des diverses corrections

Toutes les corrections pour le spin (aussi bien RR que FV) sont d'ordre 1 en $1/c^2$. Pour la particule chargée, la correction δm_{RR} est d'ordre 0 en $1/c$ (terme en $\mathcal{E}_v / \hbar \omega$).

Dans le domaine non relativiste, une charge électrique est plus couplée à son propre champ qu'un moment magnétique.

Niveaux d'énergie d'un électron dans un champ magnétique uniforme (sans corrections radiatives)

$$\hat{H}_e = \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0$$

Niveaux de Landau
Fréquence cyclotron ω_C

$$\omega_C = \frac{|q|B_0}{m}$$

Niveaux de spin
Fréquence de Larmor ω_L

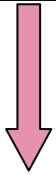
$$\omega_L = g \frac{|q|B_0}{2m}$$

$$g = 2 \rightarrow \omega_C = \omega_L$$

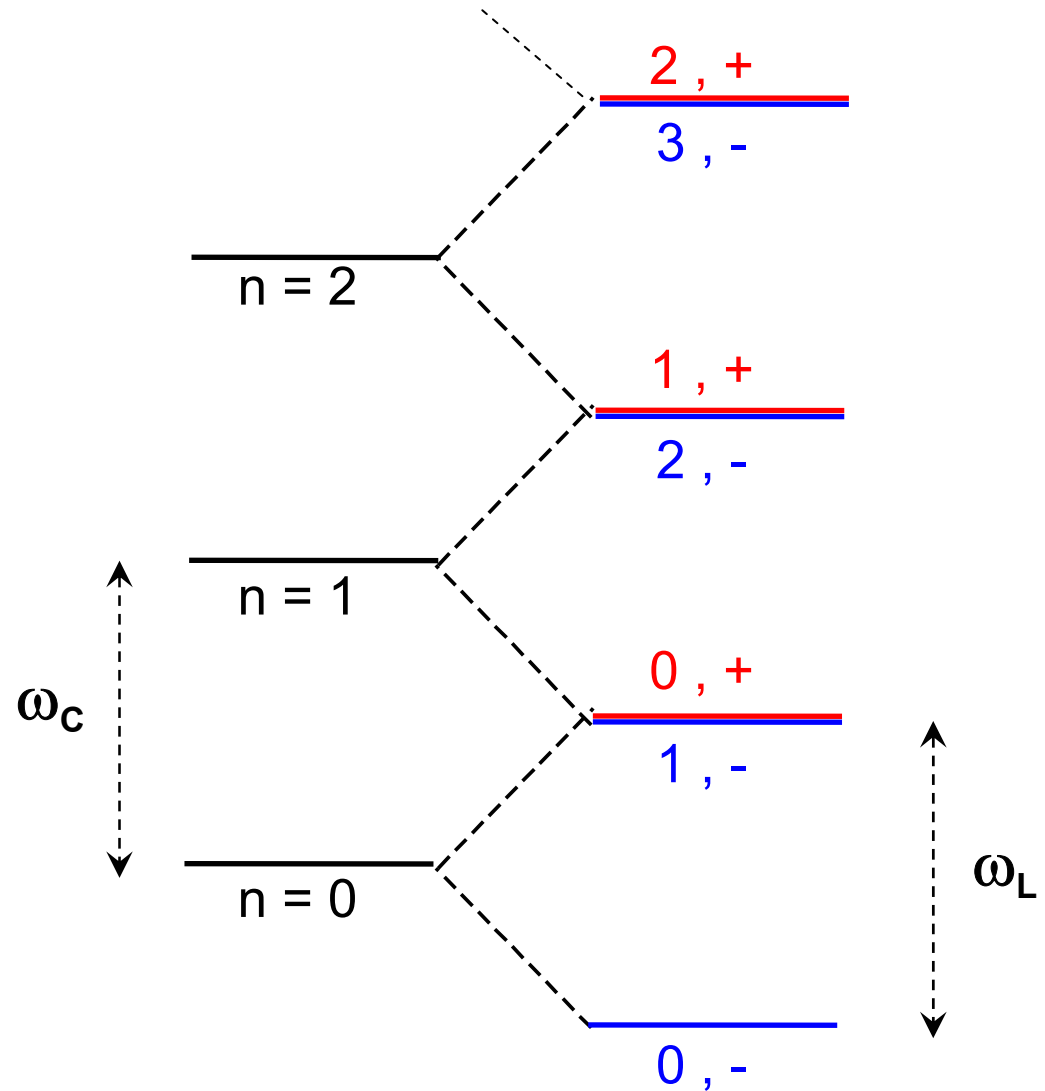
L'écart entre niveaux de Landau est égal
à l'écart entre niveaux de spin.

Diagramme d'énergie

$$\omega_C = \omega_L$$



Dégénérescence
entre
 $n, +$ et $n+1, -$



Corrections radiatives

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} &\rightarrow \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\mathcal{E}_v}{\hbar\omega} - \frac{\mathcal{E}_v}{mc^2} \right] \\ -\frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 &\rightarrow -\frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \left[1 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RR}}}{0} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FV}}}{\frac{5}{3}} \frac{\mathcal{E}_v}{mc^2} \right] \end{aligned}$$

Modification de ω_c et ω_L

$$\begin{aligned}\omega_C &\rightarrow \omega_C \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\mathcal{E}_v}{\hbar \omega} - \frac{\mathcal{E}_v}{m c^2} \right] \\ \omega_L &\rightarrow \omega_L \left[1 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RR}}}{0} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FV}}}{\frac{5}{3}} \frac{\mathcal{E}_v}{m c^2} \right]\end{aligned}$$

Signe positif de g-2

Les déterminations les plus précises de g (faites par l'équipe de H. Dehmelt sur un électron unique piégé) consistent à mesurer ω_C et ω_L et à en déduire:

$$g = 2 \frac{\omega_L}{\omega_C}$$

À l'ordre le plus bas en $1/c$ (ordre 0), les corrections radiatives n'affectent que ω_C . Il apparaît une réduction de ω_C due à une augmentation de masse en $\mathcal{E}_v / \hbar\omega$ associée à la réaction de rayonnement. La réduction de ω_L est beaucoup plus faible. Elle est due aux fluctuations du vide et n'apparaît qu'à l'ordre 2 en $1/c$.

Le signe positif de g-2 est donc dû au fait que ω_C est plus réduit que ω_L . La réaction de rayonnement ralentit le mouvement de la charge et n'affecte pas le spin.

Calcul plus précis

utilisant toujours la méthode de l'hamiltonien effectif, mais

- incluant les effets relativistes dans les états intermédiaires (pas de restriction sur $\hbar\omega/mc^2$).
- incluant les effets à plusieurs particules (création de paires).

On obtient (voir réf.4 p.18):

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} \eta(x) dx \right] - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} \zeta(x) dx \right]$$

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad x = \frac{\hbar\omega}{mc^2} \quad x_M = \frac{\hbar\omega_M}{mc^2} \quad \text{coupure}$$

La théorie élémentaire précédente donne les développements de $\eta(x)$ et $\zeta(x)$ en puissances de x (ordre 0 et 2 en $1/c$)

Calcul plus précis (suite)

Exprimons H_{eff} en fonction de la masse renormalisée:

$$m^* = m \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} \eta(x) dx \right]$$

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m^*} - \frac{q\hbar}{2m^*} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} [\eta(x) - \zeta(x)] dx \right]$$

On en déduit:

$$g = 2(1 + a_e)$$

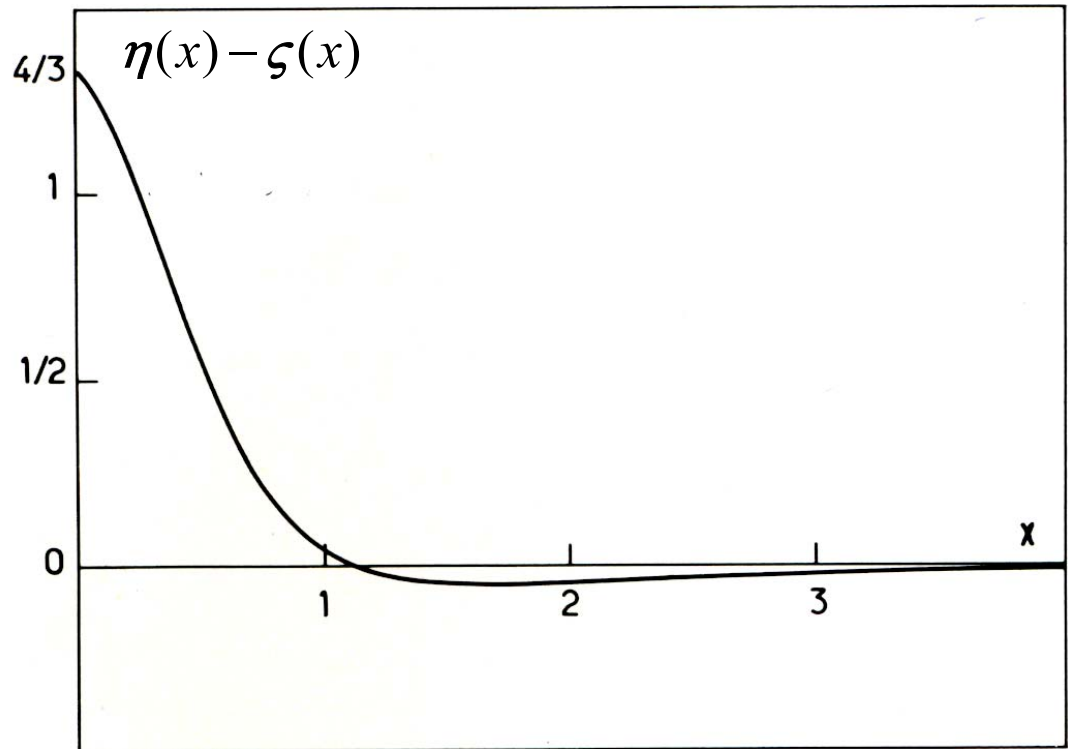
où « l'anomalie » $a_e = (g-2)/2$ peut être écrite:

$$a_e = \frac{\alpha}{\pi} \underbrace{\int_0^{x_M} [\eta(x) - \zeta(x)] dx}_{\text{Intégrale convergente}} \\ \text{tendant vers } 1/2 \text{ quand } x_M \rightarrow \infty$$

On retrouve bien le résultat $a_e = \alpha / 2\pi$ de l'électrodynamique quantique.

Calcul plus précis (suite)

Cette courbe donne la dépendance en fréquence de la contribution à $g-2$ des divers modes du champ de rayonnement.



L'essentiel de l'intégrale provient de la zone $x < 1$, c'est à dire de $\hbar\omega < mc^2$. L'analyse précédente (aux ordres les plus bas en $1/c^2$) donne donc une bonne image physique.

Conclusion pour les corrections radiatives

Possibilité de séparer clairement les contributions

- des fluctuations du vide
- de la réaction de rayonnement

Description des corrections radiatives en termes d'images physiques simples:

- vibration de la charge et du spin dans les fluctuations du vide.
- inertie électromagnétique ralentissant le mouvement de la charge.

Le déplacement de Lamb est essentiellement dû aux fluctuations du vide alors que $g-2$ est surtout dû à la réaction de rayonnement.

Un calcul complètement relativiste ne change pas radicalement les conclusions précédentes.