TD Atomes froids

Résonance de Fano-Feshbach

Rappels : On rappelle que l'amplitude de diffusion dans le référentiel du centre de masse entre deux particules, $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$, est reliée à la matrice T par la relation $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = -\mu\Omega T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')/2\pi\hbar^2$, où μ désigne la masse réduite des deux particules, Ω est un volume de quantification $\pm\boldsymbol{k}$ et $\pm\boldsymbol{k}'$ sont les vecteurs d'ondes asymptotiques dans le référentiel du centre de masse avant et après la collision et $T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \langle \boldsymbol{k}'|T|\boldsymbol{k}\rangle$. La matrice T s'exprime par ailleurs en fonction de la résolvante G et du potentiel d'interaction V par

$$\begin{aligned} T &= V + VG(E_{\boldsymbol{k}} + i0^+)V \\ G(z) &= G_0(z) + G_0(z)VG(z) \end{aligned}$$

1. On considère un alcalin (première colonne du tableau périodique) dans son état fondamental électronique. Quel est le moment cinétique orbital de l'électron de valence ? En déduire les niveaux atomiques en présence d'un champ magnétique et en l'absence d'interaction hyperfine.
2. On considère à présent la collision de deux atomes alcalins. Si l'on néglige toujours l'interaction hyperfine, montrer que dans l'approximation de Born-Oppenheimer, on peut décrire l'interaction par deux potentiels correspondant respectivement aux états singulets et triplets de spin. Comment varient les potentiels en fonction du champ magnétique ?
3. Montrer que si le champ magnétique est convenablement bien choisi deux atomes préparés asymptotiquement dans un état de diffusion du potentiel triplet de plus basse énergie peuvent être résonants avec un état lié $|m\rangle$ du potentiel singulet. Quelle peut-être l'origine du couplage $\widehat{V}$ entre les deux potentiels ? Dans la suite on supposera que le potentiel triplet est plat, et on ne considérera que l'état $|m\rangle$ dans le canal singulet.
4. On prend comme zéro des énergies l'état $|S = 1, \boldsymbol{k}\rangle$ et on note E_b l'énergie de l'état lié $|S = 0, m\rangle$. Exprimer T comme une série ne faisant intervenir que V et G_0, dans laquelle on notera $\langle S = 0, m|\widehat{V}|S = 1, \boldsymbol{k}\rangle = g(\boldsymbol{k})/\sqrt{\Omega}$.
5. En déduire que

$$T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \frac{g(\boldsymbol{k})g^*(\boldsymbol{k}')}{\Omega} \frac{1}{E_k - E_b - \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1} \frac{|g(\boldsymbol{k}_1)|^2}{E_k - E_{k_1}}}.$$

6. On suppose le hamiltonien d'interaction de courte portée. Quelle approximation ceci suggère-t-il ? Qu'obtient-on alors pour la somme sur $\boldsymbol{k}_1$?

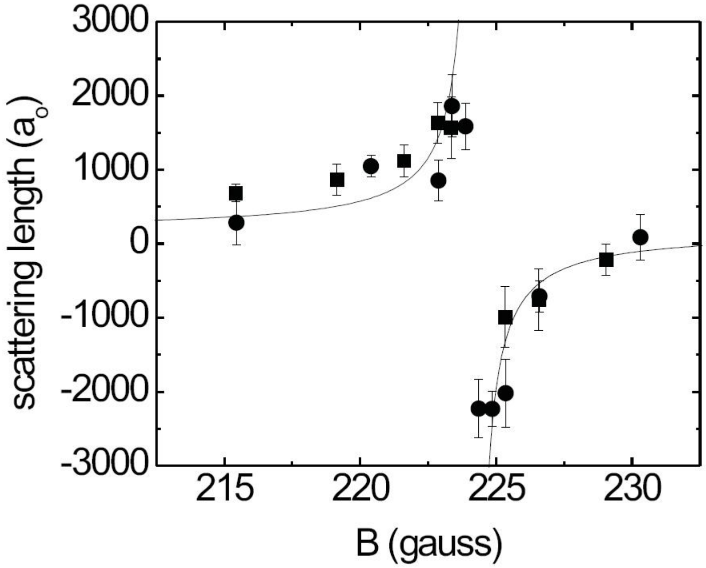

FIG. 1 – Évolution de la longueur de diffusion entre atomes de ^{40}K en fonction du champ magnétique. Données extraites de C. A. Regal et al. Phys. Rev. Lett. **90**, 230404 (2003).

7. Afin de contourner le problème soulevé à la question précédente, montrer que l'on peut écrire

$$\sum_{\boldsymbol{k}_1} \frac{|g(\boldsymbol{k}_1)|^2}{E_k - E_{k_1}} = -\Sigma_0 + g_0 \sum_{\boldsymbol{k}_1} \left(\frac{E_k}{E_{\boldsymbol{k}_1}(E_k - E_{k_1})} \right),$$

avec $\Sigma_0 = \sum_{\boldsymbol{k}_1} |g(\boldsymbol{k}_1)|^2 / E_{k_1}$.

8. Déduire des questions précédentes l'expression de l'amplitude de diffusion à basse énergie. Montrer que l'on peut la mettre sous la forme

$$f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \frac{-1}{a^{-1} + ik + k^2 b/2},$$

où a et b sont respectivement la longueur de diffusion et la portée effective du potentiel. Que se passe-t-il pour $E_b \sim \Sigma_0$ (résonance de Fano-Feshbach) ?

9. *Molécule habillée.* On s'intéresse à présent au décalage en énergie de l'état moléculaire.

   (a) Rappeler le lien entre la résolvante $G(z)$ et le spectre du hamiltonien.

   (b) Écrire l'élément de matrice $\langle m|G(z)|m\rangle$ sous la forme d'une série géométrique. En déduire que

   $$\langle m|G(z)|m\rangle = \frac{1}{z - E_b - \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1} \frac{|g(\boldsymbol{k}_1)|^2}{E_k - E_{k_1}}}.$$

   (c) Donner l'expression des pôles de G au voisinage de la résonance. En déduire l'expression de l'énergie du dimère en fonction de la longueur de diffusion.

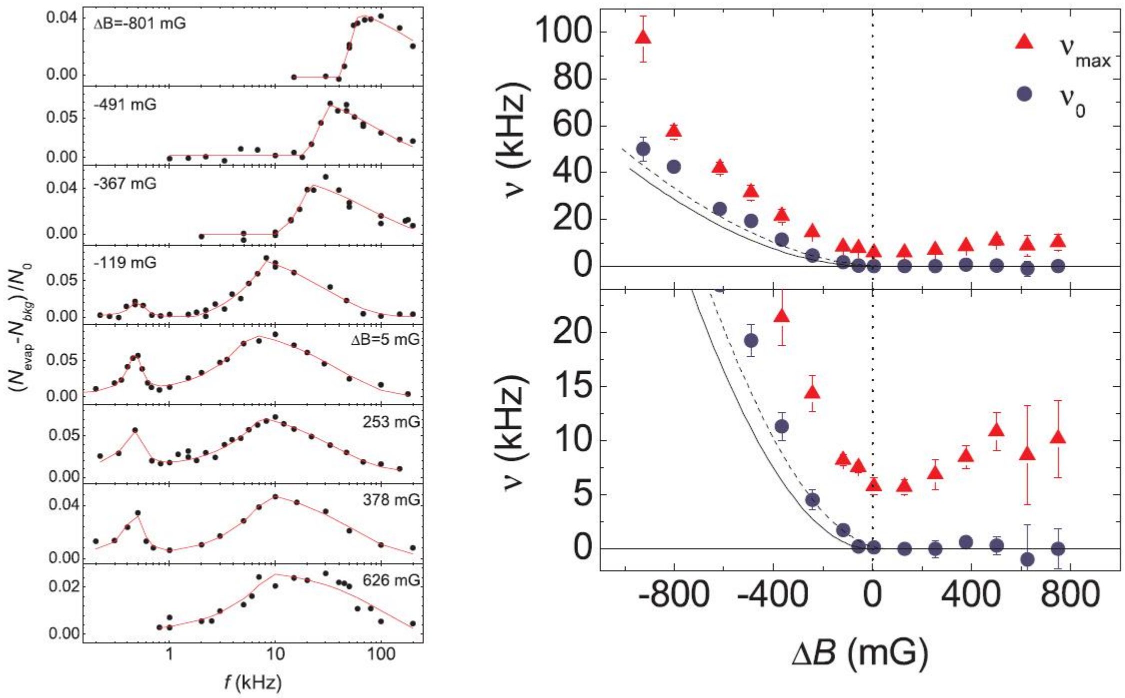

FIG. 2 – Gauche : Réponse d'un gaz de ^{40}K à une modulation sinusoïdale de champ magnétique. Les atomes sont piégés dans un potentiel dipolaire de fréquence radiale 243 Hz. $\Delta B = B_0 - B_F$ représente la valeur centrale du champ magnétique repérée par rapport à la position $B_F = 202$ G de la résonance de Feshbach. Droite : position du pic maximum de réponse (triangles) et du seuil (cercles). Les courbes en traits plein et pointillés correspondent aux valeurs théoriques pour différentes valeurs de la position de la résonance. Données extraite de M. Greiner et al. Phys. Rev. Lett. **94**, 070403 (2005)

(d) Dans les données de la figure 2, on présente la réponse d'un gaz de ^{40}K à un champ magnétique $B = B_0 + B_1 \cos(2\pi f t)$. Commenter.

(e) Soit $|\psi_m\rangle$ le vrai état propre du système. Relier $Z = |\langle m|\psi_m\rangle|^2$ au résidu de $\langle m|G(z)|m\rangle$. En déduire l'évolution de Z en fonction de la force du couplage et l'énergie de liaison de la molécule "habillée". En déduire de même la probabilité de présence dans un état $|\boldsymbol{k}\rangle$.