

TD de physique du solide

Erwann Bocquillon - Frédéric Chevy

1 Théorème de Bloch

On considère une particule de masse m évoluant dans un potentiel $v(x)$ périodique de période a . On note $\hat{T}_a$ l'opérateur $\exp(i\hat{P}a/\hbar)$.

1. Soit $|\psi\rangle$ l'état quantique du système. On pose $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Donner la fonction d'onde décrivant l'état $|\psi'\rangle = \hat{T}_a|\psi\rangle$.
2. Montrer que $\hat{T}_a$ est un opérateur unitaire.
3. Calculer $\hat{T}_a^\dagger \hat{P} \hat{T}_a$ et $\hat{T}_a^\dagger \hat{X} \hat{T}_a$. En déduire que $\hat{T}_a$ commute avec le hamiltonien $\hat{H}_0 = \hat{P}^2/2m + V(\hat{X})$.
4. On cherche les états propres de $\hat{H}$ sous la forme d'état propre de $\hat{T}_a$. Montrer que $\hat{T}_a|\psi\rangle = e^{iqa}|\psi\rangle$ avec $q \in [-\pi/a, \pi/a]$.
5. On pose $u(x) = e^{-iqx}\psi(x)$. Montrer que $u(x)$ est périodique de période a .

2 États de Wannier

On impose des conditions aux limites périodiques, tout état satisfaisant alors la condition $\psi(x + Na) = \psi(x)$.

1. Montrer que les valeurs de q sont quantifiées.
2. Soit $X = ja$, avec j entier compris entre 0 et $N - 1$. On appelle états de Wannier les états $|X, n\rangle$ de fonction d'onde définie par

$$|X, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{-iqX} |q, n\rangle.$$

où $|q, n\rangle$ désigne l'état de quasi-impulsion $\hbar q$ de la bande n .

3. Montrer que les états $|X, n\rangle$ forment une base orthonormée.
4. Montrer que $\hat{T}_a|X, n\rangle = |X - a, n\rangle$.

3 Interaction avec une onde électromagnétique

On éclaire le cristal avec une onde électromagnétique que l'on décrit par un potentiel vecteur $\mathbf{A}(x) = A_0 \cos(kx - \omega t)\mathbf{u}_x$.

1. Quel est le hamiltonien du système? Montrer que dans la limite des faibles puissances, on peut le mettre sous la forme $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, où $\hat{H}_1$ est linéaire en A_0 .
2. Montrer que l'élément de matrice $\langle \psi_{q'} | \hat{H}_1 | \psi_q \rangle$ n'est non nul que si $q' = q \pm k[2\pi/a]$. Interpréter ce résultat.