

Examen du cours « Cohérence quantique et dissipation »

Décohérence dans un interféromètre atomique

Durée : 2 heures

Le but de ce problème est d'étudier la perte de cohérence dans un interféromètre atomique lorsqu'un processus d'émission spontanée peut se produire lors du parcours des atomes. L'interféromètre considéré est un dispositif de Bragg, à trois réseaux identiques de pas ℓ , représenté sur la figure 1.

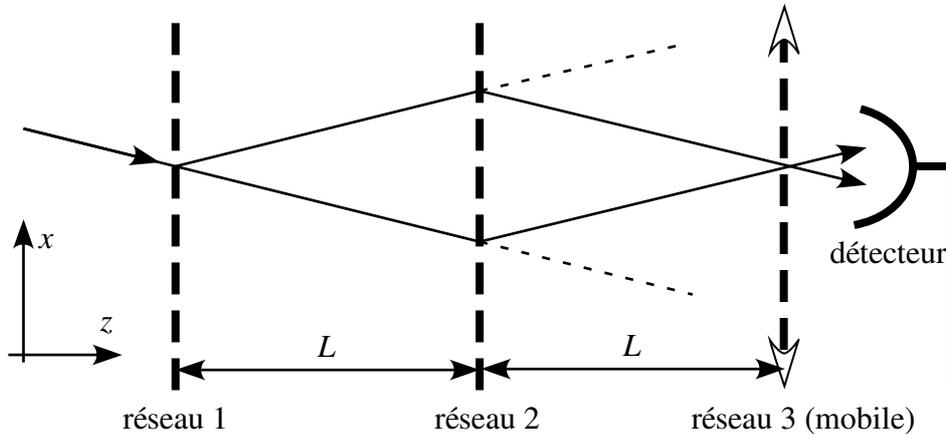


FIG. 1 – Interféromètre à trois réseaux

Pour simplifier, on ne traite quantiquement que le degré de liberté selon l'axe transverse x . Le mouvement longitudinal (selon l'axe z) est décrit par la mécanique classique et on prend simplement $z = vt$. La traversée du premier réseau se fait à l'instant $t = 0$, celle du deuxième réseau à l'instant $T = L/v$ et celle du troisième réseau à l'instant $2T$.

On rappelle :

- la relation de fermeture $\int |p\rangle\langle p| dp = 1$;
- l'élément de matrice $\langle x|p\rangle = \exp(ipx/\hbar)$;
- les relations

$$e^{ik_0\hat{x}}|p\rangle = |p + \hbar k_0\rangle \quad \text{et} \quad e^{i\hat{p}x_0/\hbar}|x\rangle = |x - x_0\rangle ,$$

où \hat{x} et \hat{p} sont les opérateurs position et impulsion de la particule le long de l'axe x . Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 ne peut être traitée complètement qu'une fois la partie 1 terminée. Toutefois, on peut aborder la majorité des questions en admettant les résultats intermédiaires indiqués dans l'énoncé.

1 Interférences en absence de décohérence

On note $|\psi_0\rangle$ le vecteur d'état d'un atome incident sur le premier réseau, correspondant à la fonction d'onde $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$. On modélise la propagation dans l'interféromètre de la manière suivante :

- Lors de la traversée du premier réseau, le vecteur d'état est multiplié par l'opérateur $1 + e^{ik_0\hat{x}}$, avec $k_0 = 2\pi/\ell$. On ne cherchera pas à normer le résultat obtenu par action de cet opérateur.
- Lors de la propagation libre entre deux réseaux, le vecteur d'état est multiplié par l'opérateur $e^{-i\hat{p}^2T/(2m\hbar)}$, où \hat{p} est l'opérateur impulsion le long de l'axe x .

1. Justifier brièvement ces deux termes de propagation.
2. Écrire la fonction d'onde $\psi_1(x)$ juste après la traversée du premier réseau ($t = 0_+$) en fonction de $\psi_0(x)$, x et k_0 .
3. Calculer la fonction d'onde $\psi_2(x)$ juste avant la traversée du deuxième réseau ($t = T_-$). Pour simplifier les notations, on posera

$$\psi'_0(x) = \int e^{ipx/\hbar} e^{-ip^2T/(2m\hbar)} \langle p|\psi_0\rangle dp ,$$

qui correspond à l'évolution libre entre 0 et T de la fonction d'onde initialement égale à $\psi_0(x)$. On mettra le résultat sous la forme :

$$\psi_2(x) = \psi'_0(x) + e^{i(k_0x - \omega_0T)} \psi'_0(x - x_0) ,$$

avec $\omega_0 = \hbar k_0^2/(2m)$ et $x_0 = \hbar k_0 T/m$. Interpréter les deux termes apparaissant dans cette expression.

4. Écrire la fonction d'onde $\psi_3(x)$ juste après la traversée du deuxième réseau. On ne gardera que les termes correspondant aux trajectoires en trait plein de la figure 1. On montrera que le résultat peut se mettre sous la forme :

$$|\psi_3\rangle = (e^{ik_0\hat{x}} + e^{i\omega_0T} e^{-ix_0\hat{p}/\hbar}) |\psi'_0\rangle . \quad (1)$$

5. Calculer la fonction d'onde incidente $\psi_4(x)$ sur le troisième réseau. On posera

$$\psi''_0(x) = \int e^{ipx/\hbar} e^{-ip^2T/(2m\hbar)} \langle p|\psi'_0\rangle dp ,$$

et on mettra le résultat sous la forme :

$$\psi_4(x) = [1 + e^{ik_0x}] e^{-i\omega_0T} \psi''_0(x - x_0) .$$

6. Expliquer sans calculs pourquoi on détecte un signal modulé quand on translate le troisième réseau selon l'axe x . Quel est le contraste attendu pour le signal d'interférence, dans le cas où l'ouverture du réseau (rapport entre la largeur des fentes et le pas ℓ) est petite devant 1 ?

2 Modèle de décohérence

Dans cette partie, on décrit la décohérence d'un atome liée à la diffusion de photons par l'équation pilote suivante :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\gamma\hat{\rho} + \frac{\gamma}{2k_1} \int_{-k_1}^{k_1} e^{ik\hat{x}} \hat{\rho} e^{-ik\hat{x}} dk, \quad (2)$$

où $\hat{\rho}$ est l'opérateur densité de l'atome, γ est le taux de diffusion de photons, et où $\hbar k_1$ est l'impulsion maximale transférée lors d'un processus de diffusion.

1. Montrer que cette équation conserve bien la trace de $\hat{\rho}$.
2. Comment évolue la distribution d'impulsion $\Pi(p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle$ de l'atome ?
3. Dans le cas où $\hbar k$ est beaucoup plus petit que l'échelle caractéristique de variation de $\Pi(p)$, montrer qu'on se ramène à une équation de diffusion dont on donnera le coefficient caractéristique en fonction de γ et k_1 .
4. Évaluer à partir de (2) l'évolution des éléments de matrice de l'opérateur densité en point de vue position : $\langle x + u/2 | \hat{\rho} | x - u/2 \rangle$.
5. On considère un temps $t \sim \gamma^{-1}$ correspondant à la diffusion d'un photon. Quelle est la valeur maximale u_{\max} de u au delà de laquelle la cohérence spatiale est appréciablement réduite ?
6. Comparer la valeur de u_{\max} à la longueur d'onde $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ des photons diffusés. Interpréter physiquement le résultat obtenu.

3 Traitement explicite de la décohérence

On suppose qu'on éclaire l'interféromètre de la figure 1 avec un faisceau laser passant juste derrière le réseau 2 et se propageant selon l'axe x . On s'intéresse au cas où un photon de ce faisceau laser (impulsion $\hbar k_1 \mathbf{u}_x$) est absorbé et un photon de fluorescence (impulsion $\hbar \mathbf{k}_2$, avec $|\mathbf{k}_2| = k_1$) est émis. Lors de ce processus de diffusion, la variation d'impulsion de l'atome le long de l'axe x , $\hbar k = \hbar k_1 - \hbar \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{u}_x$, est donc comprise entre 0 et $2\hbar k_1$. Juste avant le processus de diffusion, l'état de l'atome est donné par $|\psi_3\rangle$ (cf. équation 1).

1. En reprenant la démarche de la première partie, justifier sans calcul que le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ du système "atome+champ" s'écrit à l'instant $2T$ (c'est-à-dire juste avant la traversée du troisième réseau) :

$$|\Psi\rangle = \sum_k |\psi_4^{(k)}\rangle \otimes |(N-1)k_1, k_{2x} = k_1 - k\rangle, \quad (3)$$

où l'état du champ $|(N-1)k_1, k_{2x} = k_1 - k\rangle$ représente un état où un photon laser a disparu et un photon de fluorescence, d'impulsion $\hbar \mathbf{k}_2 = \hbar k_1 - \hbar k$ le long de l'axe x , est apparu. On exprimera $|\psi_4^{(k)}\rangle$ en fonction de $|\psi_3\rangle$ et des opérateurs $e^{ik\hat{x}}$ et $e^{-ip^2T/(2m\hbar)}$. On supposera que tous les états du champ intervenant dans (3) ont la même énergie.

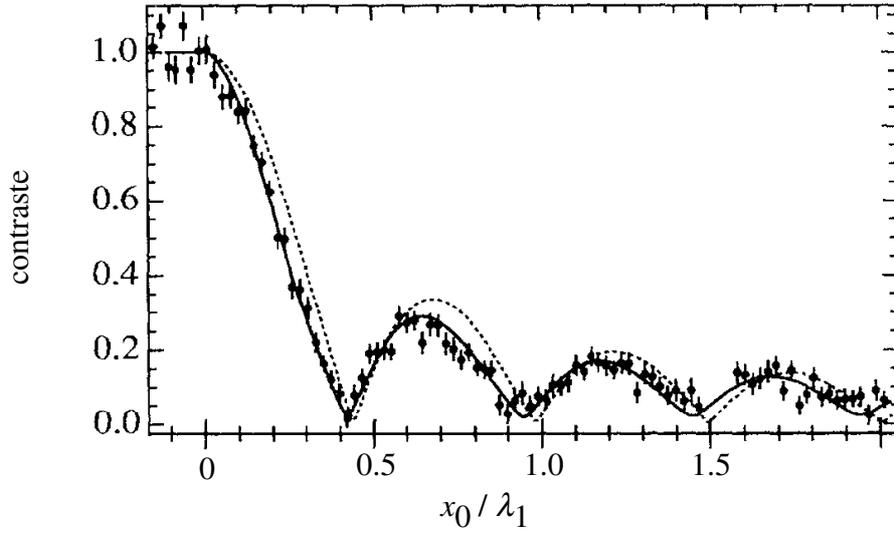


FIG. 2 – *Contraste des interférences mesurées dans un interféromètre à 3 réseaux, quand un photon laser est diffusé juste derrière le réseau 2.*

2. Pour limiter les calculs, on ne cherchera pas à calculer $\psi_4^{(k)}(x)$ et on admettra le résultat suivant, valable à une phase globale près :

$$\psi_4^{(k)}(x) = [1 + e^{i(k_0x - kx_0)}] e^{ikx} \psi_0''(x - x_0 - \hbar kT/m) .$$

Interpréter physiquement les différents termes de ce résultat.

3. On ne détecte pas le photon \mathbf{k}_2 et on prend donc une trace partielle sur son état, pour évaluer l'opérateur densité atomique. De plus, on remplace les sommes sur k comme celle de (3) par une intégrale :

$$\sum_k F(k) \rightarrow \frac{1}{2k_1} \int_0^{2k_1} F(k) dk ,$$

et on néglige pour simplifier la variation de ψ_0'' avec x à l'échelle de $\hbar k_1 T/m$. Montrer que la densité atomique dans le plan du troisième réseau est modulée avec une période ℓ .

4. Montrer qu'il y a des valeurs du rapport x_0/λ_1 pour lesquelles les interférences disparaissent complètement.
5. Comparer au résultat expérimental obtenu par M.S. Chapman *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3783 (1995), reporté sur la figure 2.
6. Comparer le résultat obtenu dans cette partie à la prédiction du modèle de la partie 2. Quel modèle fournit la description la plus précise du problème ?
7. Comment pourrait-on faire réapparaître les interférences avec un bon contraste ?