

## Position et vitesse d'une particule quantique

### L'équation de Schrödinger générale

#### Chapitre 2

Joseph Fourier  
1768-1830



William R. Hamilton  
1805-1865

## La particule libre en mécanique quantique

En mécanique quantique, l'état d'une particule ponctuelle est décrit par une fonction d'onde  $\psi(x, t)$  (on se limitera ici au cas à une dimension)

#### Description probabiliste :

Une mesure de position donnera le résultat  $x$  à  $dx$  près avec la probabilité

$$dP = |\psi(x, t)|^2 dx$$

#### Evolution dans le temps :

Si la particule est libre, c'est-à-dire n'est soumise à aucune force, ni aucune mesure, l'évolution de  $\psi(x, t)$  est donnée par

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

## Questions centrales du cours d'aujourd'hui

### Que trouve-t-on quand on mesure la vitesse ou l'impulsion d'une particule ?

Il s'agit également d'un résultat probabiliste, avec une densité de probabilité reliée à la transformée de Fourier de  $\psi(x, t)$

### Notion d'opérateur position et d'opérateur impulsion

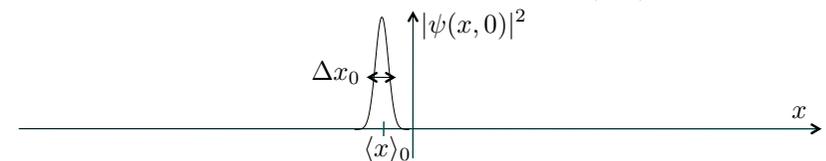
Equation de Schrödinger en présence d'un potentiel  $V(x)$

### Peut-on connaître à la fois la position et l'impulsion d'une particule ?

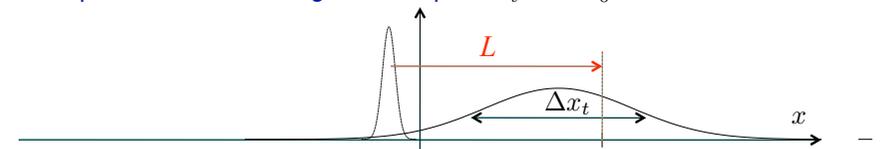
Les relations d'incertitude de Heisenberg.

## Comment faire une mesure de vitesse ?

A l'instant  $t = 0$ , la particule a pour fonction d'onde  $\psi(x, 0)$



Méthode de temps de vol : on laisse la particule évoluer librement pendant un temps  $t$  suffisamment long de sorte que  $\Delta x_t \gg \Delta x_0$



Probabilité pour que la particule parcourt la distance  $\approx L$  pendant le temps  $t$  ?

L'analyse rigoureuse de ce problème est faite au chapitre 2, §6 (hors programme)

1.

## La transformation de Fourier



propagation de la chaleur

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

## La transformation de Fourier, du cours de maths au cours de physique

Maths (tronc commun) : la TF est définie dans  $L_1$  (fonctions sommables)

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2i\pi x \cdot t} f(t) dt$$

Physique : la TF est défini dans  $L_2$  (fonctions de carré sommable)

$$1D : \varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixp/\hbar} \psi(x) dx$$

$$3D : \varphi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{p}/\hbar} \psi(\vec{r}) d^3r$$

On utilise aussi l'espace S de Schwartz :

fonctions  $C_\infty$  décroissant plus vite que toute puissance de  $x$  à l'infini

## Les propriétés essentielles de la TF pour la physique (I)

Connaissant  $\psi(x)$ , on calcule  $\varphi(p)$  en utilisant

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-ixp/\hbar} \psi(x) dx$$

Inversement, peut-on reconstruire  $\psi(x)$  si on connaît sa TF  $\varphi(p)$  ?

**OUI!** 
$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ixp/\hbar} \varphi(p) dp$$

On dit pour simplifier que  $\psi(x)$  et  $\varphi(p)$  sont TF l'une de l'autre, même s'il faut se souvenir de la valeur du signe dans  $e^{\pm ixp/\hbar}$

$$\psi(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi(p)$$

## Les propriétés essentielles de la TF pour la physique (II)

La TF est une isométrie pour l'espace  $L_2$

$$\psi_1(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi_1(p) \qquad \psi_2(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi_2(p)$$

$$\int \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx = \int \varphi_1^*(p) \varphi_2(p) dp$$

Si  $\psi(x)$  est normée, alors  $\varphi(p)$  l'est également :

$$1 = \int |\psi(x)|^2 dx = \int |\varphi(p)|^2 dp$$

## Les propriétés essentielles de la TF pour la physique (III)

### Dérivation et transformée de Fourier

$$\psi(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi(p)$$

On part de  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ixp/\hbar} \varphi(p) dp$

et on suppose qu'on peut dériver sous le signe intégral (OK dans l'espace S)

On en déduit la TF des dérivées successives de  $\psi(x)$  par rapport à  $x$  :

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ixp/\hbar} \left[ \frac{ip}{\hbar} \varphi(p) \right] dp \quad \frac{d\psi(x)}{dx} \xleftrightarrow{\text{TF}} \frac{ip}{\hbar} \varphi(p)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ixp/\hbar} \left[ -\frac{p^2}{\hbar^2} \varphi(p) \right] dp \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \xleftrightarrow{\text{TF}} -\frac{p^2}{\hbar^2} \varphi(p)$$

Dérivation dans l'espace des  $x$  = multiplication dans l'espace des  $p$

2.

## La distribution en impulsion d'une particule quantique

## La densité de probabilité pour l'impulsion

**Proposition :** si une particule est dans l'état  $\psi(x)$ , alors la distribution de probabilité pour son impulsion est :

$$\mathcal{P}(p) = |\varphi(p)|^2 \quad \psi(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi(p)$$

### Est-ce mathématiquement possible ?

On a vu que  $\varphi(p)$  est normée si  $\psi(x)$  est normée, donc  $\int \mathcal{P}(p) dp = 1$

$\mathcal{P}(p)$  peut donc bien être une densité de probabilité

### Est-ce physiquement réaliste ?

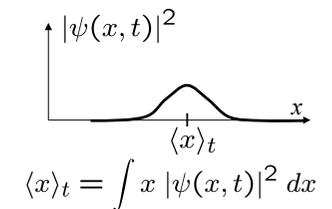
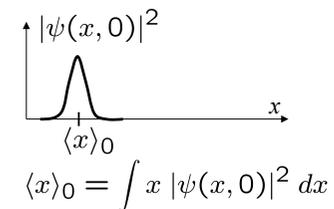
Classiquement, une fois connue la trajectoire  $x(t)$  de la particule, on définit la vitesse et l'impulsion de la particule par :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad p = m \frac{dx}{dt} \quad \text{particule libre : } v \text{ et } p \text{ sont constantes}$$

Retrouve-t-on ce résultat au niveau quantique ?

## Impulsion moyenne d'une particule libre quantique

Au niveau quantique, on sait calculer l'évolution de la position moyenne de la particule en fonction du temps :



Deux questions à partir de la proposition précédente :

→ Trouve-t-on :  $\langle p \rangle_t = m \frac{d\langle x \rangle_t}{dt}$  ?

→ La quantité  $\langle p \rangle_t$  est-elle indépendante du temps pour une particule libre ?

$$\langle p \rangle_t \stackrel{?}{=} \langle p \rangle_0$$

Première question : trouve-t-on  $\langle p \rangle_t = m \frac{d\langle x \rangle_t}{dt}$  ?

L'évolution de la position moyenne de la particule est donnée par

$$\frac{d\langle x \rangle_t}{dt} = \frac{d}{dt} \int x \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx = \int x \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi dx + \int x \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dx$$

On injecte alors l'évolution donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}$$

Intégrations par parties en supposant que  $\psi$  tend vers 0 quand  $|x| \rightarrow \infty$

$$m \frac{d\langle x \rangle_t}{dt} = -i\hbar \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \quad \text{à vérifier en exercice}$$

Est-ce le résultat  $\langle p \rangle_t$  souhaité ?

$$(\text{avec la définition } \langle p \rangle_t = \int p |\varphi(p, t)|^2 dp)$$

Un résultat utile pour la suite du cours  $\varphi(p) \xleftrightarrow{\text{TF}} \psi(x)$

Comment s'exprime  $\langle p \rangle = \int p |\varphi(p)|^2 dp$  en fonction de  $\psi(x)$  ?

On réécrit cette valeur moyenne sous la forme :  $\langle p \rangle = \int \varphi^*(p) p \varphi(p) dp$

isométrie :  $\int \varphi_1^*(p) \varphi_2(p) dp = \int \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx$

dérivation :  $\varphi_2(p) = p \varphi(p) \xleftrightarrow{\text{TF}} \psi_2(x) = -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx}$

$$\varphi_1^*(p) = \varphi^*(p) \xleftrightarrow{\text{TF}} \psi_1^*(x) = \psi^*(x)$$

d'où le résultat :  $\langle p \rangle = -i\hbar \int \psi^*(x) \frac{d\psi}{dx} dx$

On a donc bien :  $m \frac{d\langle x \rangle_t}{dt} = \langle p \rangle_t$  Première question résolue !

Deuxième question :  $\langle p \rangle$  est-elle constante pour une particule libre ?

On revient à l'éq. de Schrödinger pour une particule libre :  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

On utilise la transformation de Fourier :

$$\psi(x, t) \longleftrightarrow \varphi(p, t) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \longleftrightarrow -\frac{p^2}{\hbar^2} \varphi(p, t)$$

La TF de l'équation de Schrödinger est donc :  $i\hbar \frac{\partial \varphi(p, t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \varphi(p, t)$

et s'intègre facilement pour donner :  $\varphi(p, t) = \varphi(p, 0) e^{-ip^2 t / (2m\hbar)}$

$$\text{On en déduit : } |\varphi(p, t)|^2 = |\varphi(p, 0)|^2$$

La densité de probabilité pour l'impulsion d'une particule libre n'évolue pas

En particulier, on trouve bien :  $\langle p \rangle_t = \langle p \rangle_0$  Deuxième question résolue !

Anticipons un peu sur la suite du cours...

Nous verrons bientôt comment généraliser l'éq. de Schrödinger « libre »

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

au cas d'une particule en mouvement dans un potentiel  $V(x)$

➡ La distribution de probabilité pour l'impulsion est toujours donnée par

$$\mathcal{P}(p, t) = |\varphi(p, t)|^2 \quad \psi(x, t) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi(p, t)$$

➡ On montrera en exercice que la relation  $\langle p \rangle_t = m \frac{d\langle x \rangle_t}{dt}$  reste valable

➡ En revanche, on trouve en général que  $\langle p \rangle_t \neq \langle p \rangle_0$  en présence d'un potentiel  $V(x)$  (comme en physique classique)

3.

Opérateurs position, impulsion, énergie

et

l'équation de Schrödinger générale

## Position et impulsion en mécanique quantique

Valeur moyenne de la position :  $\langle x \rangle = \int x |\psi(x)|^2 dx = \int \psi^*(x) x \psi(x) dx$

Valeur moyenne de l'impulsion :  $\langle p \rangle = \int p |\varphi(p)|^2 dp = \int \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi}{dx} dx$

Structure commune en terme d'opérateur :

$\langle x \rangle = \int \psi^*(x) [\hat{x} \psi(x)] dx$       $\psi(x) \xrightarrow{\hat{x}} x \psi(x)$      multiplication par  $x$

$\langle p \rangle = \int \psi^*(x) [\hat{p} \psi(x)] dx$       $\psi(x) \xrightarrow{\hat{p}} \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi(x)}{dx}$      dérivation par rapport à  $x$  (à  $\hbar/i$  près)

*Nous généraliserons plus tard cette structure à toute quantité physique*

## Retour sur l'équation de Schrödinger pour une particule libre

Nous avons que l'évolution de la fonction d'onde  $\psi(x, t)$  d'une particule libre était régie à une dimension par l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Cette équation peut se réécrire en utilisant l'opérateur impulsion

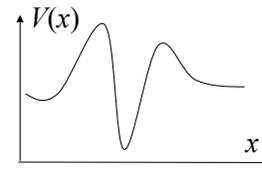
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi \quad \text{avec} \quad \psi(x) \xrightarrow{\hat{p}} \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi(x)}{dx}$$

ou encore  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$  avec  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

$\hat{H}$  est l'opérateur « énergie cinétique », qui coïncide ici avec l'énergie totale car aucun potentiel n'est pris en compte

*Equation de Schrödinger = lien temps - énergie*

## L'équation de Schrödinger en présence d'un potentiel



Nous allons garder la structure  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$

en incluant dans  $\hat{H}$  toutes les contributions à l'énergie de la particule : cinétique et potentielle

$\hat{H}$  : opérateur énergie totale ou « Hamiltonien »

### Principe 2 (cas général)

L'équation de Schrödinger qui régit l'évolution de la fonction d'onde  $\psi(x, t)$  d'une particule de masse  $m$  en mouvement dans le potentiel s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad \text{avec} \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

écriture explicite :  $\hat{H} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t)$

*Equivalent quantique du principe fondamental de la dynamique (Newton)*

4.  
Paquets d'ondes  
et  
inégalité de Heisenberg

Interprétation « physique » de la TF

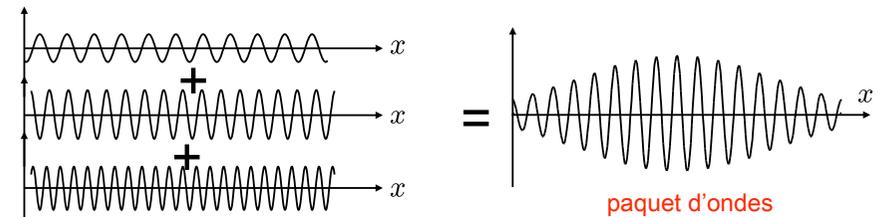
Premier amphi : on a vu l'onde de de Broglie  $\psi(x) = e^{ixp_0/\hbar}$  associée à une particule d'impulsion  $p_0$ , mais cette onde n'est pas normalisée

Aujourd'hui : toute fonction d'onde normalisée peut s'écrire

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ixp/\hbar} \varphi(p) dp$$

$\psi(x)$  est une superposition d'ondes de de Broglie  $e^{ixp/\hbar}$

$\varphi(p)$  représente l'amplitude de l'onde  $e^{ixp/\hbar}$  dans ce développement



La TF est similaire au développement sur une base

Développement d'un vecteur  $\vec{A}$  sur une base orthonormée  $\{\vec{u}_n\}$

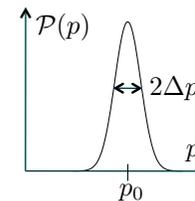
$$\vec{A} = \sum_n \varphi_n \vec{u}_n \quad \text{à relier à} \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \varphi(p) e^{ixp/\hbar} dp$$

Élément à développer	vecteur $\vec{A}$	fonction $\psi(x)$
Type de somme	somme discrète	intégrale
Vecteurs de base	$\vec{u}_n$	$u_p(x) = e^{ixp/\hbar} / \sqrt{2\pi\hbar}$
normalisation	$\sum_n  \varphi_n ^2 = 1$	$\int  \varphi(p) ^2 dp = 1$
« poids » d'un vecteur de base	$ \varphi_n ^2$	$ \varphi(p) ^2$

On peut formaliser cette analogie en introduisant la notion de base continue.  
Hors programme pour ce cours (bases hilbertiennes dans l'amphi 5)

L'exemple d'un paquet d'ondes « gaussien »

Les calculs de TF peuvent être menés analytiquement avec les gaussiennes

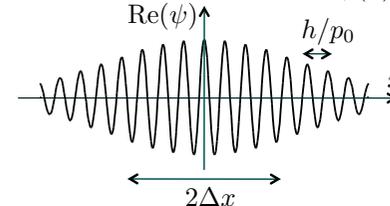


$$\varphi(p) \propto e^{-(p-p_0)^2/(4q^2)} \quad \mathcal{P}(p) \propto e^{-(p-p_0)^2/(2q^2)}$$

moyenne :  $\langle p \rangle = p_0$

écart-type :  $\Delta p = q$

Quelle est la fonction d'onde  $\psi(x)$  correspondante ?  $\psi(x) \propto e^{ip_0x/\hbar} e^{-q^2x^2/\hbar^2}$



$$\mathcal{P}(x) \propto e^{-2q^2x^2/\hbar^2}$$

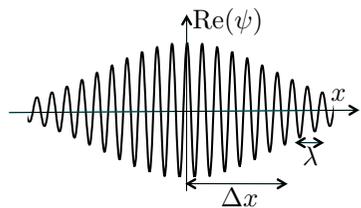
moyenne :  $\langle x \rangle = 0$

écart-type :  $\Delta x = \frac{\hbar}{2q}$

Pour ce paquet d'ondes gaussien, on a toujours :  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

## Deux cas limites intéressants du paquet gaussien

➡ Le paquet quasi-monochromatique :  $\Delta p \ll p_0$



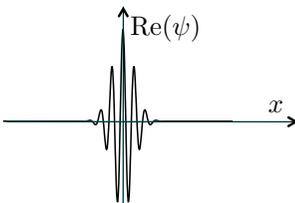
Il y a alors beaucoup d'oscillations de  $\psi(x)$  avec une amplitude similaire car

$$\lambda = \frac{h}{p_0} \ll \Delta x = \frac{h}{2 \Delta p}$$

On retrouve une onde plane dans la limite  $\Delta p \rightarrow 0$

➡ Le paquet bien localisé :  $\Delta x \approx \lambda$

L'impulsion est alors mal définie :  $\Delta p \approx p_0$



$\Delta x \Delta p = \frac{h}{2}$  : un paquet ne peut pas être à la fois bien localisé et quasi-monochromatique

## L'inégalité de Heisenberg dans le cas général

On se donne une fonction d'onde normalisée  $\psi(x)$ , de TF  $\varphi(p)$

Distribution de probabilité pour la position de la particule :  $\mathcal{P}(x) = |\psi(x)|^2$

$$\langle x \rangle = \int x |\psi(x)|^2 dx \quad \Delta x = [\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2]^{1/2}$$

Distribution de probabilité pour l'impulsion de la particule :  $\mathcal{P}(p) = |\varphi(p)|^2$

$$\langle p \rangle = \int p |\varphi(p)|^2 dp \quad \Delta p = [\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2]^{1/2}$$

On a toujours :  $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2}$  cf. PC

égalité atteinte seulement pour les gaussiennes

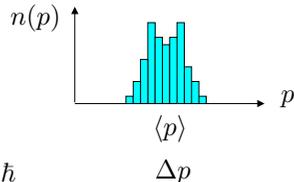
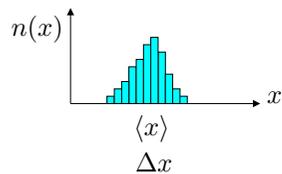
## Signification physique de l'inégalité de Heisenberg

Il est impossible de préparer une particule dans un état tel que la position et l'impulsion de la particule soient simultanément arbitrairement bien définies

On considère  $2N$  particules toutes préparées dans le même état  $\psi(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi(p)$

Mesure de la position sur  $N$  particules

Mesure de l'impulsion sur  $N$  particules



$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2}$$

Ces histogrammes ne peuvent pas être simultanément arbitrairement étroits

Cette relation d'incertitude n'a rien à voir avec la résolution des appareils de mesure, c'est-à-dire la largeur des canaux des histogrammes

## Le cas multi-dimensionnel

Considérons le mouvement d'une particule dans un plan  $Oxy$

$$\psi(x, y) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi(p_x, p_y)$$

$$\text{avec } \varphi(p_x, p_y) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint e^{-i(xp_x + yp_y)} \psi(x, y) dx dy$$

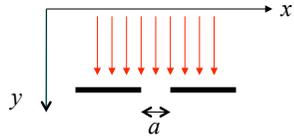
On peut démontrer comme à 1D les inégalités de Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

En revanche, on peut trouver des situations où  $\Delta x \Delta p_y < \frac{\hbar}{2}$

## Inégalité de Heisenberg et diffraction

$$\lambda = \frac{h}{p_y}$$



particules incidentes avec une impulsion selon  $x$  arbitrairement faible

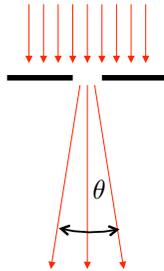
On s'intéresse aux particules qui « passent par le trou ».

On connaît donc leur position selon  $x$  avec une précision  $\Delta x \sim a$

Qu'en est-il de leur impulsion ?

**Diffraction !**  $\theta = \frac{\lambda}{a}$

(on suppose  $\theta \ll 1$  pour simplifier)



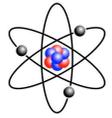
$$\Delta p_x \sim \frac{\lambda}{a} p_y$$

$$\sim \frac{h}{a}$$

La composante selon  $x$  de l'impulsion des particules transmises n'est connue qu'à  $\Delta p_x \sim \theta p_y$  près.

$$\Delta x \Delta p_x \sim h$$

## La stabilité de la matière (1)



La « catastrophe » du rayonnement classique pour un atome :

- un électron tournant autour d'un noyau est accéléré
- une charge accélérée rayonne
- l'énergie d'un électron autour d'un noyau ponctuel n'est pas bornée inférieurement

Mouvement circulaire uniforme avec l'énergie potentielle  $V(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

**équilibre des forces :**  $\frac{mv^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

**énergie cinétique :**  $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

**énergie totale :**  $E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + V(r) = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$   $E_{\text{tot}} \rightarrow -\infty$   
 $r \rightarrow 0$

## La stabilité de la matière (2)

Les atomes sauvés par l'inégalité de Heisenberg...

Confiner une particule dans une région d'étendue  $L$  « coûte » de l'énergie cinétique :

$$\Delta x \leq L \quad \longrightarrow \quad \Delta p \geq \frac{\hbar}{2L} \quad \longrightarrow \quad E_{\text{cin}} \sim \frac{\Delta p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8mL^2}$$

Si « l'orbite » de l'électron atomique a une extension trop faible, ce coût en énergie cinétique l'emporte sur le gain en énergie potentielle.

**Minimum de**  $\frac{\hbar^2}{8mL^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}$  **atteint pour**  $L = \frac{\hbar^2}{4m(q^2 / 4\pi\epsilon_0)}$

Raisonnement non rigoureux, mais qui donne bien (à un facteur numérique près) le rayon de Bohr, c'est-à-dire la taille de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène

## En résumé

- Distribution de probabilité pour la position  $|\psi(x)|^2$  et pour l'impulsion  $|\varphi(p)|^2$

$$\psi(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \varphi(p) \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Structure opératorielle :

$$\langle x \rangle = \int \psi^*(x) [\hat{x} \psi(x)] dx \quad \text{Opérateur position : } \psi(x) \xrightarrow{\hat{x}} x \psi(x)$$

$$\langle p \rangle = \int \psi^*(x) [\hat{p} \psi(x)] dx \quad \text{Opérateur impulsion : } \psi(x) \xrightarrow{\hat{p}} \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi(x)}{dx}$$

- Equation de Schrödinger générale :  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$

**Opérateur énergie ou « Hamiltonien »**  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$