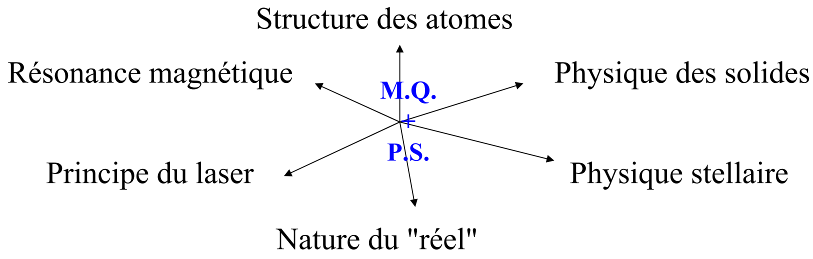
Le cours de physique

18 blocs pour apprendre la mécanique quantique et la physique statistique



Mécanique quantique (7 blocs) + Physique statistique (11 blocs)

Outils pour le cours de mécanique quantique

Livres (existent aussi en anglais) :

- « Mécanique quantique »
- « Problèmes quantiques »

Jean-Louis Basdevant et Jean Dalibard

Les fichiers pdf des diapositives ainsi que les infos du cours sont disponibles à l'adresse :

http://www.enseignement.polytechnique.fr/physique/

⟶ cours ⟶ 2ème année ⟶ physique quantique et statistique PHY432
⟶ transparents

CD-rom d'illustrations et de simulations, Manuel Joffre

Principes de la mécanique quantique

Idée clés de la description quantique d'un système physique :

- Etats du système
- "Observables" de ce système
- Evolution dans le temps du système

Relations d'incertitude :

Avec quel degré de précision peut-on espérer connaître plusieurs grandeurs physiques simultanément ?

1.

Quand a-t-on besoin de la mécanique quantique ?

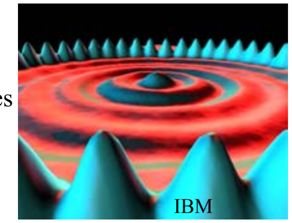
Physique newtonienne ou physique ondulatoire ?

Particule ponctuelle de masse m (non relativiste)

Newton : $(\vec{r}(t), \vec{p}(t))$

Schrödinger : $\psi(\vec{r}, t)$

Electrons confinés sur un “billard” formé par 48 atomes de fer sur une surface de cuivre

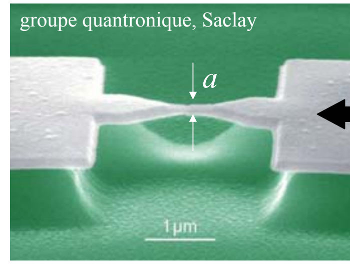


Les concepts classiques cessent de s'appliquer quand :

action caractéristique $<$ constante de Planck h

action $=$ longueur caractéristique $\times$ impulsion caractéristique

Conduction d’électrons par un fil



Pont d’aluminium déposé sur un isolant

électron d’impulsion p

action caractéristique : pa
à comparer à la cte. de Planck : h

Description quantique en terme d'onde plane de longueur d'onde

$$\lambda = h / p \qquad \textbf{(de Broglie)}$$

Les phénomènes non classiques (diffraction) seront dominants si :

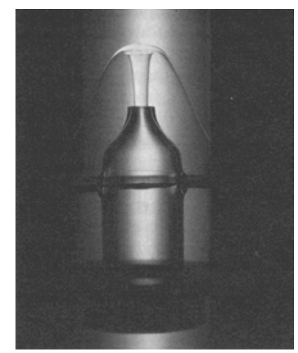
$$\lambda = h/p > a \quad \Longrightarrow \quad h > pa$$

Ordres de grandeur (h=6,63 10^{-34} J s)

Système considéré	Masse (kg)	Vitesse (m/s)	Taille de l'ouverture (m)	$p\,a\,/\,h$
Homme passant une porte	70	1	1	10^{34}
Globule rouge dans un capillaire	10^{-16}	10^{-1}	10^{-4}	10^{11}
Electron dans un fil étroit	$9\ 10^{-31}$	10^{6}	10^{-9}	1

La physique quantique peut également être macroscopique

Superfluidité de l'hélium liquide
à basse température (T < 2,3 K)



Supraconductivité de certains métaux
à basse température

Caractère quantique si : distance entre voisins $<$ $\lambda_{\text{de Broglie}}$

2.

La description d'un système quantique

Une particule ponctuelle

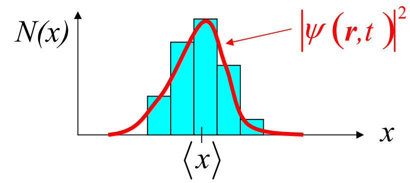
Particule ponctuelle de masse *m* dans un état $\psi(\vec{r},t)$

fonction d'onde complexe : continue et $\int |\psi(\vec{r},t)|^2 \, d^3r = 1$

Mesure de position : le résultat n'est pas certain

variable aléatoire de densité de probabilité $|\psi(\vec{r},t)|^2$

Si on effectue une mesure de position sur un grand nombre de particules, toutes préparées dans le même état ψ, on peut tracer un histogramme :



position moyenne :

$$\langle x \rangle = \int x \, |\psi(\vec{r},t)|^2 \, d^3r$$

Position et impulsion pour une particule moyenne

Position moyenne

$$\langle x \rangle = \int x \, |\psi(\vec{r},t)|^2 \, d^3r = \int \psi^*(\vec{r},t) \, x \, \psi(\vec{r},t) \; d^3r$$

$$\langle \vec{r} \rangle = \int \psi^*(\vec{r},t) \, \vec{r} \, \psi(\vec{r},t) \; d^3r$$

Impulsion moyenne

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \psi^*(\vec{r},t) \, \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi(\vec{r},t) \, d^3r$$

Formulation générale

L'état d'un système quantique est caractérisé par un vecteur $|\psi(t)\rangle$ d'un espace de Hilbert

Particule ponctuelle : $\psi(\vec{r},t)$

Atome d'hydrogène : $\psi(\vec{r}_{\text{élec.}}, \vec{r}_{\text{prot.}}, t)$

Fonctions de carré sommable

Autres types de degrés de liberté : moment magnétique, spin, polarisation

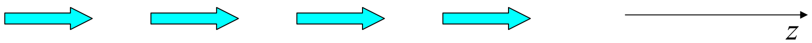
$\longrightarrow$ *Espaces de dimension finie*

Le vecteur $|\psi(t)\rangle$ est normé :

$$\| \, |\psi(t)\rangle \, \|^2 = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 \quad \xrightarrow{\text{généralise}} \quad \int |\psi(\vec{r},t)|^2 \; d^3r = 1$$

Exemple : états de polarisation d'un photon

On dispose désormais de sources délivrant des photons "un par un".



On considère un photon de vecteur d'onde $\vec{k} = k_0\,\vec{u}_z$ bien défini.

L'état de polarisation peut s'écrire comme combinaison des deux états de polarisation linéaire $|\uparrow\rangle$ et $|\rightarrow\rangle$: **dimension 2**

polarisation linéaire quelconque : $|\theta\rangle = \cos\theta|\uparrow\rangle + \sin\theta|\rightarrow\rangle$

polarisation circulaire gauche ou droite : $|\psi_{G,D}\rangle = \dfrac{|\uparrow\rangle \pm i|\rightarrow\rangle}{\sqrt{2}}$

3.

Mesures sur un système quantique

Observables

Relation entre le formalisme et les quantités physiquement mesurables :

$\longrightarrow$ A toute grandeur physique A, on associe un opérateur $\hat{A}$ agissant dans l'espace de Hilbert

En dimension finie, $\hat{A}$ est une matrice carrée

$\longrightarrow$ Les opérateurs $\hat{A}$ associés aux grandeurs physiques sont hermitiens

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \longrightarrow \langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle = \left(\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle\right)^*$$ *Observables*

vecteur ligne matrice carrée vecteur colonne

$\Rightarrow$ $\hat{A}\,|\psi_\alpha\rangle = a_\alpha\,|\psi_\alpha\rangle$ a_α réel

$\{|\psi_\alpha\rangle\}$ base orthonormée

Mesures individuelles

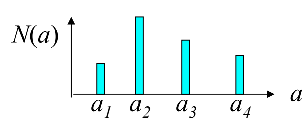
Principe :

- Dans une mesure de A, les seuls résultats possibles sont les valeurs propres a_α de $\hat{A}$.

- La probabilité de trouver la valeur propre a_α, de vecteur propre associé $|\psi_\alpha\rangle$, est dans le cas non dégénéré :

$$P(a_\alpha) = |\langle\psi_\alpha|\psi\rangle|^2$$

Exercice : valeur moyenne des résultats d'une mesure de A, effectuées sur un grand nombre de systèmes tous préparés dans l'état $|\psi\rangle$:



$$\langle A\rangle = \frac{\sum_i a_i N(a_i)}{\sum_i N(a_i)} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$ (réel)

Le cas de la particule ponctuelle

A toute grandeur de la physique newtonienne $A(\vec{r},\vec{p})$, on associe un opérateur $\hat{A}$

$$\langle A\rangle = \int \psi^*(\vec{r},t)\ \left[\hat{A}\psi(\vec{r},t)\right]\ d^3r$$

Action de l'opérateur position $\hat{\vec{r}}$ sur $\psi(\vec{r})$: multiplication par $\vec{r}$

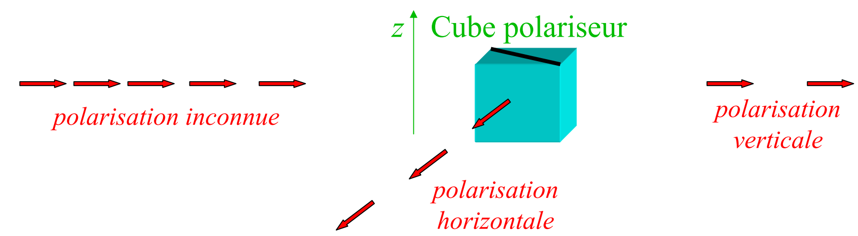
Action de l'opérateur impulsion $\hat{\vec{p}}$ sur $\psi(\vec{r})$:

$(\hbar/i)\times$ dérivation par rapport à $\vec{r}$ (gradient)

Opérateur moment cinétique : $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$

Action sur $\psi(\vec{r},t)$ $\qquad \hat{L}_z = -i\hbar\left(x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$

Mesure de la polarisation d'un photon



Observable : composante de la polarisation le long de l'axe z

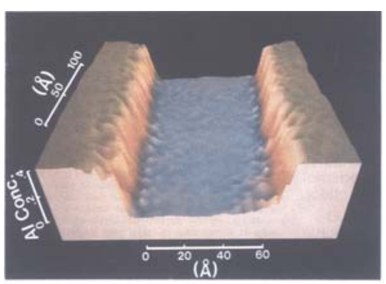
2 résultats possibles : $\varepsilon_z=1$ photon de pol. verticale

$\varepsilon_z=0$ photon de pol. horizontale

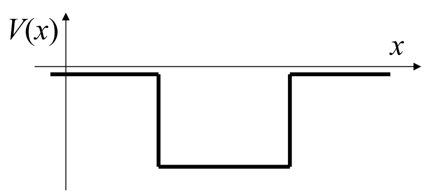
Notion qui sera approfondie lors de l'étude de l'expérience de Stern & Gerlach

Un exemple concret : énergie d'un électron dans un puits quantique

Sandwich de Al Ga As – Ga As – Al Ga As



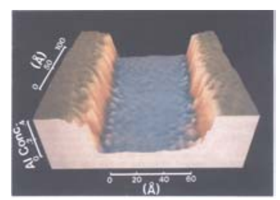
Potentiel électrostatique vu par un électron de conduction



Observable associée à l'énergie : hamiltonien

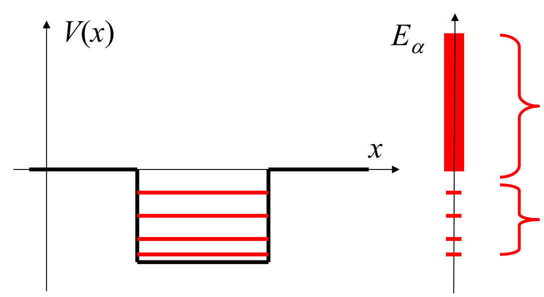
pour une particule ponctuelle à 1D : $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ $\qquad \hat{p} = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$

Le puits quantique (suite)



Une mesure de l'énergie de l'électron ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres E_α de l'hamiltonien :

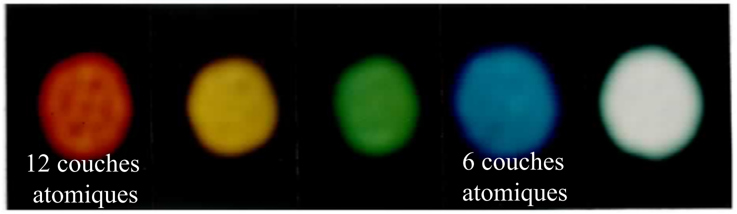
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''_\alpha(x) + V(x)\ \psi_\alpha(x) = E_\alpha\ \psi_\alpha(x)$$



Spectre continu d'énergie : états asymptotiquement libres

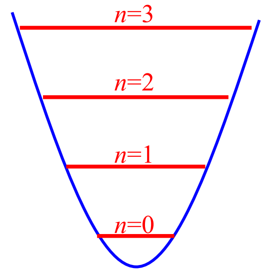
Partie discrète du spectre : états liés

Emission de lumière par un puits quantique de nitrure de gallium



http://www.crhea.cnrs.fr/crhea/index.htm

Un autre exemple : l'oscillateur harmonique



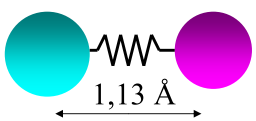
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

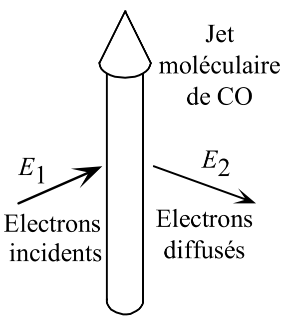
Spectre discret : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

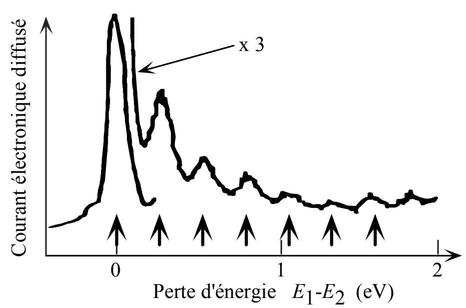
Etat fondamental (n=0) : fonction d'onde gaussienne

$\psi_0(x) \propto \exp\left(-x^2 \,/\, 2a^2\right)$ avec $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Exemple : vibration d'une molécule (CO)







$\hbar\omega = 0,26$ eV

$\omega \,/\, 2\pi = 6\ 10^{13}$ Hz

4.

Evolution dans le temps d'un système quantique

(en dehors d'une mesure)

Evolution temporelle des systèmes

Principe : l'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est donné par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle$$

lien temps-énergie

rôle équivalent à $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v})$ en physique newtonienne

Pour un système isolé, $\hat{H}$ est indépendant du temps

Cette équation fait alors jouer un rôle particulier aux vecteurs propres de $\hat{H}$

Résolution de l'équation de Schrödinger

Si on a pu déterminer les vecteurs propres $|\psi_\alpha\rangle$ et les valeurs propres E_α

$$\hat{H}\,|\psi_\alpha\rangle = E_\alpha\,|\psi_\alpha\rangle \qquad (\hat{H} \text{ indépdt. du temps})$$

alors, pour tout état initial $|\psi(0)\rangle$, il suffit de :

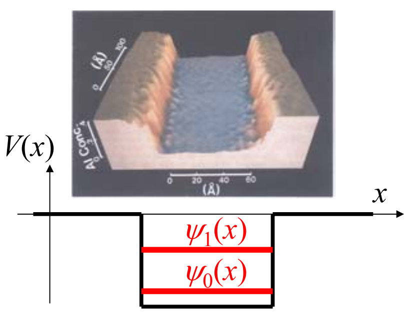
- décomposer $|\psi(0)\rangle$ sur la base $|\psi_\alpha\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_\alpha C_\alpha\,|\psi_\alpha\rangle \quad \text{avec} \quad C_\alpha = \langle\psi_\alpha|\psi(0)\rangle$$

- obtenir le vecteur $|\psi(t)\rangle$ à n'importe quel instant ultérieur grâce à :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_\alpha C_\alpha\, e^{-iE_\alpha t/\hbar}\,|\psi_\alpha\rangle$$

Un exemple d'évolution : mouvement dans un puits carré



Si l'état initial est $\psi(x,0) = \psi_0(x)$

$$\psi(x,t) = e^{-iE_0t/\hbar}\,\psi_0(x)$$

$$\longrightarrow \quad |\psi(x,t)|^2 = |\psi_0(x)|^2$$

Pas de mouvement !

$\longrightarrow$ *état stationnaire*

Si $\psi(x,0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(x) + \psi_1(x)\right)$

alors $\psi(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_0t/\hbar}\,\psi_0(x) \;+\; e^{-iE_1t/\hbar}\,\psi_1(x)\right)$

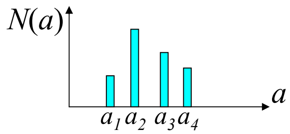
Modulation de $|\psi(x,t)|^2$ à la pulsation $(E_1 - E_0)/\hbar$

5.

Relations d'incertitude

Avec quelle précision peut-on mesurer une observable ?

On considère N systèmes tous préparés dans le même état $|\psi\rangle$



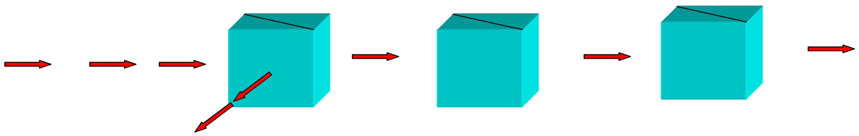
Valeur moyenne des résultats : $\langle a\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

Variance : $\Delta a^2 = \langle a^2\rangle - \langle a\rangle^2$

$$= \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \left(\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\right)^2$$

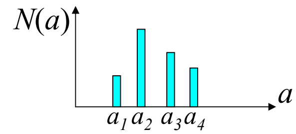
Peut-on avoir un résultat certain ($\Delta a = 0$) ? Oui, si $|\psi\rangle$ état propre de $\hat{A}$

$$|\psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle \longrightarrow \langle a\rangle = a_\alpha \qquad \Delta a = 0$$



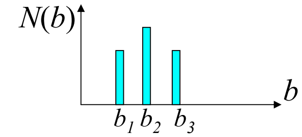
Avec quelle précision peut-on mesurer deux observables ?

On considère $2N$ systèmes tous préparés dans le même état $|\psi\rangle$



Mesure de A sur N systèmes

$\langle a\rangle \qquad \Delta a$



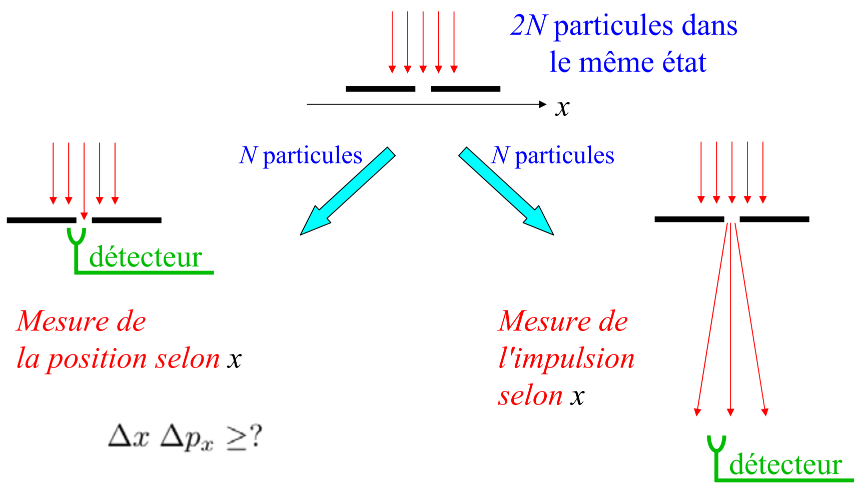
Mesure de B sur N systèmes

$\langle b\rangle \qquad \Delta b$

Peut-on avoir simultanément $\Delta a = 0$ et $\Delta b = 0$? En général, non !

$$\Delta a\,\Delta b \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\left[\hat{A},\hat{B}\right]|\psi\rangle\right| \qquad \text{avec} \qquad \left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Exemple d'application : position & impulsion



$\Delta x\,\Delta p_x \geq ?$

Position & impulsion (2)

Commutateur $[\hat{x},\hat{p}_x] = ?$

$$\left(x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi(x) = i\hbar\,\psi(x) \longrightarrow [\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar$$

La relation générale $\Delta a\,\Delta b \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\left[\hat{A},\hat{B}\right]|\psi\rangle\right|$

donne alors : $\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar/2$

Cette relation d'incertitude n'a rien à voir avec la résolution des appareils de mesure, c'est-à-dire la largeur des canaux des histogrammes