

L'expérience de Stern et Gerlach

Chapitre 8

L'expérience de Stern et Gerlach

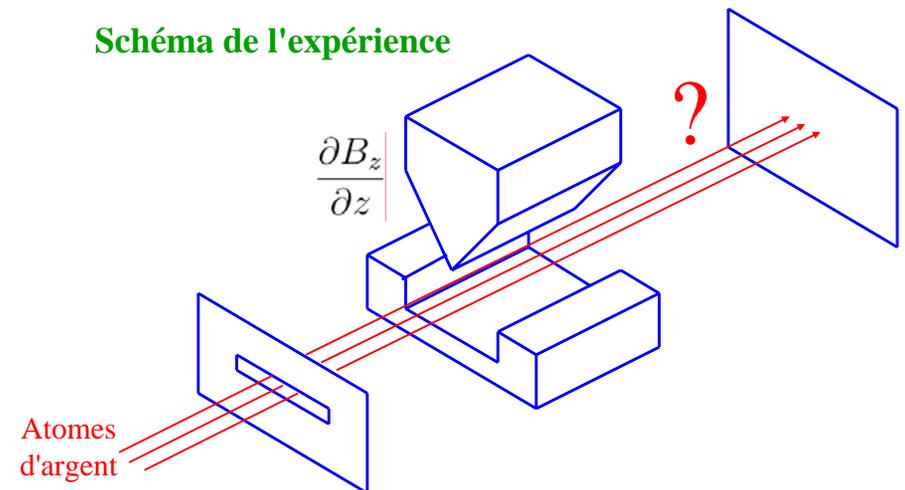
Sur un exemple concret :

- Construction de l'espace des états
- Détermination "expérimentale" des relations de commutation entre observables
- Description explicite d'une mesure sur un système quantique

extension spatiale et durée non nulles

1. Le principe de l'expérience et son interprétation classique

Schéma de l'expérience



D'une éventuelle déviation des atomes dans la zone de gradient, on va essayer de remonter à des paramètres concernant la structure atomique

Un dipole magnétique classique plongé dans un champ magnétique

Energie d'interaction : $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

Couple agissant sur le moment magnétique : $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

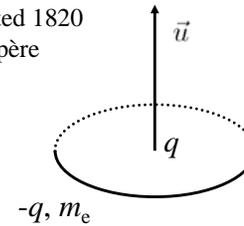
Rotation de l'aiguille aimantée d'une boussole, qui s'aligne avec le champ magnétique terrestre

Force agissant sur le moment magnétique $\vec{F} = \sum_{i=x,y,z} \mu_i(t) \vec{\nabla} B_i$

Attire ou repousse le moment magnétique des zones de grands champs magnétiques

Modèle classique de dipole magnétique atomique

Ørsted 1820
Ampère



Charge $+q$ à l'origine

Charge $-q$ en mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v

Moment cinétique : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e r v \vec{u}$

Moment magnétique : $\vec{\mu} = i S \vec{u} = \frac{-qv}{2\pi r} \pi r^2 \vec{u} = -\frac{1}{2} q r v \vec{u}$

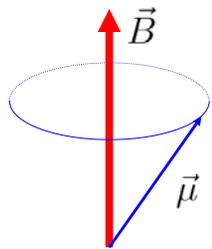
soit $\vec{\mu} = \gamma_0 \vec{L}$ | avec $\gamma_0 = \frac{-q}{2m_e}$ | Bohr 1913

La précession de Larmor

Couple : $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Equation fondamentale de la dynamique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

$\vec{\mu} = \gamma_0 \vec{L}$ soit : $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma_0 \vec{\mu} \times \vec{B}$



Mouvement de précession à la pulsation :

$$\omega_0 = -\gamma_0 B$$

$$\mu_z = \text{constante}$$

La force classique sur le dipole atomique

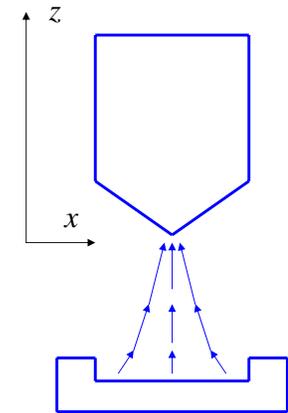
$$\vec{F} = \sum_{i=x,y,z} \mu_i(t) \vec{\nabla} B_i$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_0 \vec{e}_z + b' (z \vec{e}_z - x \vec{e}_x)$$

Après moyenne sur une période de Larmor, il reste :

$$F_z(t) = \mu_z(t) \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu_z(t) b' |$$

$$\mu_z(t) = \mu_z(0) |$$



Force constante

La version macroscopique d'un système gyromagnétique : le lévitrone



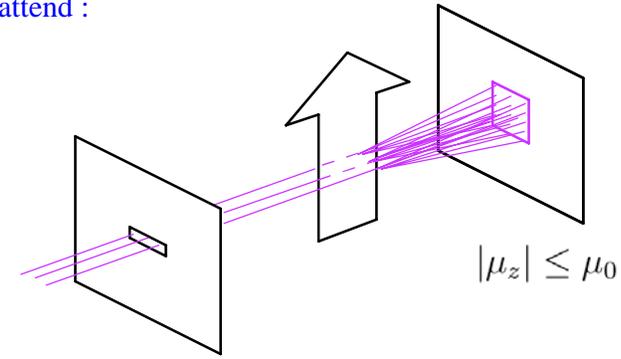
Avec une toupie aimantée en rotation, on assure la proportionnalité entre moment cinétique et moment magnétique.

<http://fascinations.com/>

film à : <http://www.zauber-kurios.de/kurios.htm>

Le signal attendu classiquement

Si chaque atome porte le même moment magnétique $\|\vec{\mu}\| = \mu_0$, on attend :



Pourquoi faire cette expérience en 1921 ?

La vieille théorie des quanta (Sommerfeld 1916) prédisait une "quantification spatiale" qui n'avait jamais été observée.

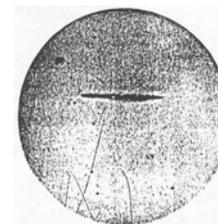
Otto Stern : postdoc d'Einstein (1913), puis assistant de Max Born à l'Institut de Physique Théorique de Frankfort.

Max Born : "Il m'a fallu du temps pour prendre cette idée au sérieux. J'avais toujours pensé que cette quantification spatiale était une sorte d'expression symbolique pour quelque chose qu'on ne comprenait pas. Seul Stern a pris cette idée au pied de la lettre... J'ai essayé de le persuader que ça n'avait pas de sens, mais il m'a répondu que cela valait quand même la peine d'essayer."

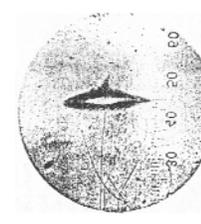
Walther Gerlach : vient d'être embauché à l'Institut de Physique Expérimentale

Le signal expérimental

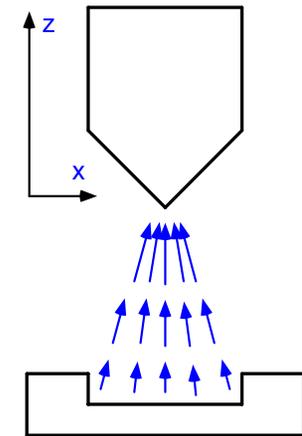
En l'absence de gradient de champ



En présence de gradient de champ



Résultat : $\mu_z \approx \pm 10^{-23} \text{ J/T}$



Triomphe de la vieille théorie des quanta ?

Einstein – Ehrenfest 1922:

“Comment les atomes prennent-ils leur orientation ?”

Les temps d'alignement des atomes avec le champ magnétique sont beaucoup plus longs que la durée de l'expérience...

La vieille théorie des quanta avait permis de prévoir un effet, et l'observation même de cet effet montrait l'incohérence du modèle!

Peut-on rendre compte de l'ordre de grandeur mesuré?

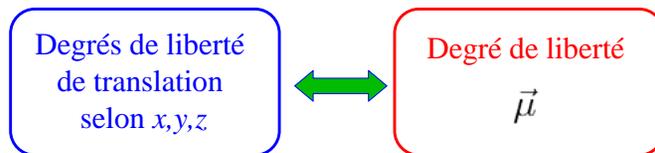
Classiquement : $\vec{\mu} = \gamma_0 \vec{L}$ avec $\gamma_0 = \frac{-q}{2m_e}$

Quantiquement : $|\vec{L}| \sim \hbar$

Magnéton de Bohr : $\mu_B = -\frac{\hbar q}{2m_e} = -9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$

2.

La description quantique du système



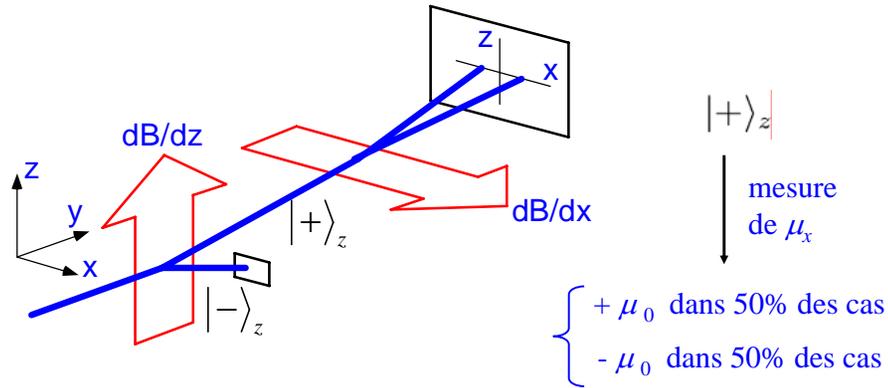
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{externe}} \otimes \mathcal{E}_{\text{interne}} \\ (\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))^3$$

3.

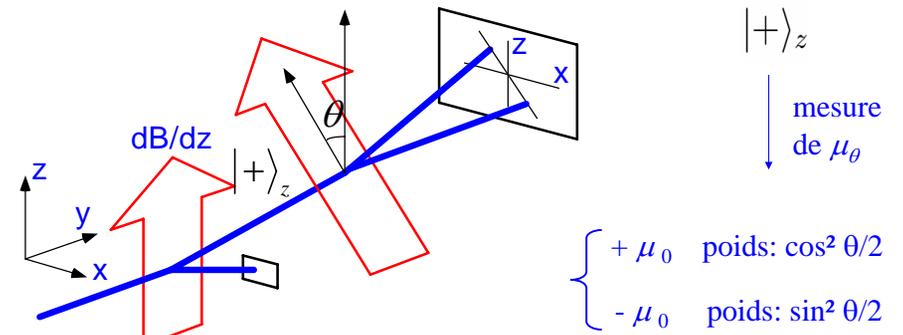
Les observables $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$

et leurs relations de commutation

Les observables $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y$



Mesure selon un axe quelconque



Les relations de commutation

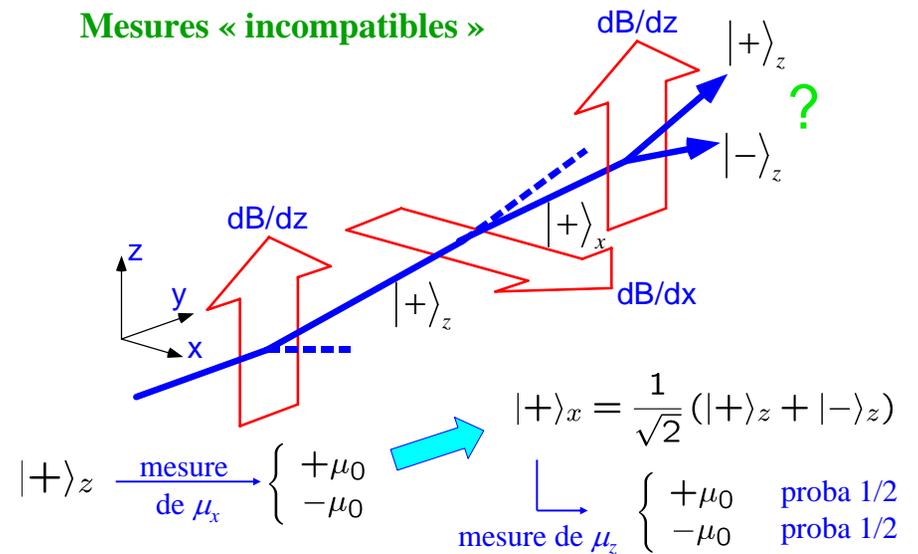
$$[\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y] = 2i\mu_0\hat{\mu}_z \quad [\hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z] = 2i\mu_0\hat{\mu}_x \quad [\hat{\mu}_z, \hat{\mu}_x] = 2i\mu_0\hat{\mu}_y$$

à rapprocher de :

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \quad \dots$$

Mesures « incompatibles »



4.
La description complète du problème

L'espace de Hilbert du problème

Pour l'atome d'argent : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{externe}} \otimes \mathcal{E}_{\text{interne}}$

$$(\mathcal{L}^2(R))^3 \quad \{ |+\rangle_z, |-\rangle_z \}$$

Structure d'espace produit tensoriel, chapitre 5, § 6

Un vecteur d'état quelconque s'écrit :

$$|\psi\rangle = |\psi_+\rangle \otimes |+\rangle_z + |\psi_-\rangle \otimes |-\rangle_z \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

où $|\psi_{\pm}\rangle$ sont des éléments de $(\mathcal{L}^2(R))^3$

Probabilité de présence en un point pour $\begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$

Probabilité de présence en \vec{r} dans un état de moment magnétique donné :

$$d^3P_+ = |\psi_+(\vec{r})|^2 d^3r \quad d^3P_- = |\psi_-(\vec{r})|^2 d^3r$$

Probabilité de présence indépendamment de l'état de moment magnétique

$$d^3P = (|\psi_+(\vec{r})|^2 + |\psi_-(\vec{r})|^2) d^3r$$

Normalisation : $\iiint (|\psi_+(\vec{r})|^2 + |\psi_-(\vec{r})|^2) d^3r = 1$

Moment magnétique en mouvement dans un champ magnétique

Etat de l'atome :

$$\begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

Hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \otimes 1_{\text{interne}} + \hat{W}$$

Interaction atome-champ :

$$\hat{W} = -\hat{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -(B_x(\vec{r}) \otimes \hat{\mu}_x + B_y(\vec{r}) \otimes \hat{\mu}_y + B_z(\vec{r}) \otimes \hat{\mu}_z)$$

Cas particulier : $\vec{B} = B \vec{e}_z$

$$\hat{W} = -B_z(\vec{r}) \otimes \hat{\mu}_z = \begin{pmatrix} -\mu_0 B_z(\vec{r}) & 0 \\ 0 & \mu_0 B_z(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

Equation de Schrödinger dans un champ magnétique

L'équation habituelle $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$ s'écrit pour $\vec{B} \parallel Oz$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_+(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_+(\vec{r}, t) - \mu_0 B_z \psi_+(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_-(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_-(\vec{r}, t) + \mu_0 B_z \psi_-(\vec{r}, t)$$

Deux équations de Schrödinger indépendantes pour $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$.

Mouvement d'une particule de masse m dans le potentiel :

$$V_+(\vec{r}) = -\mu_0 B_z \quad V_-(\vec{r}) = +\mu_0 B_z$$

$B_z = B_0 + b'z$: *champ de force dirigé vers le haut* *champ de force dirigé vers le bas*

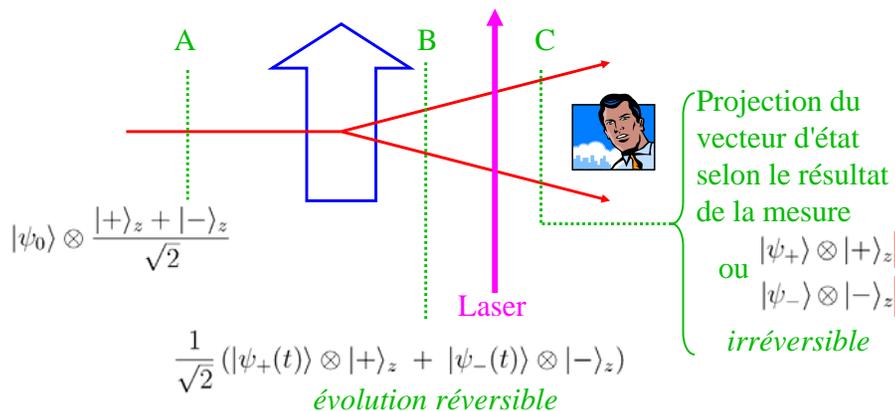
Le clivage des faisceaux dans l'aimant

Considérons l'état initial $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_0(\vec{r}) \\ \psi_0(\vec{r}) \end{pmatrix} \iff |\psi_0\rangle \otimes \frac{|+\rangle_z + |-\rangle_z}{\sqrt{2}}$



Etat non factorisé ou « intriqué » : $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_+(t)\rangle \otimes |+\rangle_z + |\psi_-(t)\rangle \otimes |-\rangle_z)$

Un modèle de mesure en mécanique quantique



- Peut-on faire l'économie du postulat de réduction du paquet d'ondes ?
- Pourquoi l'observateur n'est-il pas lui-même décrit par l'équation de S. ?

Une interprétation "alternative" de la mécanique quantique

