

Le couplage de deux spins $\frac{1}{2}$

La raie à 21 cm de l'atome d'hydrogène

Les corrélations Einstein-Podolsky-Rosen

Chapitre 13, paragraphes 1 et 3
Chapitre 14, paragraphe 1

1.

L'addition de deux spins $\frac{1}{2}$

Système composé :

électron + proton \longrightarrow atome d'hydrogène
neutron + proton \longrightarrow noyau de deutérium

On va s'intéresser ici à $E_{\text{spin}} = E_{\text{spin}}^{(a)} \otimes E_{\text{spin}}^{(b)}$: espace de dimension 4

$$\{|a : \pm\rangle\} \quad \quad \quad \{|b : \pm\rangle\}$$

notation simplifiée : $\{|a : \pm\rangle \otimes |b : \pm\rangle\} = \{|\sigma_a; \sigma_b\rangle\} \quad \sigma_a = \pm, \quad \sigma_b = \pm$

L'opérateur spin total

$$\hat{S} = \hat{S}_a + \hat{S}_b = \hat{S}_a \otimes \hat{1}_b + \hat{1}_a \otimes \hat{S}_b$$

C'est une observable de moment cinétique : $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z, \dots$

Montrons que les résultats possibles lors d'une mesure de S^2 et S_z sont

$$\hat{S}^2 : \hbar^2 s(s+1) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} s=1 & \hat{S}_z : -\hbar, 0, +\hbar \\ & m=-1, 0, +1 \\ s=0 & \hat{S}_z : 0 \quad m=0 \end{array} \right.$$

L'action de \hat{S}_z sur les $|\sigma_a; \sigma_b\rangle$

$$\begin{matrix} \sigma_a = \pm \\ \sigma_b = \pm \end{matrix}$$

Les états $|\sigma_a; \sigma_b\rangle$ sont par construction états propres de \hat{S}_{az} et \hat{S}_{bz}

Ils sont donc états propres de la somme $\hat{S}_z = \hat{S}_{az} + \hat{S}_{bz}$.

$$\hat{S}_z |\sigma_a; \sigma_b\rangle = (\hat{S}_{az} + \hat{S}_{bz}) |\sigma_a; \sigma_b\rangle = \left(\frac{\hbar\sigma_a}{2} + \frac{\hbar\sigma_b}{2} \right) |\sigma_a; \sigma_b\rangle$$

Trois valeurs propres possibles : $\hbar, 0, -\hbar$

$$\begin{array}{lll} \text{avec} & \hat{S}_z |+;+\rangle = \hbar |+;+\rangle & \hat{S}_z |+;- \rangle = 0 \\ & \hat{S}_z |-;- \rangle = -\hbar |-;- \rangle & \hat{S}_z |-;+\rangle = 0 \end{array}$$

On voit bien apparaître un moment cinétique entier, de valeur 0 ou 1...

L'action de \hat{S}^2 sur les $|\sigma_a; \sigma_b\rangle$

On développe le carré : $\hat{S}^2 = (\hat{\vec{S}}_a + \hat{\vec{S}}_b)^2 = \hat{S}_a^2 + \hat{S}_b^2 + 2 \hat{\vec{S}}_a \cdot \hat{\vec{S}}_b$

1. Action de \hat{S}_a^2 et \hat{S}_b^2 sur les $|\sigma_a; \sigma_b\rangle$: facile !

Les $|\sigma_a; \sigma_b\rangle$ sont états propres de \hat{S}_a^2 et \hat{S}_b^2 pour la valeur propre $\frac{3}{4}\hbar^2$

$$(\hat{S}_a^2 + \hat{S}_b^2) |\sigma_a; \sigma_b\rangle = \frac{3}{2}\hbar^2 |\sigma_a; \sigma_b\rangle$$

2. Action de $\hat{\vec{S}}_a \cdot \hat{\vec{S}}_b$ sur les $|\sigma_a; \sigma_b\rangle$: un peu plus difficile...

$$\hat{\vec{S}}_a \cdot \hat{\vec{S}}_b = \hat{S}_{ax}\hat{S}_{bx} + \hat{S}_{ay}\hat{S}_{by} + \hat{S}_{az}\hat{S}_{bz} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{ax}|a: \pm\rangle = \frac{\hbar}{2}|a: \mp\rangle \\ \hat{S}_{ay}|a: \pm\rangle = \pm i\frac{\hbar}{2}|a: \mp\rangle \\ \hat{S}_{az}|a: \pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2}|a: \pm\rangle \end{array} \right.$$

L'action de \hat{S}^2 sur $|+;+\rangle$

On utilise : $\hat{S}^2|+;+\rangle = (\hat{S}_a^2 + \hat{S}_b^2 + 2 \hat{\vec{S}}_a \cdot \hat{\vec{S}}_b)|+;+\rangle$
 $= \frac{3\hbar^2}{2}|+;+\rangle + 2 \hat{\vec{S}}_a \cdot \hat{\vec{S}}_b|+;+\rangle$

$$\begin{aligned} & (\hat{S}_{ax}\hat{S}_{bx} + \hat{S}_{ay}\hat{S}_{by} + \hat{S}_{az}\hat{S}_{bz})|+;+\rangle = \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\right)|-;- \rangle + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)\left(\frac{i\hbar}{2}\right)|-;- \rangle + \left(\frac{\hbar}{2}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\right)|+;+ \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{4}|+;+\rangle \end{aligned}$$

d'où finalement : $\hat{S}^2|+;+\rangle = \frac{3\hbar^2}{2}|+;+\rangle + 2 \frac{\hbar^2}{4}|+;+\rangle = 2\hbar^2|+;+\rangle$

C'est bien de la forme : $\hat{S}^2|+;+\rangle = \hbar^2 s(s+1)|+;+\rangle$ avec $s = 1$

Emergence d'un spin 1

Bilan de ce qu'on vient de trouver pour $|+;+\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{S}^2|+;+\rangle &= 2\hbar^2|+;+\rangle \\ \hat{S}_z|+;+\rangle &= \hbar|+;+\rangle \end{aligned} \quad \rightarrow |s=1, m=1\rangle = |+;+\rangle$$

Pour $|;-;\rangle$, on montre de même que :

$$\begin{aligned} \hat{S}^2|;-;\rangle &= 2\hbar^2|;-;\rangle \\ \hat{S}_z|;-;\rangle &= -\hbar|;-;\rangle \end{aligned} \quad \rightarrow |s=1, m=-1\rangle = |-;- \rangle$$

Comment trouver le troisième membre de la famille $|s=1, m=0\rangle$?

L'état $|s=1, m=0\rangle$ est proportionnel à $\hat{S}_-|s=1, m=1\rangle$

et $\hat{S}_- = \hat{S}_{a-} + \hat{S}_{b-}$, donc $\hat{S}_-|+;+\rangle \propto |+;- \rangle + |-;+\rangle$

$$\rightarrow |s=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+;- \rangle + |-;+\rangle)$$

Emergence d'un spin 0

Dans l'espace de dimension 4 engendré par les vecteurs $\{|\sigma_a; \sigma_b\rangle\}$, on a identifié un sous-espace de dimension 3 correspondant aux états triplets

$$|+;+\rangle \quad |-;- \rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|+;- \rangle + |-;+\rangle)$$

Que penser du vecteur orthogonal à ce sous-espace :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+;- \rangle - |-;+\rangle) ?$$

On vérifiera que $\hat{S}^2(|+;- \rangle - |-;+\rangle) = 0$
 $\hat{S}_z(|+;- \rangle - |-;+\rangle) = 0$

$$\rightarrow |s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+;- \rangle - |-;+\rangle)$$

état singulet

Bilan de cette étude

Espace de dimension 4 :

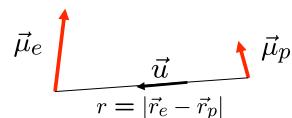
$$\boxed{2 \otimes 2 = 3 \oplus 1}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 spin 1/2 spin 1/2 triplet
 (spin total 1) singlet
 (spin total 0)

Si on avait ajouté deux spins 1 (hors programme) :

L'interaction magnétique électron - proton

Rappel de magnéto-statique :



$$W = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_p - 3(\vec{\mu}_e \cdot \vec{u})(\vec{\mu}_p \cdot \vec{u}))$$

$$- \frac{2\mu_0}{3} \vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_p \delta(\vec{r})$$

$$\text{Ordres de grandeur : } r \simeq a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.053 \text{ nm}$$

$$\langle W \rangle \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_e \mu_p}{a_1^3} \simeq 10^{-5} \text{ eV} \ll 10 \text{ eV}$$

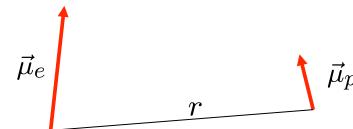
écart typique
entre niveaux
d'énergie 1s – 2s

interaction magnétique << interaction coulombienne

2.

La structure hyperfine de l'atome d'hydrogène

(niveau fondamental)



$$\hat{\mu}_e = \frac{-q}{m_e} \hat{S}_e$$

$$\hat{\bar{\mu}}_p = 2.79 \frac{q}{m_p} \hat{\bar{S}}_p$$

Le niveau fondamental de l'atome d'hydrogène

Espace des états pour l'électron : $E_{\text{externe}}^{(e)} \otimes E_{\text{spin}}^{(e)}$
 pour le proton : $E_{\text{externe}}^{(p)} \otimes E_{\text{spin}}^{(p)}$

De l'espace des états total, on ne garde que le niveau fondamental :

$$E_{\text{externe}}^{(e)} \otimes E_{\text{spin}}^{(e)} \otimes E_{\text{externe}}^{(p)} \otimes E_{\text{spin}}^{(p)}$$

$$r = |\vec{r}_e - \vec{r}_p|$$

$$\text{état lié fondamental (1s)}$$

$$a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \simeq 0.053 \text{ nm}$$

Dégénérescence 4 pour le niveau fondamental

Action de \hat{W} sur le niveau fondamental

On doit trouver les états propres de la matrice 4×4

$$\langle 1s | \otimes \langle e : \sigma_e | \otimes \langle p : \sigma_p | \quad \hat{W} \quad | 1s \rangle \otimes | e : \sigma'_e \rangle \otimes | p : \sigma'_p \rangle$$

Les valeurs propres correspondantes donneront les déplacements des sous-niveaux d'énergie issus du niveau fondamental

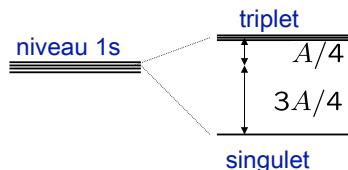
Après calcul de la partie orbitale, on se ramène à la diagonalisation de l'opérateur de spin :

$$\langle e : \sigma_e | \otimes \langle p : \sigma_p | \quad \hat{H}_1 \quad | e : \sigma'_e \rangle \otimes | p : \sigma'_p \rangle$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{2}{3} \frac{\mu_0}{\pi a_1^3} \hat{\mu}_e \cdot \hat{\mu}_p = \frac{A}{\hbar^2} \hat{S}_e \cdot \hat{S}_p$$

$$\text{avec : } A = \frac{16}{3} \times 2.79 \frac{m_e}{m_p} \alpha^2 E_I \simeq 5.87 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

Observation de la raie hyperfine



$$A = 5.87 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

Durée de vie du niveau triplet : 10^7 ans

Expériences de résonance entre niveaux triplet et singulet

$$\text{maser à hydrogène : } \nu = A/h = 1\ 420\ 405\ 751,7684 (17) \text{ Hz}$$

$$\lambda = c/\nu \simeq 21 \text{ cm}$$

A partir des sources astrophysiques :

observation des photons émis par émission spontanée à $\lambda = 21 \text{ cm}$

L'hamiltonien de structure hyperfine $\hat{H}_1 = \frac{A}{\hbar^2} \hat{S}_e \cdot \hat{S}_p$

$$A = 5.87 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

Diagonalisation de $\hat{S}_e \cdot \hat{S}_p$

$$\hat{S}_e \cdot \hat{S}_p = \frac{1}{2} \left((\hat{S}_e + \hat{S}_p)^2 - \hat{S}_e^2 - \hat{S}_p^2 \right) = \frac{\hat{S}^2}{2} - \frac{3\hbar^2}{4}$$

$$\rightarrow \hat{H}_1 |s = 1, m_s\rangle = \frac{A}{\hbar^2} \left(\hbar^2 - \frac{3\hbar^2}{4} \right) |s = 1, m_s\rangle = \frac{A}{4} |s = 1, m_s\rangle$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \hat{H}_1 |s = 0, m_s = 0\rangle &= \frac{A}{\hbar^2} \left(0 - \frac{3\hbar^2}{4} \right) |s = 0, m_s = 0\rangle \\ &= -\frac{3A}{4} |s = 0, m_s = 0\rangle \end{aligned}$$

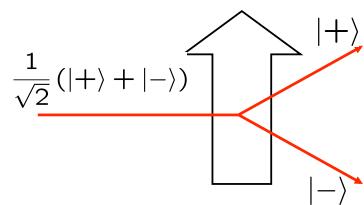
3.

Les corrélations Einstein – Podolsky – Rosen et l'inégalité de Bell

Les propriétés étonnantes des états intriqués comme l'état singulet :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|a : +\rangle \otimes |b : -\rangle - |a : -\rangle \otimes |b : +\rangle)$$

L'indéterminisme de la mécanique quantique



Indéterminisme équivalent à celui d'un tirage à pile ou face ?

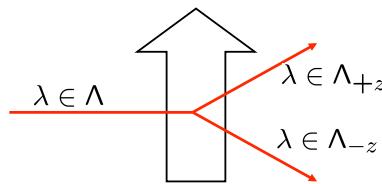
Réponse quantique : Non.
Cet indéterminisme est intrinsèque et ne résulte pas d'une mauvaise connaissance des conditions initiales ou du mouvement ultérieur

Mais est-on sûr que la mécanique quantique soit la théorie ultime ?

Einstein : "Dieu ne joue pas aux dés"

Une théorie déterministe donnant les mêmes résultats que la mécanique quantique peut-elle exister ?

Que serait une théorie déterministe reproduisant les résultats quantiques ?



L'état de chaque atome incident serait caractérisé par un paramètre λ (variable cachée) inaccessible au « physicien quantique » « élément de réalité »

La connaissance de λ permettrait de déterminer avec certitude le résultat de la mesure de S_z par l'intermédiaire d'une fonction $A_z(\lambda)$

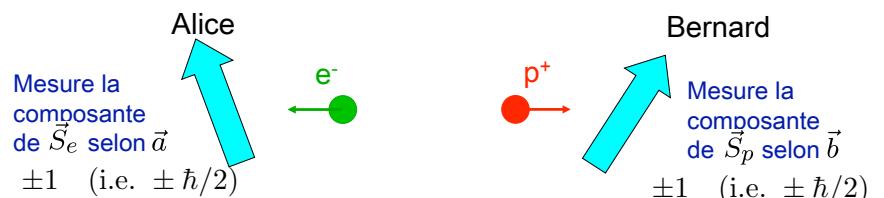
$$\Lambda = \Lambda_{+z} \cup \Lambda_{-z} \quad \begin{cases} \lambda \in \Lambda_{+z} & A_z(\lambda) = +1 \quad (\text{i.e. } +\hbar/2) \\ \lambda \in \Lambda_{-z} & A_z(\lambda) = -1 \quad (\text{i.e. } -\hbar/2) \end{cases}$$

Une théorie déterministe équivalente à la M.Q. peut elle exister ?

- Pour des expériences comportant une seule mesure (S_z) sur une particule unique (spin $1/2$), on ne peut pas conclure.
- Pour des expériences consistant à mesurer des corrélations entre observables, la réponse est **NON** :

théorème de Bell.

Mesure des corrélations entre Alice et Bernard

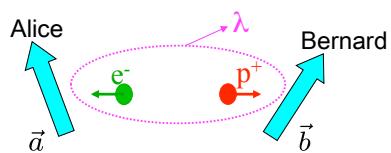


produit des deux résultats pour chaque paire :

$$p = \pm 1 \quad (\text{i.e. } \pm \hbar^2/4)$$

$$\text{fonction de corrélation : } E(\vec{a}, \vec{b}) = \langle p \rangle \quad |E| \leq 1$$

Corrélations dans une théorie « à variable cachée »



$$A(\lambda, \vec{a}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \lambda \in \Lambda_+(\vec{a}) \\ -1 & \text{si } \lambda \in \Lambda_-(\vec{a}) \end{cases}$$

avec $\Lambda = \Lambda_+(\vec{a}) \cup \Lambda_-(\vec{a})$

De même pour Bernard : $B(\lambda, \vec{b})$

Localité $\begin{cases} A(\lambda, \vec{a}, \vec{b}) \\ B(\lambda, \vec{a}, \vec{b}) \end{cases}$

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}) P(\lambda) d\lambda$$

A, B, P inconnues en M.Q. !!!

Démonstration du théorème de Bell

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}) P(\lambda) d\lambda$$

$A(\lambda, \vec{a}), B(\lambda, \vec{b}) = \pm 1$

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}') - E(\vec{a}', \vec{b})$$

$\xrightarrow{?} |S| \leq 2$

$$\underbrace{A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}) + A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}') + A(\lambda, \vec{a}') B(\lambda, \vec{b}') - A(\lambda, \vec{a}') B(\lambda, \vec{b})}_{\underbrace{\quad}_{\substack{A(\lambda, \vec{a}) \{B(\lambda, \vec{b}) + B(\lambda, \vec{b}')\}}} \quad \underbrace{\quad}_{\substack{A(\lambda, \vec{a}') \{B(\lambda, \vec{b}') - B(\lambda, \vec{b})\}}}}$$

0
ou
 ± 2

± 2
ou
 0

± 2

Le théorème de Bell

Quantité formée à partir du résultat de quatre séries de mesures :

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}') - E(\vec{a}', \vec{b})$$

Comme $|E| \leq 1$, on a bien sûr $|S| \leq 4$.

Pour toute théorie à variables cachées locales, J.S. Bell a montré l'inégalité beaucoup plus forte :

$$|S| \leq 2$$

Corrélations quantiques dans l'état singulet

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e : +\rangle \otimes |p : -\rangle - |e : -\rangle \otimes |p : +\rangle)$$

Dans sa mesure de S_{ez} , Alice peut trouver avec probabilité $\frac{1}{2}$:

+1	(i.e. $+\hbar/2$)
-1	(i.e. $-\hbar/2$)

Si Alice trouve -1 , l'état du système après sa mesure est $|e : -\rangle \otimes |p : +\rangle$
Bernard est alors certain de trouver $+1$ dans sa mesure de S_{pz}

Si Alice trouve $+1$, l'état du système après sa mesure est $|e : +\rangle \otimes |p : -\rangle$
Bernard est alors certain de trouver -1 dans sa mesure de S_{pz}

Corrélations EPR (Einstein-Podolsky-Rosen)

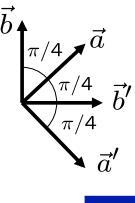
Corrélations quantiques dans l'état singulet (suite)

Corrélation totale entre les résultats d'Alice et Bernard : $E(\vec{e}_z, \vec{e}_z) = -1$

Exercice 1: montrer que cette corrélation totale reste valable tant qu'Alice et Bernard choisissent le même axe d'analyse \vec{u} : $E(\vec{u}, \vec{u}) = -1$

Exercice 2: montrer qu'on a plus généralement : $E(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$

Choix d'angles intéressants :

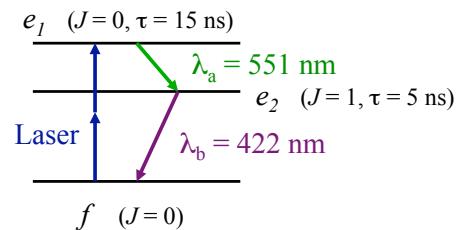


$$S = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ = -2\sqrt{2}$$

Violation de l'inégalité de Bell $|S| \leq 2$!!!

Les expériences d'Orsay (1)

Cascade atomique (atome de calcium)

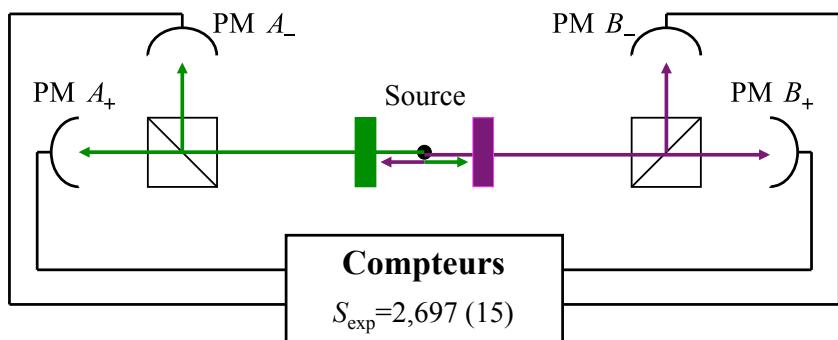


Etat de polarisation de la paire de photons :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a : \uparrow\downarrow\rangle \otimes |b : \uparrow\downarrow\rangle + |a : \leftrightarrow\rangle \otimes |b : \leftrightarrow\rangle)$$

A. Aspect, P. Grangier, G. Roger & J. Dalibard

Les expériences d'Orsay (2)

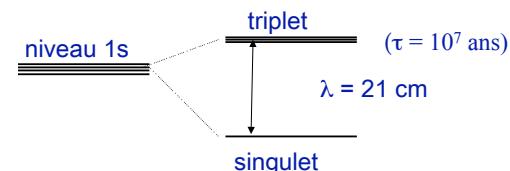


$|S_{\text{exp}}| > 2$: défaite des théories à variables cachées locales

$S_{\text{theo M.Q.}} = 2,70 \approx S_{\text{exp}}$: triomphe de la mécanique quantique

4.

La raie à 21 cm de l'hydrogène en astrophysique



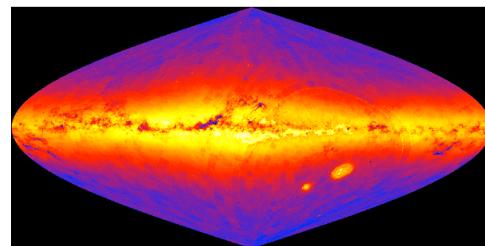
masses d'hydrogène en jeu considérables : on reçoit un signal suffisant de photons émis lors de la désexcitation du niveau triplet

Notre galaxie

200 milliards d'étoiles



vue d'artiste, www.nasa.gov



Forme spirale

Diamètre :
100 000 années-lumière

Epaisseur :
1000 années-lumière

L'hydrogène dans notre galaxie

Entre les étoiles, matière diffuse : 10 % de la masse totale

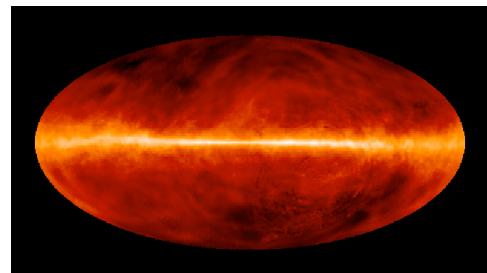
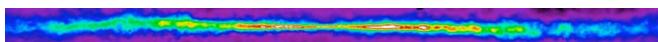
Dans ce gaz interstellaire, 90% des atomes sont de l'hydrogène
0,3 atome/cm³ en moyenne

Nuages de masse comprise entre 0,1 et 1000 masses solaires

*Matière essentielle pour la formation de nouvelles générations d'étoiles,
et qui est trop "froide" pour être vue optiquement*

Observation de la raie à 21 cm

On observe avec des radio-télescopes la raie émise à 21 cm par ces nuages



Effet Doppler

température : 20 à 100 K
vitesse moyenne:
jusqu'à 250 km/s

Effet Zeeman
champ magnétique local

