

1<sup>er</sup> CONTRÔLE CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY432

Lundi 2 avril 2007, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des diapositives, notes personnelles.

**Tourbillons quantiques dans des condensats en rotation**

La rotation des fluides quantiques macroscopiques, comme les condensats de Bose-Einstein, est très différente de celle des gaz classiques. Quand on applique sur un condensat de Bose-Einstein un « agitateur » tournant à la fréquence angulaire  $\Omega$ , on constate d'abord qu'au-dessous d'une fréquence caractéristique  $\Omega_c$ , le condensat reste au repos. Ensuite, pour  $\Omega > \Omega_c$ , le condensat se met en mouvement, mais d'une manière très spécifique : un ou plusieurs tourbillons quantiques apparaissent (voir figure ci-dessous). Ces tourbillons sont des points où la densité du condensat s'annule, et autour desquels la phase de la fonction d'onde qui décrit l'assemblée d'atomes varie de  $2n\pi$ , où  $n$  est un entier non nul.

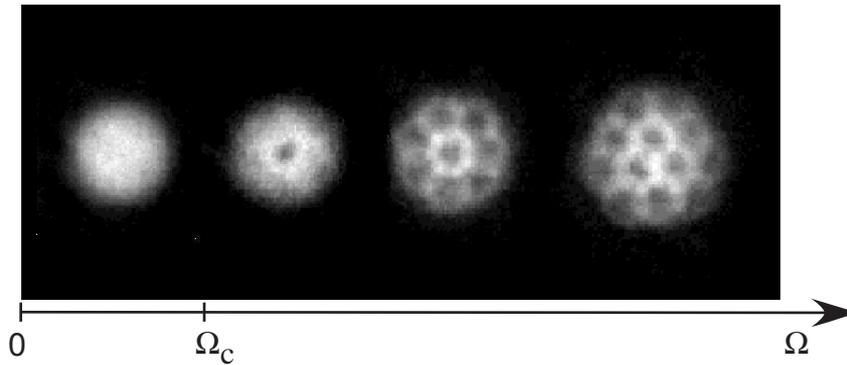


FIG. 1 – Nucléation de tourbillons quantiques dans un condensat de Bose-Einstein en rotation. L'axe de rotation  $0z$  est perpendiculaire au plan de chaque photo. Le nombre de tourbillons dépend de la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$ .

Dans ce problème, le mouvement des atomes est supposé restreint au plan  $0xy$ . On note  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  un trièdre orthonormé de l'espace. On utilise également les coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  dans le plan  $0xy$ ,  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\varphi$  désignant les vecteurs radial et orthoradial dans ce plan.

Chaque partie étudie un aspect utile au problème. Dans la partie 1, on s'intéresse au piégeage d'un atome par un gradient de champ magnétique. La partie 2 étudie les niveaux d'énergie du centre de masse de l'atome dans le piège statique. La partie 3 aborde le problème de la mise en rotation du piège. La partie 4 enfin permet de montrer pourquoi un ou plusieurs tourbillons quantiques sont susceptibles d'apparaître.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes. La partie 4 ne peut être abordée qu'après avoir pris connaissance des résultats des parties précédentes.

**Rappel.** Les énergies propres d'un oscillateur harmonique à une dimension de pulsation  $\omega$  sont  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ , avec  $n$  entier positif ou nul. Les fonctions propres associées sont les fonctions de Hermite  $\phi_n(x) = c_n P_n(x/a) e^{-x^2/(2a^2)}$ , où  $a = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ ; le polynôme de Hermite  $P_n$  a pour degré  $n$  et  $c_n$  est un coefficient de normalisation :

$$P_0(u) = 1 \quad P_1(u) = 2u \quad P_2(u) = 4u^2 - 2 \quad c_n = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2^n n!} a}$$

## 1 Le piégeage magnétique d'atomes

Un atome neutre de spin  $S = 1/2$  est placé dans le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}) = b'(x\vec{u}_x - y\vec{u}_y) + B_0\vec{u}_z$ . On note  $\hat{\vec{\mu}} = \gamma\hat{S}$  l'opérateur moment magnétique associé au spin de l'atome, et  $|\pm\rangle_z$  les états propres de la projection du spin de l'atome suivant  $Oz$ . Dans cette partie, on traite classiquement la position  $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$  du centre de masse de l'atome,  $\vec{r}$  étant donc un paramètre de l'hamiltonien.

**1.1.** En utilisant l'expression des matrices de Pauli, écrire l'hamiltonien du couplage entre le spin et le champ magnétique dans la base  $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$  sous forme d'une matrice  $2 \times 2$ .

**1.2.** Quels sont les niveaux d'énergie magnétique  $E_{\pm}(\vec{r})$  de l'atome ?

**1.3.** On suppose que la distance  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  est petite devant la quantité  $B_0/b'$ . Développer l'expression des niveaux d'énergie à l'ordre 2 inclus en  $r$  et les mettre sous la forme :

$$E_{\pm}(\vec{r}) = \pm \left( E_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \right). \quad (1)$$

On exprimera la pulsation caractéristique  $\omega$  en fonction des données du problème.

**1.4.** Évaluer la fréquence  $\nu = \omega/(2\pi)$  pour un piège de champ  $B_0 = 10^{-4}$  T et de gradient  $b' = 1$  T/m. On considérera des atomes de rubidium, de masse  $m = 1.4 \times 10^{-25}$  kg et de moment magnétique  $\mu = \hbar\gamma/2 = 9.3 \times 10^{-24}$  J/T.

## 2 L'oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions

On suppose que les atomes sont préparés dans l'état de spin conduisant à l'énergie  $E_+(\vec{r})$  dans l'équation 1, cette énergie jouant le rôle d'un potentiel pour le mouvement du centre de masse atomique. On traite désormais quantiquement le mouvement du centre de masse atomique dont l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{r}^2 \quad \text{avec} \quad \hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2. \quad (2)$$

La constante  $E_0$  a été omise pour simplifier les notations. Dans ce qui suit, on ne fera plus apparaître explicitement le degré de liberté de spin, son seul rôle dans le problème étant de donner naissance au potentiel de piégeage  $m\omega^2 r^2/2$ .

**2.1.** Mettre l'hamiltonien  $\hat{H}$  sous la forme  $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$ . En déduire les niveaux d'énergie et leur dégénérescence.

**2.2.** On note  $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$  la composante selon  $z$  du moment cinétique orbital de la particule. Rappeler sans faire de calcul explicite pourquoi  $\hat{H}$  et  $\hat{L}_z$  commutent.

**2.3.** L'expression de  $\hat{L}_z$  en coordonnées polaires est  $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ . En déduire ses valeurs propres et ses fonctions propres  $\psi(r, \varphi)$ .

**2.4.** Donner l'expression de l'état fondamental  $\psi_0(\vec{r})$  et préciser son moment cinétique suivant  $Oz$ .

**2.5.** On s'intéresse au niveau d'énergie  $E = 2\hbar\omega$ .

(a) Montrer qu'on peut choisir les fonctions

$$\psi_{\pm 1}(\vec{r}) = \sqrt{2} \frac{c_0 c_1}{a} (x \pm iy) e^{-r^2/2a^2}. \quad (3)$$

comme base orthonormée du sous-espace propre correspondant.

(b) Montrer que les deux fonctions  $\psi_{\pm 1}(\vec{r})$  sont des états de moment cinétique  $L_z$  bien défini.

- (c) Calculer la densité de probabilité par unité de surface  $\rho(\vec{r})$  de  $\psi_{\pm 1}(\vec{r})$  .  
 (d) On peut associer à une fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$  le courant de probabilité

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left[ \psi^*(\vec{r}) \vec{\nabla}(\psi(\vec{r})) \right] \quad \text{avec en coordonnées polaires} \quad \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \vec{u}_\varphi$$

et le champ de vitesse correspondant s'écrit  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})/\rho(\vec{r})$ . Quel est le champ de vitesse associé à  $\psi_{\pm 1}(\vec{r})$ ? Correspond-il à ce qu'on attend pour un tourbillon?

### 3 Physique quantique dans un référentiel tournant

On met en rotation le piège magnétique en superposant au potentiel harmonique isotrope considéré précédemment une légère perturbation anisotrope, tournant à la pulsation angulaire  $\Omega$ . On ne cherchera pas à caractériser ici cette perturbation, dont le seul effet est d'imposer un référentiel privilégié, le référentiel tournant autour de l'axe  $Oz$  à la pulsation  $\Omega$ . C'est en effet dans ce référentiel (et dans celui-là seulement) que l'hamiltonien est indépendant du temps.

On admettra que ce changement de référentiel s'effectue en remplaçant l'hamiltonien  $\hat{H}$  donné en eq. (2) par :

$$\hat{H}' = \hat{H} - \Omega \hat{L}_z . \quad (4)$$

**3.1.** En utilisant le théorème d'Ehrenfest, calculer les composantes de la vitesse moyenne  $\langle v_x \rangle = d\langle x \rangle/dt$  et  $\langle v_y \rangle = d\langle y \rangle/dt$ . Retrouve-t-on le résultat habituel  $\langle v_i \rangle = \langle p_i \rangle/m$ ,  $i = x, y$ ? Connaissez-vous un autre système pour lequel ce phénomène se produit?

**3.2.** Toujours en utilisant le théorème d'Ehrenfest, évaluer  $d\langle p_x \rangle/dt$  et  $d\langle p_y \rangle/dt$ .

**3.3.** Mettre les résultats précédents sous la forme

$$m \frac{d^2 \langle \vec{r} \rangle}{dt^2} = -m\omega^2 \langle \vec{r} \rangle + \vec{F}(\langle \vec{r} \rangle, \langle \vec{v} \rangle) . \quad (5)$$

**3.4.** On rappelle qu'en mécanique classique, le passage dans un référentiel tournant entraîne l'apparition de deux forces, la force centrifuge  $\vec{F}_{\text{cen.}}$  et la force de Coriolis  $\vec{F}_{\text{Cor.}}$  :

$$\vec{F}_{\text{cen.}}(\vec{r}) = m\Omega^2 \vec{r} \quad \vec{F}_{\text{Cor.}}(\vec{v}) = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} \quad (\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z) . \quad (6)$$

Comment les résultats quantiques trouvés ci-dessus se relient-ils au cas classique?

**3.5.** Quand la fréquence angulaire de rotation  $\Omega$  est supérieure à la pulsation de piégeage  $\omega$ , on constate expérimentalement que le nuage d'atomes est expulsé du piège. Expliquer ce phénomène à partir des équations du mouvement classiques (on pourra négliger la force de Coriolis).

### 4 La nucléation de tourbillons quantiques

On considère une assemblée de  $N$  atomes identiques, tous préparés dans le même état de spin. Ces atomes sont confinés dans un piège de pulsation  $\omega$ , en rotation à la fréquence angulaire  $\Omega$ . On les numérote de 1 à  $N$  et l'hamiltonien dans le référentiel tournant s'écrit

$$\hat{H}_N = \sum_{j=1}^N \frac{\hat{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{r}_j^2 - \Omega \hat{L}_{j,z} , \quad (7)$$

où on a négligé toute interaction entre particules. On admettra que l'expression du potentiel de piégeage  $m\omega^2 r^2/2$  reste valable même si le spin des atomes est plus grand que 1/2.

**4.1.** Les atomes considérés sont des particules de spin 1. Compte tenu de la nature statistique de ces atomes, est-il légitime de chercher la partie orbitale de l'état fondamental du système sous la forme

$$\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \phi(\vec{r}_1) \phi(\vec{r}_2) \dots \phi(\vec{r}_N) ? \quad (8)$$

**4.2.** Expliquer pourquoi les choix  $\phi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r})$  et  $\phi(\vec{r}) = \psi_{\pm 1}(\vec{r})$  fournissent des états  $\Phi$  qui sont états propres de  $\hat{H}_N$ . Calculer l'énergie propre correspondante dans chacun des cas.

**4.3.** Tracer sur un même graphe la variation de l'énergie avec  $\Omega$  pour les états  $\Phi$  correspondant à  $\phi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r})$  et  $\phi(\vec{r}) = \psi_{+1}(\vec{r})$ . Montrer qu'il existe une fréquence de rotation  $\Omega_c$  au dessus de laquelle l'état  $\Phi$  correspondant à  $\phi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r})$  ne peut plus être l'état fondamental du système. Compte tenu du résultat trouvé en question 3.5, ce phénomène vous semble-t-il observable expérimentalement ?

**4.4.** On prend désormais en compte perturbativement les interactions entre atomes. Ces interactions sont modélisées par le potentiel composé de  $N(N-1)/2$  termes d'interaction binaire

$$V = g \sum_{i < j} G(\vec{r}_i - \vec{r}_j), g > 0, \quad (9)$$

où  $G(\vec{r})$  est une fonction positive, centrée en 0, tendant vers 0 à l'infini et d'intégrale égale à 1. La largeur de  $G$  est très inférieure à toute autre échelle de longueur du problème (on pourra si on le souhaite assimiler  $G$  à la distribution de Dirac :  $G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ ).

(a) En utilisant la théorie des perturbations stationnaires dans le cas non dégénéré, évaluer au premier ordre en  $g$  le déplacement d'énergie des états  $\Phi$  correspondant à  $\phi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r})$  et à  $\phi(\vec{r}) = \psi_{+1}(\vec{r})$ . On donne

$$\iint e^{-2r^2/a^2} d^2r = \frac{\pi a^2}{2} \quad \iint r^4 e^{-2r^2/a^2} d^2r = \frac{\pi a^6}{4}$$

(b) Déterminer la nouvelle fréquence angulaire  $\Omega_c$  au dessus de laquelle l'état  $\Phi$  correspondant à  $\phi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r})$  ne peut plus être état fondamental du système.

(c) L'observation de ce phénomène est-elle compatible avec la contrainte trouvée en § 3.5 ?

(d) Pour les atomes de rubidium confinés dans le piège envisagé plus haut, le coefficient  $g$  vaut  $10^{-3}\hbar^2/m$ . Évaluer l'écart relatif  $|\Omega_c - \omega|/\omega$  pour  $N = 1000$  atomes.

(e) A quelle(s) image(s) de la figure 1 le phénomène trouvé ici correspond-il ?

**4.5.** Pour étudier le domaine de rotation  $\Omega \simeq \omega$ , on peut perfectionner le modèle précédent et supposer que l'état fondamental du système correspond à une fonction  $\phi(\vec{r})$  du type

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} C_n \psi_{+n}(\vec{r}), \quad (10)$$

où

$$\psi_{\pm n}(\vec{r}) = d_n (x \pm iy)^n e^{-r^2/2a^2} \quad n \text{ entier positif, } d_n \text{ coefficient de normalisation,} \quad (11)$$

et où les coefficients  $C_n$  sont déterminés par une minimisation de l'énergie (la borne supérieure  $\mathcal{N}$  est un paramètre ajustable).

(a) Montrer que les états  $\psi_{\pm n}(\vec{r})$  ont un moment cinétique  $L_z$  bien défini, égal à  $\pm n\hbar$ .

(b) Montrer que les états  $\psi_{\pm n}(\vec{r})$  sont états propres de  $\hat{H}$  donné en (2) avec la valeur propre  $(n+1)\hbar\omega$ .

(c) Justifier qualitativement le choix de fonction  $\phi(\vec{r})$  pour obtenir une bonne approximation de l'état fondamental  $\Phi$  du système dans le régime de rotation  $\Omega \simeq \omega$ .

(d) Quel profil de densité attend-on pour des états de ce type ?

(e) Les résultats expérimentaux de la figure 1 vous semblent-ils correspondre à ce modèle ?

# Corrigé

## 1 Le piégeage magnétique d'atomes

1.1. L'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{B} = -\frac{\hbar\gamma}{2} \begin{pmatrix} B_0 & b'(x+iy) \\ b'(x-iy) & -B_0 \end{pmatrix} .$$

1.2. Les valeurs propres de l'hamiltonien sont

$$E_{\pm}(\vec{r}) = \pm \frac{\hbar\gamma}{2} (B_0^2 + b'^2 r^2)^{1/2} .$$

1.3. Pour  $b'r \ll B_0$  on a

$$E_{\pm}(\vec{r}) \simeq \pm \frac{\hbar\gamma B_0}{2} \left(1 + \frac{b'^2 r^2}{2B_0^2}\right) = \pm \left(E_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)$$

avec

$$E_0 = \frac{\hbar\gamma B_0}{2} \quad \omega = \left(\frac{\hbar\gamma b'^2}{2mB_0}\right)^{1/2} .$$

1.4. On prend  $\mu = \hbar\gamma/2$  égal au magnéton de Bohr et on obtient

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{b'}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{mB_0}} = 130 \text{ Hz} .$$

## 2 L'oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions

2.1. L'hamiltonien  $\hat{H}$  s'écrit  $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$  avec

$$\hat{H}_x = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 \quad , \quad \hat{H}_y = \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{y}^2 .$$

Ces deux hamiltoniens correspondent chacun à un oscillateur à une dimension et ils commutent. Leur base propre commune est l'ensemble des fonctions à deux variables

$$\phi_{n_x, n_y}(\vec{r}) = \phi_{n_x}(x) \phi_{n_y}(y) .$$

Ces fonctions sont états propres de  $\hat{H}$  avec la valeur propre  $E_{n_x, n_y} = (n_x+1/2)\hbar\omega + (n_y+1/2)\hbar\omega$ . Les valeurs propres de  $\hat{H}$  sont donc de la forme  $E_n = (n+1)\hbar\omega$ , où  $n$  est un entier positif ou nul. Le sous-espace propre associé à  $E_n$  est engendré par les fonctions  $\phi_{n_x, n_y}(\vec{r})$  avec  $n_x + n_y = n$  et il a pour dimension  $n+1$ .

2.2. Le fait qu'un opérateur  $\hat{O}$  commute avec  $\hat{L}_z$  traduit le fait que cet opérateur est invariant par rotation autour de l'axe  $z$ . On sait que le terme d'énergie cinétique  $\hat{p}^2/(2m)$  est effectivement invariant par rotation. Comme on a choisi un oscillateur isotrope, avec la même fréquence d'oscillation selon  $x$  et  $y$ , le terme d'énergie potentielle  $m\omega^2 \hat{r}^2/2$  est également invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ , et il commute lui aussi avec  $\hat{L}_z$ . On en déduit donc que  $\hat{H}$  et  $\hat{L}_z$  ont une base de vecteurs propres commune.

2.3. L'équation aux valeurs propres pour  $\hat{L}_z$  s'écrit en coordonnées polaires

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(r, \varphi)}{\partial \varphi} = A \psi(r, \varphi) \quad , \quad A \text{ réel} \quad ,$$

et elle s'intègre immédiatement en  $\psi(r, \varphi) = F(r) e^{iA\varphi/\hbar}$ , où  $F(r)$  est une fonction quelconque. La condition  $\psi(r, \varphi) = \psi(r, \varphi + 2\pi)$  impose alors que  $A/\hbar$  est entier positif, négatif ou nul. En notant cet entier  $m$ , on met donc la fonction propre recherchée sous la forme  $\psi(r, \varphi) = F(r) e^{im\varphi}$ , la valeur propre associée étant  $m\hbar$ .

**2.4.** L'état fondamental de l'oscillateur à deux dimensions est associé à la valeur propre  $\hbar\omega$ . Cette valeur n'est pas dégénérée, et l'état propre normalisé s'écrit

$$\psi_0(\vec{r}) = c_0^2 e^{-r^2/(2a^2)} \quad \text{avec} \quad c_0^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} .$$

C'est un état donc l'expression est indépendante de  $\varphi$  : c'est donc un état propre de  $\hat{L}_z$ , de moment cinétique nul.

**2.5. (a)** Le sous-espace propre associé à l'énergie  $2\hbar\omega$  est de dimension 2 et il est engendré par les deux fonctions orthonormées

$$\phi_{1,0}(\vec{r}) = \phi_1(x)\phi_0(y) = \frac{2c_0c_1}{a} x e^{-r^2/(2a^2)} \quad \text{et} \quad \phi_{0,1}(\vec{r}) = \phi_0(x)\phi_1(y) = \frac{2c_0c_1}{a} y e^{-r^2/(2a^2)} .$$

On peut également prendre comme base orthonormée de ce sous-espace propre les deux fonctions suggérées dans l'énoncé

$$\psi_+(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{1,0}(\vec{r}) + i\phi_{0,1}(\vec{r})) \quad , \quad \psi_-(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{1,0}(\vec{r}) - i\phi_{0,1}(\vec{r})) .$$

(b) En coordonnées polaires, ces deux fonctions s'écrivent

$$\psi_{\pm}(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2}c_0c_1}{a} r e^{-r^2/(2a^2)} e^{\pm i\varphi}$$

ce qui montre que ces deux fonctions sont états propres de  $\hat{L}_z$  avec la valeur propre  $\pm\hbar$ .

(c) La densité de probabilité  $\rho(\vec{r})$  est la même pour les deux états  $\psi_{\pm}(\vec{r})$  et vaut

$$\rho(\vec{r}) = |\psi_{\pm}(\vec{r})|^2 = \frac{2c_0^2c_1^2}{a^2} r^2 e^{-r^2/a^2} = \frac{r^2 e^{-r^2/a^2}}{\pi a^4} .$$

Cette densité de probabilité est nulle en  $\vec{r} = 0$ , comme attendu pour un état de moment cinétique non nul.

(d) Le courant de probabilité est orthoradial et le champ de vitesse associé vaut

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{mr} \vec{u}_{\varphi} .$$

Ce champ de vitesse correspond effectivement à ce qu'on attend pour un tourbillon, avec une vitesse qui croît quand on se rapproche de l'axe (c'est l'inverse d'une rotation rigide où la vitesse croît avec la distance à l'axe). Notons que cette divergence de la vitesse en  $r = 0$  n'entraîne pas de divergence de l'énergie cinétique car la densité de probabilité tend vers 0 à l'origine.

### 3 Physique quantique dans un référentiel tournant

**3.1.** Le théorème d'Ehrenfest conduit à

$$\langle v_x \rangle = \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [x, \hat{H}'] \rangle \quad \langle v_y \rangle = \frac{d\langle y \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [y, \hat{H}'] \rangle$$

On évalue ensuite les commutateurs  $[\hat{x}, \hat{H}']$  et  $[\hat{y}, \hat{H}']$ . On a vu dans le cours que  $[\hat{x}, \hat{H}] = i\hbar\hat{p}_x/m$  et  $[\hat{y}, \hat{H}] = i\hbar\hat{p}_y/m$ . On trouve par ailleurs

$$[\hat{x}, \Omega L_z] = -i\hbar\Omega\hat{y} \quad [\hat{y}, \Omega L_z] = i\hbar\Omega\hat{x}$$

ce qui conduit à

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p_x \rangle}{m} + \Omega\langle y \rangle \quad \frac{d\langle y \rangle}{dt} = \frac{\langle p_y \rangle}{m} - \Omega\langle x \rangle .$$

Dans le référentiel tournant, on n'a donc pas  $\langle \vec{p} \rangle = m\langle \vec{v} \rangle$ . La situation est analogue à celle qu'on rencontre quand on place une particule chargée dans un champ magnétique. La similarité entre les deux situations peut être rendue plus évidente si on met l'hamiltonien  $\hat{H}'$  sous la forme

$$\hat{H}' = \frac{(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{r}}))^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega^2 - \Omega^2)r^2 \quad \text{avec} \quad q\vec{A}(\vec{r}) = m\vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z.$$

Dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ , un choix possible pour le potentiel vecteur est  $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{B} \times \vec{u}_z/2$ . Le mouvement d'une particule neutre dans le référentiel tournant et dans le potentiel de piégeage  $m\omega^2 r^2/2$  est donc formellement identique à celui d'une particule chargée placée dans un champ magnétique  $\vec{B} = 2m\vec{\Omega}/q$  et soumise au potentiel de piégeage  $m(\omega^2 - \Omega^2)r^2/2$ .

**3.2.** Le théorème d'Ehrenfest pour les observables  $\hat{p}_x$  et  $\hat{p}_y$  donne

$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [p_x, \hat{H}'] \rangle = -m\omega^2 \langle x \rangle + \Omega \langle p_y \rangle \quad \frac{d\langle p_y \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [p_y, \hat{H}'] \rangle = -m\omega^2 \langle y \rangle - \Omega \langle p_x \rangle.$$

**3.3.** En combinant les réponses aux deux questions précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} &= \frac{d\langle p_x \rangle}{dt} + m\Omega \frac{d\langle y \rangle}{dt} = -m\omega^2 \langle x \rangle + \Omega \langle p_y \rangle + m\Omega \langle v_y \rangle \\ &= -m\omega^2 \langle x \rangle + 2m\Omega \langle v_y \rangle + m\Omega^2 \langle x \rangle \end{aligned}$$

et de même

$$m \frac{d^2 \langle y \rangle}{dt^2} = -m\omega^2 \langle y \rangle - 2m\Omega \langle v_x \rangle + m\Omega^2 \langle y \rangle$$

ce qui a bien la structure proposée par l'énoncé avec

$$\vec{F}(\langle \vec{r} \rangle, \langle \vec{v} \rangle) = 2m\langle \vec{v} \rangle \times \vec{\Omega} + m\Omega^2 \langle \vec{r} \rangle$$

**3.4.** L'équation du mouvement pour le centre du paquet d'ondes de la particule fait donc intervenir les trois forces qu'on trouve en physique classique pour ce problème :

- la force de piégeage  $-m\omega^2 \langle \vec{r} \rangle$ ,
- la force de Coriolis  $2m\langle \vec{v} \rangle \times \vec{\Omega}$ , de structure similaire à la force de Lorentz  $q\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}$  pour une particule chargée dans un champ magnétique,
- la force centrifuge  $+m\Omega^2 \langle \vec{r} \rangle$ . Comme la particule est confinée dans un piège harmonique, l'effet de la force centrifuge est simplement de réduire la raideur du piège, qui passe de  $m\omega^2$  à  $m(\omega^2 - \Omega^2)$ .

**3.5.** Si on néglige la force de Coriolis, l'équation du mouvement classique pour la particule dans le piège tournant est

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m(\omega^2 - \Omega^2) \vec{r}$$

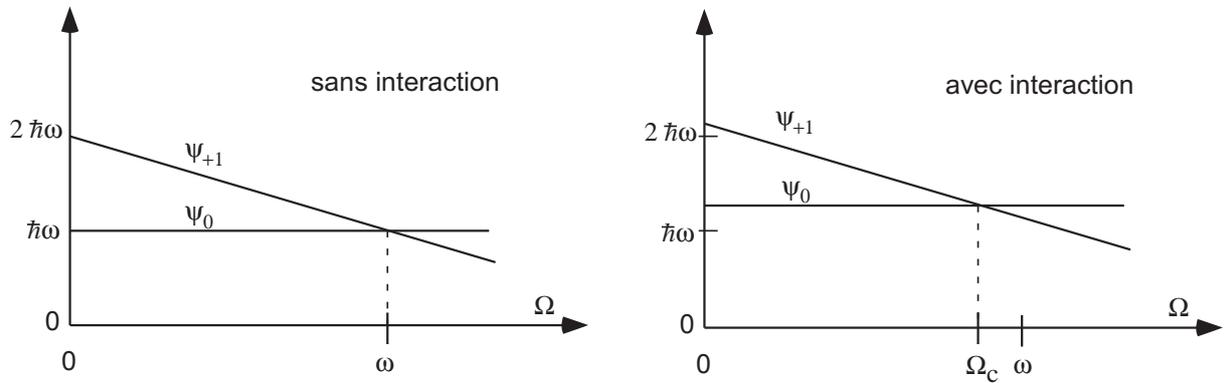
Dès que la fréquence angulaire de rotation  $\Omega$  dépasse la pulsation  $\omega$  du piège, la solution de cette équation tend vers l'infini quand le temps augmente (sauf condition initiale très particulière). Physiquement, cette instabilité vient du fait que la force de rappel  $-m\omega^2 \vec{r}$  n'est pas suffisamment intense pour compenser la force centrifuge  $+m\Omega^2 \vec{r}$ .

## 4 La nucléation de tourbillons quantiques

**4.1.** Les atomes considérés sont des particules de spin 1, donc des bosons. Le vecteur d'état décrivant les  $N$  particules doit donc être symétrique par échange de deux quelconques des particules. Comme l'énoncé précise que toutes les particules sont dans le même état de spin, il faut que la partie orbitale du vecteur d'état soit symétrique par échange de deux particules. C'est bien le cas du vecteur d'état proposé.

**4.2.** Les fonctions d'onde  $\psi_0(\vec{r})$  et  $\psi_{\pm 1}(\vec{r})$  sont états propres de l'hamiltonien  $\hat{H}$  (valeurs propres  $\hbar\omega$  et  $2\hbar\omega$ ) et de  $\hat{L}_z$  (valeurs propres 0 et  $\pm\hbar$ ). Elles sont donc états propres de l'hamiltonien dans le référentiel tournant  $\hat{H}'$  avec les valeurs propres  $\hbar\omega$  pour  $\psi_0$ , et  $2\hbar\omega \mp \hbar\Omega$  pour  $\psi_{\pm 1}$ . Les fonctions d'onde à  $N$  atomes construites à partir de  $\psi_0$  et  $\psi_{\pm 1}$  sont donc fonctions propres de l'hamiltonien  $H_N$  qui est simplement la somme des  $N$  hamiltoniens  $\hat{H}'_j$ , avec les valeurs propres  $N\hbar\omega$  pour  $\psi_0$  et  $N\hbar(2\omega \mp \Omega)$  pour  $\psi_{\pm 1}$ .

**4.3.** La variation de ces énergies avec  $\Omega$  est tracée sur la figure suivante (à gauche). On voit que pour  $\Omega > \Omega_c = \omega$ , l'énergie de l'état correspondant à  $\psi_0$  devient plus grande que l'énergie de l'état correspondant à  $\psi_{\pm 1}$ . Pour  $\Omega > \omega$ , l'état fondamental du système ne peut donc plus être  $\psi_0(\vec{r}_1) \dots \psi_0(\vec{r}_N)$ , l'état « à un tourbillon »  $\psi_{+1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{+1}(\vec{r}_N)$  étant un candidat possible pour cet état fondamental. Malheureusement, pour des fréquences angulaires de rotation supérieures à  $\omega$ , on a vu à la question 3.5 que le piège était instable. On ne peut donc pas (encore) expliquer l'apparition de tourbillons.



**4.4. (a)** Le terme d'interaction va venir déplacer différemment l'énergie de l'état correspondant à  $\psi_0$  et à  $\psi_{\pm 1}$ . À l'ordre un de la théorie des perturbations, le déplacement d'énergie de l'état correspondant à  $\psi_0$  est

$$\Delta E_0 = g \frac{N(N-1)}{2} \int |\psi_0(\vec{r}_1)|^2 |\psi_0(\vec{r}_2)|^2 G(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d^2r_1 d^2r_2 \simeq g \frac{N(N-1)}{2} \int |\psi_0(\vec{r})|^4 d^2r$$

et une expression similaire pour  $\psi_{+1}$ . On a utilisé ici le fait que les  $N(N-1)/2$  termes de la somme donnant le potentiel d'interaction ont une contribution identique, ainsi que l'hypothèse de largeur étroite pour la fonction  $G(\vec{r})$ . On obtient après calcul :

$$\Delta E_0 = \frac{N(N-1)g}{4\pi a^2} \quad \Delta E_{+1} = \frac{N(N-1)g}{8\pi a^2} = \frac{\Delta E_0}{2} .$$

**(b)** Comme l'énergie de l'état « à un tourbillon » est moins affectée par les interactions que l'état sans tourbillon  $\psi_0$  (l'état à un tourbillon occupe un volume plus grand dans l'espace), la fréquence angulaire  $\Omega_c$  pour laquelle les énergies des deux états coïncident est abaissée (voir figure ci-dessus, à droite). Cette coïncidence se produit maintenant pour la fréquence angulaire critique  $\Omega_c$  telle que

$$N\hbar\omega + \frac{N(N-1)g}{4\pi a^2} = N\hbar(2\omega - \Omega_c) + \frac{N(N-1)g}{8\pi a^2}$$

soit

$$\Omega_c = \omega - \frac{(N-1)g}{8\pi a^2 \hbar} = \omega \left( 1 - \frac{(N-1)gm}{8\pi \hbar^2} \right) .$$

**(c)** Cette fréquence  $\Omega_c$  est strictement inférieure à la fréquence  $\omega$ . Dans la plage de fréquence  $]\Omega_c, \omega[$ , on peut donc espérer que l'état à un tourbillon sera état fondamental du système.

(d) Pour un coefficient  $g = 10^{-3}\hbar^2/m$  et  $N = 1000$  atomes, on trouve un écart relatif

$$\frac{\omega - \Omega_c}{\omega} \simeq \frac{1}{8\pi} \simeq 0.04 .$$

(e) Cet état correspond qualitativement à la deuxième photographie donnée dans l'énoncé. En pratique, les interactions sont plus fortes qu'indiqué dans l'énoncé, ce qui a pour effet d'abaisser la fréquence d'apparition du premier tourbillon par rapport à ce qui a été calculé ci-dessus. Notons également que ces interactions sont en général trop fortes pour être bien décrites par une théorie des perturbations, contrairement au cas envisagé ici.

**4.5. (a)** La fonction d'onde  $\psi_{\pm n}$  varie comme  $e^{\pm in\varphi}$ , ce qui correspond bien à un moment cinétique  $\pm n\hbar$ .

(b) On calcule l'énergie des états  $\psi_{\pm n}$  en faisant agir l'hamiltonien  $\hat{H}$ . Pour calculer le terme d'énergie cinétique, on a intérêt à écrire  $\partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)$  et remarquer par exemple que  $(\partial_x + i\partial_y)$  agissant sur  $(x + iy)^n$  donne 0.

(c) En l'absence d'interaction, l'énergie de l'état à  $N$  particules correspondant à  $\psi_{+n}$  vaut  $N[(n+1)\hbar\omega - n\hbar\Omega]$ . Pour  $\Omega = \omega$ , cette énergie vaut  $N\hbar\omega$ , indépendamment de  $n$ . Tous les états  $\psi_{+n}$  sont donc dégénérés quand  $\Omega = \omega$ . Á la question précédente, nous avons vu apparaître cette dégénérescence entre  $\psi_0$  et  $\psi_{+1}$ , mais ce n'était en fait qu'un cas particulier d'une dégénérescence beaucoup plus importante.

Pour décrire correctement l'état fondamental du gaz en présence d'interaction et  $\Omega$  légèrement inférieure à  $\omega$ , il est donc légitime de chercher à approcher cet état par une fonction d'onde qui est une combinaison linéaire d'états d'énergie voisine de l'état fondamental sans interaction  $\psi_0(\vec{r}_1) \dots \psi_0(\vec{r}_N)$ .

(d) L'état  $\phi$  proposé est égal à la gaussienne  $e^{-r^2/(2a^2)}$ , que multiplie un polynôme de degré  $\mathcal{N}$  en la variable  $u = x + iy$ . Ce polynôme complexe a en général  $\mathcal{N}$  racines distinctes dans le plan complexe  $(x, y)$ . En chacune de ces racines, la fonction d'onde s'annule et la phase de la fonction d'onde évaluée sur un petit cercle entourant la racine varie de  $2\pi$ . Chaque zéro du polynôme correspond donc à un tourbillon.

(e) Les photographies 3 et 4 correspondent effectivement à des états à plusieurs tourbillons. Ces tourbillons s'arrangent de manière régulière. On peut rendre compte de cet arrangement en cherchant les coefficients  $C_n$  qui minimisent l'énergie d'interaction, et en étudiant la position des racines du polynôme correspondant dans le plan complexe. Mais cette minimisation dépasse le cadre de ce problème...

Pour en savoir plus :

- D. A. Butts and D. S. Rokhsar, Nature **397**, 327-329 (1999), *Predicted signatures of rotating Bose-Einstein condensates*.
- K.W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000) et Jour. Mod. Optics **47**, 2715 (2000), *Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate*.