

Modèles et simulations numériques de l'effet dynamo

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 09 novembre 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie - PARIS VI
(spécialité physique)

par

Christophe J.P. Gissinger

Composition du jury

Président : Vincent Courtillot

Rapporteurs : Laurette Tuckerman
Thierry Alboussière

Examineurs : Caroline Terquem
Michael Proctor
Emmanuel Dormy (directeur de Thèse)
Stephan Fauve



Résumé

Ce mémoire de thèse traite de la magnétohydrodynamique, et plus particulièrement de l'effet dynamo, c'est-à-dire la génération d'un champ magnétique auto-entretenu par les mouvements turbulents d'un fluide conducteur d'électricité. Dans ce travail, trois approches complémentaires sont utilisées. Premièrement, nous avons étudié l'expérience VKS (Von Karman Sodium). Cette dynamo expérimentale a mis en évidence la génération d'un champ magnétique à partir d'un écoulement turbulent et non-contraint. Selon les paramètres de forçage de l'écoulement, différents régimes dynamiques sont engendrés, comme des oscillations périodiques ou des renversements chaotiques du champ magnétique, similaires à ceux observés pour le champ magnétique terrestre. Les résultats expérimentaux sont étudiés et comparés avec des simulations numériques directes. En utilisant différentes géométries, nous avons montré que la plupart des caractéristiques de l'expérience, comme la structure ou les comportements temporels du champ magnétique, peuvent être reproduites. Cela met ainsi en avant les mécanismes essentiels à la génération et à la dynamique du champ magnétique. Enfin, les différents résultats numériques obtenus sont compris à travers des modèles théoriques de basse dimensionalité, principalement dérivés à partir d'arguments de symétries. Il est ainsi possible de décrire simplement la dynamique complexe des dynamos turbulentes étudiées.

Abstract

This thesis focus on magnetohydrodynamics and in particular, on dynamo action, i.e. on the self generation of a magnetic field by the turbulent motions of an electrically conducting fluid. In this work, three complementary approaches are followed. First, we have studied the VKS experiment (Von Karman Sodium). This laboratory dynamo is the first experimental observation of dynamo action in an unconstrained turbulent flow. Depending on the forcing configuration, this experiment reproduces the self-generation of a magnetic field, but also shows some dynamical behaviors similar to the Earth, such as chaotic reversals of the polarity of the field. A lot of characteristics of this experimental dynamo remain not fully explained, and it can be very useful to use the numerical approach to understand what happens in the experiment. In this perspective, I use numerical simulations in different geometry. We have shown that most of the experimental characteristics can be reproduced by our direct numerical simulations, like the structure or the dynamical behavior of the magnetic field. Finally, these numerical results are understood in the framework of low dimensional dynamical systems, derived by symmetry arguments. These models provide a simple way to describe the complex dynamics of the turbulent dynamos studied here.

Remerciements

Tout d'abord, mes remerciements vont évidemment à mon directeur de thèse Emmanuel Dormy, mais également à Stephan Fauve. Durant ces trois ans, j'ai énormément appris à leurs côtés, et je n'aurais pu espérer un meilleur encadrement, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. A travers nos discussions scientifiques, je pense qu'ils ont fortement contribué à développer mon intérêt pour la physique. Je les remercie également pour le support et la confiance qu'ils m'ont témoigné, et ce dans une atmosphère toujours agréable et amicale.

Cette thèse a été réalisée conjointement au laboratoire de Physique Statistique et au laboratoire de RadioAstronomie de l'ENS. Je tiens à remercier Eric Perez et Michel Pérault, les directeurs de ces deux laboratoires à mon arrivée, qui ont permis mon accueil dans de très bonnes conditions.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse Laurette Tuckerman et Thierry Alboussière pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Merci également aux autres membres du jury qui ont accepté de juger ce travail : Caroline Terquem, Michael Proctor (que je remercie également pour avoir posé ses questions en français lors de la soutenance!), ainsi que Vincent Courtillot, dont les précieux conseils m'ont aidé à améliorer la version finale de ce manuscrit.

Je tiens à adresser un remerciement tout spécial à François Pétrélis, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler durant cette thèse. Il a toujours été disponible pour discuter, plaisanter, répondre à mes questions, et a parfois considérablement orienter mes travaux de recherche (ainsi que mes habitudes tabagiques). Je remercie également les autres membres du groupe, Alexandros Alexakis (qui a su être discret concernant l'épisode de la rivière de Cambridge), Claude Laroche, Sébastien Aumaitre, Eric Falcon, Nabil Garroum, Claudio Falcon et Nicolas Mordant, qui m'a initié au travail expérimental et particulièrement aux joies du Gallium...

Merci également à toutes les personnes que j'ai pu côtoyer au LRA, en particulier Patrick Hennebelle, Andrea Ciardi, Henrik Latter et Steven Balbus. Je suis également reconnaissant envers Marie Gefflot, Nora Sadaoui et Annie Ribaudeau, les secrétaires du LPS, qui ont été géniales avec moi durant ces trois ans.

Durant cette thèse, j'ai passé beaucoup de temps avec les différents thésards et postdocs qui se sont succédé. Je les remercie donc pour avoir contribué à la bonne ambiance du labo : Thomas tout d'abord (pour les courses endiablées, les bille-cartons, les 'allo?' et autres délires), mais également Martin, pour sa bonne humeur permanente, ses conseils et pour les débats passionnants que nous avons eu. Pour d'innombrables raisons, je suis également heureux d'avoir passé ces trois ans aux côtés de Ludo, qui est devenu un véritable ami, et sans qui la vie au labo

n'aurait pas été la même. Merci aussi à Basile, avec qui j'ai eu autant de plaisir à discuter de science qu'à rigoler, porter la moustache et tant d'autres choses ! Merci également à Michael, Wietze, Vincent et bien sur à Quentin, que j'espère revoir bientôt en possession du Verre... J'ai également passé dix semaines très agréables à Woodshole, et je remercie tous ceux qui ont contribué à cela, tout particulièrement Céline et Toby. J'adresse aussi un grand merci à John-Franck et à son frère.

Enfin, je souhaite remercier ma famille et mes amis, qui sont restés près de moi malgré mon manque de disponibilité durant ces trois années. Mes parents évidemment, pour tous les sacrifices qu'ils ont fait pour m'encourager, mais également ma soeur Séverine, pour le soutien énorme et sans faille qu'elle m'a toujours apporté. Je suis également reconnaissant à tous mes amis pour leur soutien et leur présence. Quan, Hakim, Claude, Patricia, Daniel, Nazim, Michael, Julia, Sarah, Lydia, Julia et tout les autres : je vous remercie du fond du coeur.

Pour finir, le plus fort de mes remerciements est évidemment pour Rim. Elle a su me soutenir pendant les moments difficiles, m'encourager et me motiver quotidiennement. Je lui dois beaucoup, et j'espère pouvoir un jour lui rendre tout ce qu'elle m'a donné.

*Je dédie ce travail
à ma mère*

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vi
Table des matières	xii
1 Introduction	1
1.1 Objet et motivation	1
1.2 Les équations de la magnétohydrodynamique	8
1.3 Une instabilité complexe	11
2 Approche Expérimentale de l'effet dynamo	17
2.1 La Terre en laboratoire	17
2.2 VKS : montage expérimental	24
2.3 Résultats de l'expérience VKS	27
2.3.1 Écoulement	27
2.3.2 Génération du champ magnétique	30
2.3.3 Géométrie du mode dynamo	31
2.3.4 Une dynamo $\alpha - \omega$	33
2.3.5 Régimes dynamiques	36
2.3.6 Renversements	38
2.4 Conditions aux limites et dynamique du champ	46
2.4.1 Contra-rotation exacte	47
2.4.2 Contra-rotation non-exacte	51
2.4.3 Co-rotation	55
2.4.4 Décomposition dipole-quadrupole	57
2.4.5 Dynamique de basse dimension dans l'expérience VKS	60
3 Approche cinématique	69
3.1 Outils numériques	70
3.1.1 Approche de volume fini et transport contraint	70
3.1.2 Singularité des coordonnées	73
3.1.3 Conditions aux limites	73
3.2 Étude cinématique d'une dynamo de von Kármán	77
3.2.1 Écoulement moyen de von Kármán	77

3.2.2	Effet des conditions aux limites sur l'instabilité	81
3.2.3	Rôle des fluctuations non-axisymétriques	85
4	Modélisation dynamique	99
4.1	Introduction	99
4.2	Méthode numérique	101
4.2.1	Présentation du code <i>PaRoDy</i>	101
4.2.2	Décomposition poloïdale-toroïdale	101
4.2.3	Implémentation numérique	102
4.3	Simulations numériques en régime laminaire	106
4.3.1	Dynamos laminaires	109
4.3.2	Dynamique non-linéaire	111
4.3.3	Modélisation dynamique de basse dimensionalité	120
4.4	Dynamos turbulentes	126
4.4.1	Étude hydrodynamique	126
4.4.2	Structure de la dynamo turbulente	129
4.4.3	Dynamique de renversements	136
5	Un modèle simple des renversements chaotiques.	151
5.1	Introduction	151
5.2	Points fixes et stabilité	153
5.3	Transition vers le chaos	155
5.4	Renversements chaotiques	159
5.4.1	Phénomène de crise et intermittence	159
5.4.2	Différents régimes dynamiques	165
5.5	Une modélisation des renversements de la géodynamo.	169
5.5.1	Compatibilité avec une dynamique déterministe.	172
5.5.2	Comparaison de la géodynamo avec un modèle de basse di- mension.	177
6	Conclusion générale	183
6.1	Bilan général	183
6.2	Perspectives	184
	Bibliographie	187
A	Modélisation de la dynamo galactique	195
B	Articles publiés durant la thèse	201
	Liste des tableaux	221
	Liste des figures	235

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objet et motivation

La compréhension de l'origine du champ magnétique terrestre a connu d'impres-
sionnantes évolutions depuis sa découverte. Jusqu'au 16ème siècle, le fait que les
aiguilles des boussoles indiquent systématiquement le nord trouve deux explications
différentes : l'attraction par l'étoile polaire, ou la présence d'une île magnétique d'en-
viron 50 kilomètres de diamètre située quelque part au pôle nord... Il faut attendre
1600 pour voir apparaître le premier vrai modèle du champ magnétique terrestre :
Sir William Gilbert suggère alors que la Terre elle-même se comporte comme un
énorme aimant. On sait désormais qu'aucun matériau n'est capable de rester ai-
manté aux températures et pressions qui règnent au sein du noyau terrestre. Au
début du 19ème siècle, à la lumière des expériences d'Oersted, Ampère envisage
ainsi que le champ magnétique pourrait être dû à des courants électriques parcou-
rant la Terre. Mais c'est en 1919 qu'apparaît pour la première fois la théorie dynamo.



FIG. 1.1: Extrait d'une carte marine de 1539 par Olaus Magnus, montrant la position du nord magnétique nommée 'Insula Magnetu' (latin pour 'Ile magnétique').

Dans une étude sur le champ magnétique du Soleil, Sir Joseph Larmor propose que les courants électriques à l'origine du champ magnétique pourraient être produits par les mouvements du plasma ionisé constituant la zone convective du soleil. A la

fin de son article, Larmor note que cette théorie semble raisonnable pour le champ magnétique terrestre, mais à condition de considérer un noyau de fer liquide [44]. Cette hypothèse d'un noyau externe liquide sera confirmée un peu plus tard par Jeffreys en 1926 à partir d'un calcul sur l'amplitude des marées [36], puis par Lehmann en 1936 à partir d'études sismographiques [45], qui montre l'existence d'un noyau interne solide.

Une présentation détaillée de la théorie dynamo peut être trouvée dans l'ouvrage de Moffatt (1978) [54], ou encore dans le livre de Dormy et Soward (2007) [19]. Cette théorie se pose dans le cadre plus général de la magnétohydrodynamique (MHD). Il s'agit de l'étude des fluides conducteurs d'électricité en présence de champs électromagnétiques. Cette discipline, qui généralise l'hydrodynamique, possède de nombreuses applications puisque les fluides conducteurs sont présents à toutes les échelles dans l'univers. Le milieu interstellaire des galaxies est constitué essentiellement de plasma. Les étoiles sont également composées de gaz ionisé, et présentent en général un champ magnétique important. Enfin, il est désormais admis que le noyau des planètes est formé en partie de fer liquide (ou de gaz métallique dans le cas des planètes géantes). La figure 1.2 illustre schématiquement la structure interne de la Terre et du soleil.

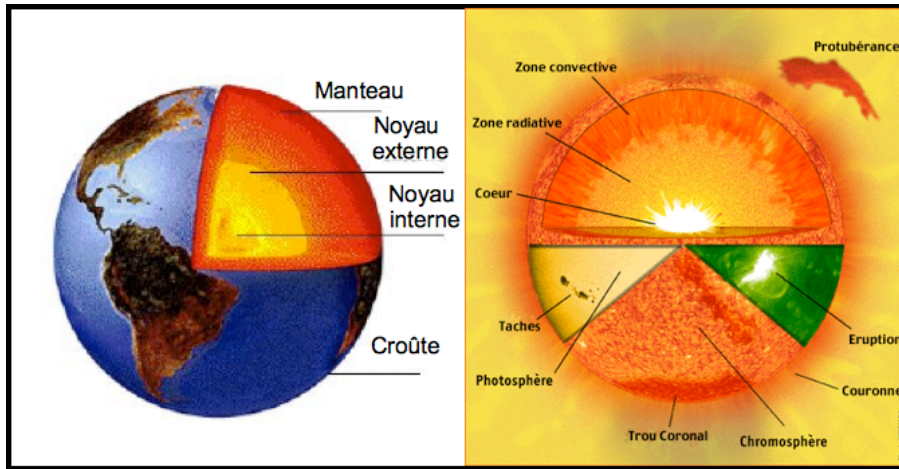


FIG. 1.2: Schémas illustrant la structure interne des deux objets astrophysiques les mieux connus. A gauche : structure interne de la Terre. A droite : structure interne du soleil.

La théorie de l'effet dynamo est la partie de la MHD qui décrit les processus par lesquels un fluide conducteur en mouvement agit afin de maintenir un champ magnétique à une valeur non-nulle. En effet, le déplacement d'un fluide conducteur soumis à un champ magnétique crée un déplacement de charge à l'intérieur du fluide. Le courant électrique engendré par ce phénomène d'induction électromagnétique peut, dans certains cas, donner naissance à un nouveau champ magnétique qui vient renforcer le premier. Cette création de champ magnétique s'oppose à la dissipation ohmique des courants électriques se produisant constamment au sein de

tout conducteur réel. Dans ces conditions, un champ magnétique est auto-amplifié lorsque les processus d'induction sont plus importants que la dissipation ohmique. Il est alors possible d'observer, à partir d'une perturbation magnétique infinitésimale, la croissance exponentielle d'un champ magnétique structuré à grande échelle. Il s'agit donc d'un cas typique d'instabilité. Lorsque le champ magnétique engendré devient suffisamment fort, il agit en retour sur le fluide et l'instabilité sature généralement dans un état d'équilibre. Le phénomène repose donc sur une conversion partielle d'énergie cinétique en énergie magnétique. Le mécanisme de l'effet dynamo s'illustre particulièrement bien avec l'exemple de la dynamo disque homopolaire, illustrée par le schéma de la figure 1.3 (Bullard, 1955 [12]). Dans cette expérience

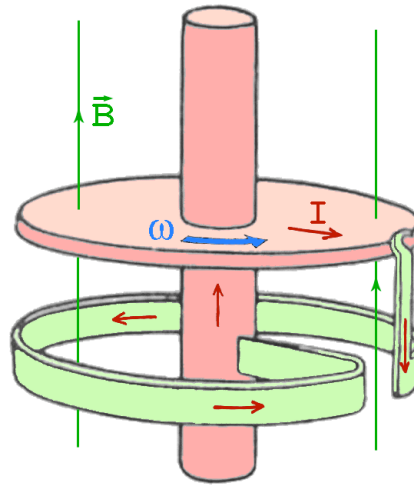


FIG. 1.3: Schéma illustrant la dynamo disque homopolaire de Bullard.

hypothétique, un disque de cuivre solide tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire ω (voir figure 1.3). Si l'on considère un champ magnétique vertical, une force électromotrice est engendrée et un courant dirigé de l'axe vers la périphérie du disque apparaît. Sur la figure 1.3, on voit que le disque est connecté (par un contact glissant) à une spire d'inductance L . Si sa forme est telle que le courant circulant à l'intérieur engendre un champ vertical parallèle au champ initial, on a un problème typique d'instabilité : si la vitesse angulaire du disque est suffisamment importante pour compenser la dissipation ohmique, une perturbation initiale de courant électrique I peut être amplifiée exponentiellement par effet dynamo. On dit que le champ est auto-excité car il n'est pas nécessaire d'appliquer un champ magnétique externe. Si l'on définit l'inductance mutuelle M entre la spire et le disque et R la résistance électrique de l'ensemble, l'évolution du courant est gouvernée par

$$L \frac{dI}{dt} + RI = M\omega I \quad (1.1)$$

On reconnaît une équation linéaire en I qui montre que le système est instable pour une valeur critique de la vitesse angulaire telle que

$$\omega > \frac{R}{M} \quad (1.2)$$

	Moment dipolaire ($A.m^2$)	Inclinaison du dipole (degrés)	Champ max. à la frontière noyau-manteau (10^{-4} T)
Mercure	4.3×10^{19}	< 10	0.014
La Terre	$8. \times 10^{22}$	11.5	7.6
Ganymède	1.3×10^{20}	~ 10	2.5
Jupiter	1.5×10^{27}	9.6	17
Saturne	4.2×10^{25}	0.8	2.5
Uranus	3.8×10^{24}	58.6	1.3
Neptune	2.0×10^{24}	47.0	0.52

TAB. 1.1: Champs magnétiques planétaires. D’après Jones 2007 [19]

Le lecteur notera que l’instabilité ne se produit que si $M > 0$, c’est-à-dire si l’hélicité de la spire possède le bon signe. On parle d’expérience ‘hypothétique’ car la vitesse angulaire nécessaire à un effet dynamo serait difficile (voire impossible) à atteindre dans un tel montage. De plus, la réaction en retour du champ magnétique sur la rotation du disque est négligée. Cet effet, dû à la force de Laplace, conduit à s’opposer à la rotation du disque lorsque le champ magnétique devient assez fort et permet ainsi à celui-ci de saturer. Notons qu’il existe une version modifiée de cette dynamo, proposée par Rikitake [74] et basée sur le couplage de deux dynamos disques. Dans ce cas, il est possible d’observer des oscillations avec des renversements aléatoires de la polarité du champ magnétique produit. Nous reviendrons plus tard sur l’intérêt du modèle de Rikitake.

L’émergence de la théorie dynamo fournit une explication pour l’origine des champs magnétiques naturels, comme celui de la Terre ou du Soleil, mais permet surtout une étude plus approfondie des différentes structures et comportements dynamiques des champs magnétiques observés. Le champ magnétique de la Terre est constitué principalement d’un dipole axial, dont l’axe fait actuellement un angle d’environ 12° avec l’axe de rotation de la Terre (voir la figure 1.4). Au contraire, le Soleil possède une structure magnétique de petite échelle dont l’intensité dépasse de plusieurs ordres de grandeur la partie dipolaire du champ. Les observations du champ magnétique des autres planètes suggèrent que la structure dipolaire domine également, bien qu’il existe des contributions non-axisymétriques suffisantes pour incliner le dipole par rapport à l’axe de rotation. Le tableau 1.1 compare quelques données sur la force et l’inclinaison du champ magnétique de quelques planètes du système solaire.

En 1906, peu de temps avant la proposition de la théorie dynamo fluide par Larmor, un géophysicien français, Bernard Brunhes, découvrait en étudiant l’aimantation de coulées de lave que la polarité du dipole axial de la Terre s’est inversée plusieurs fois au cours de son histoire [11]. L’effet dynamo est actuellement la seule théorie capable d’expliquer ces renversements magnétiques. La figure 1.5 montre la distribution de ces renversements au cours des temps géologiques. Les renversements

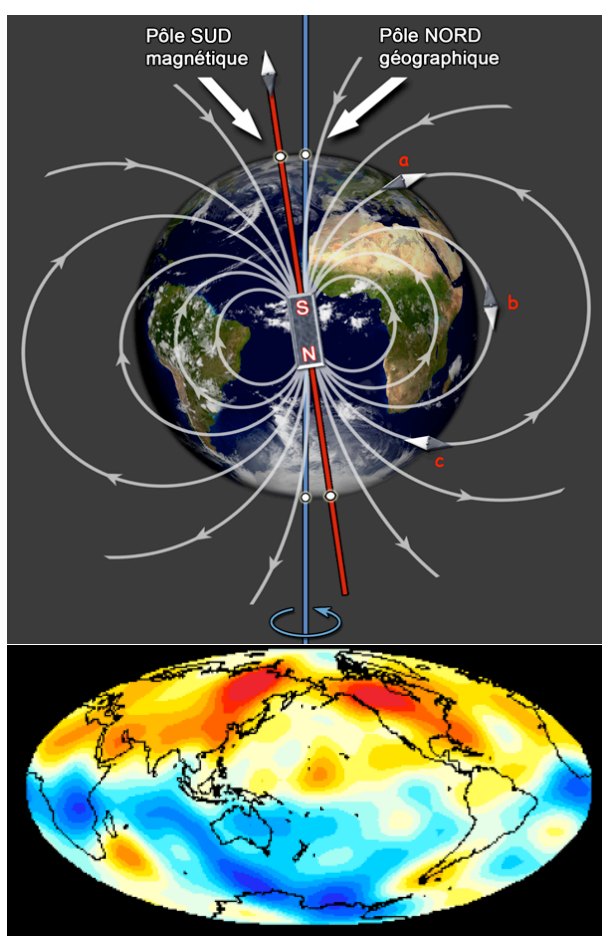


FIG. 1.4: Champ magnétique de la Terre. En haut : illustration schématique du dipôle, montrant une inclinaison de 12° avec l'axe de rotation de la Terre. En bas : Intensité du champ magnétique radial terrestre, issu des données observationnelles (d'après Christensen et al 1999).

de la polarité du champ magnétique terrestre semblent se produire de manière chaotique. Bien que la durée moyenne entre deux renversements soit très variable, il est possible de définir une valeur moyenne d'environ 200,000 ans. Toutefois, on peut noter sur la figure 1.5 une période de 44 millions d'années au Crétacé pendant laquelle le dipole ne subit aucun renversement. Ce comportement chaotique, a priori imprévisible, s'oppose radicalement à la dynamique observée pour le Soleil. En effet, les observations du Soleil montrent que son champ magnétique oscille de manière périodique, avec une période bien définie de 22 ans. Ces renversements sont associés à une onde se propageant en latitude (voir figure 1.6). L'activité magnétique solaire est connue depuis très longtemps de façon indirecte, car elle est directement liée aux taches sombres qui apparaissent à la surface du soleil, facilement observables.

A partir de la deuxième moitié du 20ème siècle, l'effet dynamo a connu un essor théorique considérable. Ces développements ont permis de mieux comprendre les mécanismes qui engendrent la structure et la dynamique des champs magnétiques

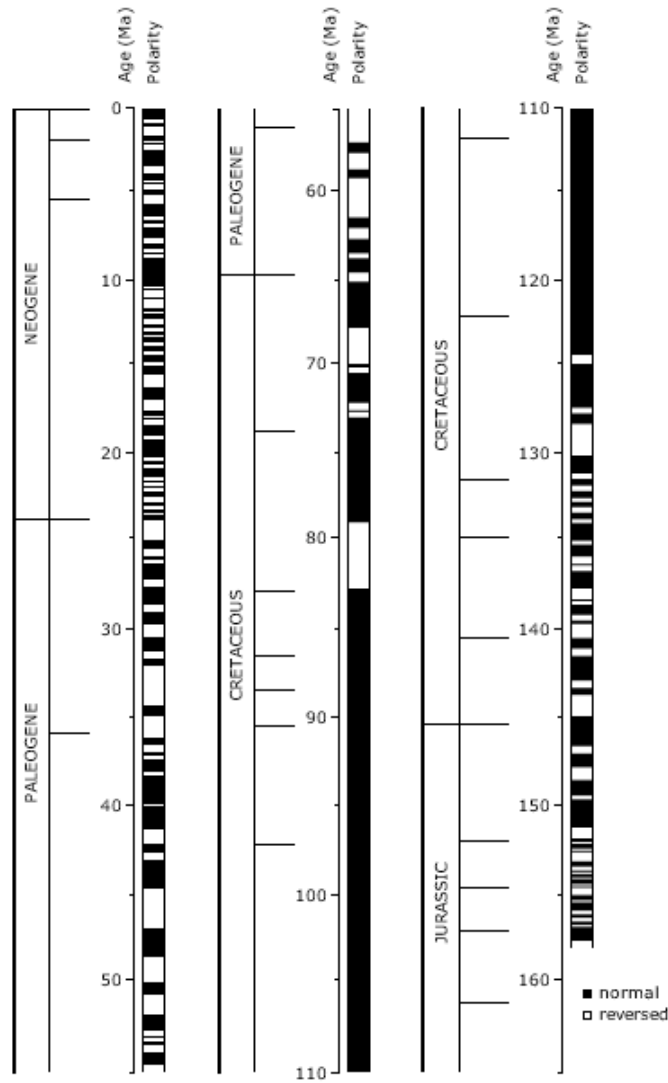


FIG. 1.5: Polarité de la partie dipolaire du champ magnétique terrestre au cours des 160 derniers millions d'années. En noir : les périodes de temps similaires à la polarité actuelle. On notera le caractère chaotique des renversements (d'après Merrill et al 1996).

dynamos. Les prochaines sections de ce chapitre tentent de donner un aperçu rapide de cette description théorique. Au prochain chapitre, nous verrons que l'approche expérimentale a également fortement contribué à améliorer notre compréhension de l'instabilité dynamo. Enfin, les 20 dernières années ont été marquées par l'utilisation des simulations numériques pour compléter les approches théoriques et expérimentales. Certains modèles numériques ont ainsi pu reproduire la génération d'un champ magnétique dans des configurations géométriques proches de la géodynamo, en résolvant le système complet des équations de la magnétohydrodynamique (voir la figure 1.7 par exemple).

Certaines de ces simulations ont pu également reproduire les renversements du

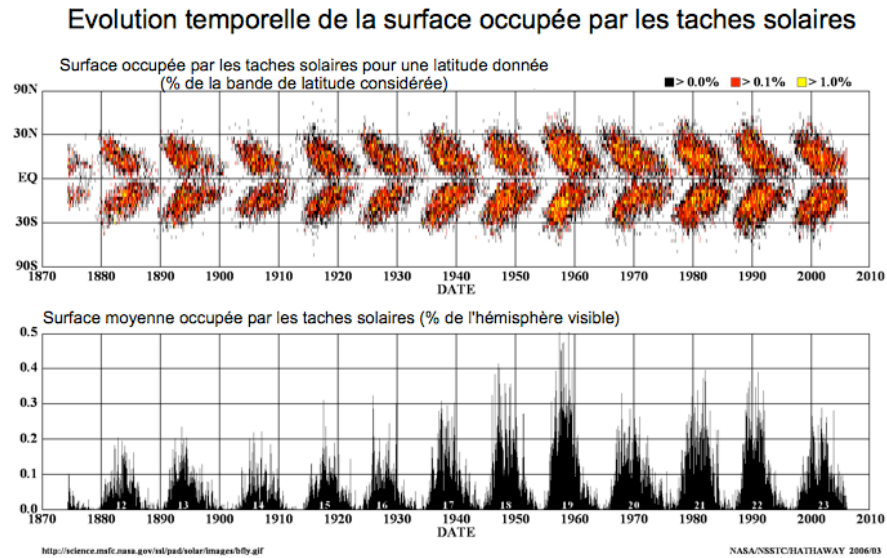


FIG. 1.6: Comportement du champ magnétique solaire. En haut : taches solaires observées au cours du siècle. En bas : nombre moyen de taches solaires observés (données NASA/NSSTC/Hathaway 2005/01).

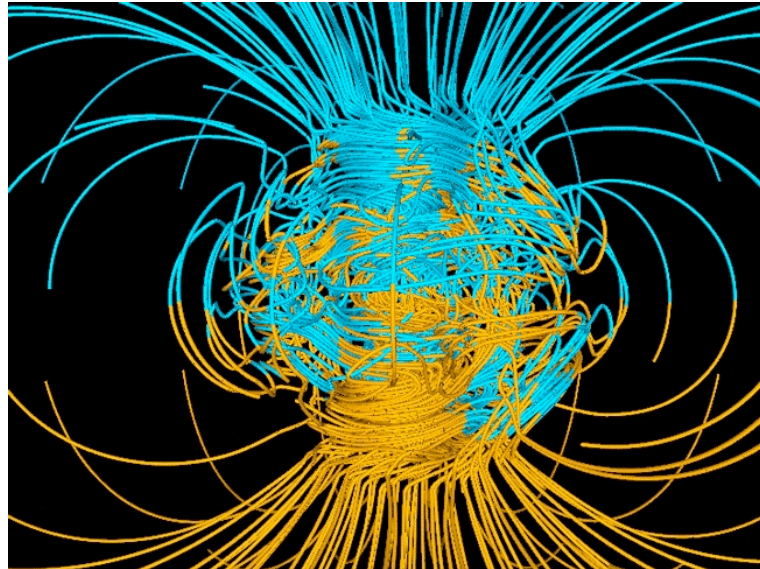


FIG. 1.7: Simulation numérique réalisée en 1995 par Glatzmaier et Roberts. Il s'agit de l'une des premières modélisations numériques de la géodynamo. On reconnaît le caractère fortement dipolaire du champ magnétique.

champ magnétique terrestre, obtenus pour la première fois par Glatzmaier et Roberts en 1995 [26]. Il faut toutefois garder à l'esprit les limitations imposées par les simulations numériques : même si celles-ci permettent aujourd'hui d'obtenir des solutions au système d'équations MHD complet, une résolution n'est possible que dans un régime de paramètre très loin de la réalité.

Il apparaît donc nécessaire d'opter pour une approche multiple, où l'interaction entre données expérimentales et simulations numériques permet d'améliorer certains modèles théoriques.

1.2 Les équations de la magnétohydrodynamique

Dans cette section, nous allons définir les différentes équations constitutives de la magnétohydrodynamique, qui servent de base à la compréhension de l'instabilité dynamo.

Le point de départ est évidemment l'équation de Navier-Stokes donnant l'évolution de la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, à laquelle s'ajoute la condition d'incompressibilité du fluide conducteur

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.3)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (1.4)$$

où ρ est la masse volumique, ν la viscosité cinématique du fluide et $P(\mathbf{r}, t)$ le champ de pression. Le terme $\mathbf{F}$ représente les forces volumiques agissant sur le fluide, et varient selon le problème considéré (poussée d'Archimède, entraînement inertiel, rotation, ...). Le dernier terme représente la force de Laplace. Il s'agit de l'action qu'exerce tout champ électromagnétique sur un fluide conducteur. Mathématiquement, ce terme permet une influence sur l'équation d'évolution du fluide de la part du champ magnétique. L'évolution de celui-ci est régi par l'équation d'induction, qui s'obtient à partir des équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Dans ces équations, $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique (souvent simplement nommé champ magnétique), $\mathbf{E}$ est le champ électrique, $\mathbf{j}$ est la densité de courant électrique, ρ_e est la densité de charge électrique, μ_0 et ϵ_0 respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité du vide. Les équations de la magnétohydrodynamique classique reposent sur une hypothèse importante : on suppose que les vitesses typiques en jeu dans le problème restent faibles comparées à la vitesse de la lumière. Il s'agit d'une limite satisfaite par la plupart des objets naturels étudiés dans le cadre de la théorie dynamo comme les champs magnétiques stellaires ou planétaires. C'est également vrai pour les expériences dynamos. Cela nous conduit à négliger les courants de déplacements dans l'équation de Maxwell-Ampère, qui devient

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (1.7)$$

On obtient ainsi une relation simple entre courant électrique et champ magnétique. Il est possible de relier les courants électriques au champ électrique par la loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} , \quad (1.8)$$

où l'on a introduit la conductivité électrique σ du fluide. Ces équations sont valables dans un référentiel lié au milieu conducteur. Nous avons déjà expliqué que l'effet dynamo et tous les phénomènes magnétohydrodynamiques sont causés par le mouvement du fluide conducteur considéré. Il faut donc tenir compte des modifications apportées par le mouvement. On utilise pour cela les transformations standards de la théorie de l'électromagnétisme, mais dans leur forme non-relativiste. Sous la transformation galiléenne $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u}t$, les champs deviennent

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} , \quad (1.9)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} , \quad (1.10)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} . \quad (1.11)$$

$$(1.12)$$

Dans un conducteur en mouvement, la loi d'Ohm devient donc

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) . \quad (1.13)$$

En prenant le rotationnel de l'équation 1.13 et en utilisant les équation 1.7 et 1.5, on obtient l'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} . \quad (1.14)$$

Par analogie avec la viscosité cinématique, on définit parfois la diffusivité magnétique $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$. Avec l'équation de Maxwell-Thomson $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ qui interdit l'existence de monopôles magnétiques, cette équation régit l'évolution du champ magnétique. On peut remarquer que cette équation est linéaire en champ magnétique. Il est facile de comprendre l'origine physique des différents termes de cette équation. Le dernier terme du membre de droite provient de $\nabla \times \mathbf{j}$, et représente la dissipation ohmique. En l'absence de vitesse, l'équation d'induction se résume donc à une simple équation de diffusion, qui décrit la décroissance d'un champ magnétique au sein d'un conducteur au repos. Lorsque $\mathbf{u}$ est non-nul, l'évolution peut devenir plus compliquée. En particulier, le premier terme du membre de droite peut agir comme un terme source pour le champ magnétique. Lorsque la vitesse est telle que ce terme source devient plus important que la dissipation ohmique, la variation d'énergie magnétique est positive et on parle de dynamo auto-entretenu. La linéarité de l'équation d'induction impose dans ce cas une croissance exponentielle du champ magnétique. Cette croissance se poursuivrait indéfiniment sans la présence de la force de Laplace dans l'équation de Navier-Stokes. En effet, lorsque le champ magnétique devient assez important, il agit en retour sur le champ de vitesse via la force de Laplace. Le couplage entre les deux champs permet un échange d'énergie qui sature la croissance du champ magnétique. Durant cette phase saturée, le couplage introduit par la force de

Laplace peut donc engendrer un comportement complexe et non-linéaire du champ magnétique, en dépit de la linéarité apparente de l'équation d'induction.

Les équations 1.4 et 1.14 constituent un système d'équations complet de la magnétohydrodynamique. Pour décrire complètement le problème, il faut adjoindre des conditions aux limites appropriées. Pour le champ de vitesse, le choix le plus répandu consiste à considérer des parois solides, ce qui entraîne $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ aux bords. Dans certains cas, il est possible d'imposer plutôt une contrainte nulle à la paroi. Pour le champ magnétique, différents choix sont également possibles. Le plus fréquent est de considérer que le fluide conducteur est entouré d'un domaine électriquement isolant. Dans ce cas, le champ magnétique dérive d'un potentiel, solution de l'équation de Laplace. Dans ce domaine extérieur, on a alors les équations :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} , \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (1.16)$$

D'autres conditions aux limites sont possibles, mais reposent en général sur des cas limites, comme le raccordement à un conducteur parfait (de conductivité infinie) ou encore à un métal ferromagnétique de perméabilité infinie. Une partie de cette thèse est dédiée à l'étude de l'influence des conditions aux limites magnétiques sur l'effet dynamo.

Comme pour toute étude physique, il est utile de repérer les longueurs et temps typiques du problème afin de pouvoir adimensionner nos équations. On peut alors décrire les phénomènes physiques à l'aide de nombres caractéristiques, sans faire référence aux dimensions ni unités explicites. Introduisons la vitesse typique de l'écoulement V , une échelle caractéristique L et un temps typique T . Dans le problème tel qu'il a été posé ici et qui sera étudié tout au long de cette thèse, la rotation ou la température ne jouent aucun rôle. Cela nous conduit donc à ne considérer que trois nombres sans dimensions (dont seulement deux sont indépendants) :

$$Re = \frac{UL}{\nu} , \quad Rm = \frac{UL}{\eta} , \quad Pm = \frac{\nu}{\eta} . \quad (1.17)$$

Le nombre de Reynolds Re compare l'importance du terme advectif de l'équation de Navier-Stokes par rapport au terme visqueux. Dans tous les systèmes considérés dans cette thèse (noyaux planétaires, zone convective du Soleil, expériences dynamos, ...), ce nombre est en général très grand, supérieur à 10^6 . Les écoulements correspondant sont par conséquent très turbulents, car les termes d'advection sont une source de non-linéarités. Au contraire, il est très difficile d'atteindre des nombres de Reynolds importants dans les simulations numériques, car cela nécessite de résoudre plusieurs échelles d'espace et de temps très différentes.

Le nombre de Prandtl magnétique Pm contrôle le rapport entre la viscosité cinématique du fluide et sa diffusivité magnétique. Il s'agit d'une propriété intrinsèque du fluide conducteur. Pour les métaux liquides, ce paramètre est inférieur à 10^{-5} . Cela introduit une séparation d'échelle dans les longueurs et les temps de diffusion

magnétique et cinétique, également très difficile à simuler numériquement.

Le nombre de Reynolds magnétique Rm est l'équivalent de Re pour le champ magnétique. Il met en balance le terme d'advection magnétique avec celui de diffusion magnétique dans l'équation d'induction. C'est un paramètre de contrôle important puisqu'il détermine l'écart au seuil de l'instabilité dynamo. Dans les expériences dynamo, il est techniquement difficile d'obtenir les vitesses suffisantes pour engendrer un champ magnétique, et on se situe généralement proche du seuil de l'instabilité, Rm étant de l'ordre de 100. Dans le cas de la Terre, les valeurs estimées sont un peu plus grandes, avec $Rm \sim 1000$. Dans les deux cas, il s'agit de valeurs qu'il est possible de reproduire dans les simulations numériques. Un calcul théorique réalisé par Backus en 1958 [4] a montré que dans un domaine sphérique, une condition nécessaire pour obtenir un champ dynamo est d'avoir $Rm \geq \pi^2$. Cette valeur fixe un ordre de grandeur pour Rm dans les expériences et les simulations dynamos.

On notera que les deux nombres de Reynolds (hydrodynamique et magnétique) sont reliés entre eux par la relation $Rm = RePm$. La très faible valeur de Pm implique donc que les champs magnétiques produits par effet dynamo se produisent obligatoirement à partir d'un écoulement extrêmement turbulent.

Au cours de cette thèse, nous ferons usage de la décomposition poloïdal-toroïdal des variables magnétiques et hydrodynamiques. Il s'agit d'une décomposition très utile pour décrire certains processus dynamos, mais également pour écrire les équations de la magnétohydrodynamique en géométrie sphérique. En particulier, cette décomposition est à la base de nombreux modèles numériques de la géodynamo. On écrit le champ magnétique comme suit

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_P + \mathbf{B}_T, \quad (1.18)$$

avec

$$\mathbf{B}_P = \nabla \times \nabla \times (P\mathbf{r}), \quad (1.19)$$

$$\mathbf{B}_T = \nabla \times (T\mathbf{r}), \quad (1.20)$$

où P et T sont des scalaires qui dépendent de l'espace et du temps, représentant respectivement les composantes poloïdale et toroïdale du champ. Cette décomposition n'est valable que pour des champs à divergence nulle. Dans le cas d'un problème axisymétrique, la partie toroïdale se réduit à la composante azimutale.

1.3 Une instabilité complexe

La présentation des équations de la magnétohydrodynamique réalisée à la section précédente laisse apparaître la complexité des phénomènes mis en jeu. La linéarité de l'équation d'induction ne simplifie pas vraiment l'instabilité dynamo, car la force de Laplace couple les champs magnétique et cinétique. On peut néanmoins remarquer que lorsque le champ magnétique est suffisamment petit, il influence peu l'écoulement, qui agit alors comme une source indépendante pour la croissance du champ.

Cette caractéristique est parfois exploitée pour simplifier l'approche numérique ou théorique du problème. Dans une telle approche dite 'cinématique' de l'effet dynamo, le champ de vitesse est imposé, sans subir l'action de la force de Laplace, et on résout uniquement l'équation d'induction. On obtient ainsi un problème d'instabilité linéaire. Dans ce régime, si l'écoulement est efficace, cela mène à une amplification exponentielle de l'énergie magnétique associée au mode dynamo. L'approche cinématique est par exemple efficace pour prédire le seuil d'instabilité de la dynamo, a priori indépendant des processus de saturation du champ magnétique. L'écoulement peut être choisi comme étant une solution de Navier-Stokes, mais on utilise bien souvent un écoulement synthétique. Dans cette thèse, notre étude numérique se sépare en deux parties, dont l'une consiste justement en une approche cinématique du problème de la dynamo de VKS.

En 1942, Alfven [1] a démontré un théorème très important pour l'effet dynamo, similaire à celui sur la circulation de Kelvin pour les fluides inviscides. Ce théorème, parfois appelé théorème du flux gelé, stipule qu'un tube de flux magnétique est 'gelé' dans le fluide en mouvement lorsque la diffusivité magnétique tend vers zéro. Ceci a une conséquence intéressante : lorsque $\eta = 0$ et que le fluide est incompressible, étirer les lignes de champ magnétique implique une amplification de $\mathbf{B}$ dans la direction d'étirement. L'amplification est ici seulement linéaire mais le théorème d'Alfven fournit tout de même une représentation intuitive de la création de champ magnétique par effet dynamo. Cette représentation n'est a priori valable que dans la limite $Rm \rightarrow \infty$. Toutefois, même près du seuil dynamo, il est toujours possible de penser à l'équation d'induction comme une compétition entre ce mécanisme d'amplification du champ (lié au terme $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$) et la dissipation du terme diffusif.

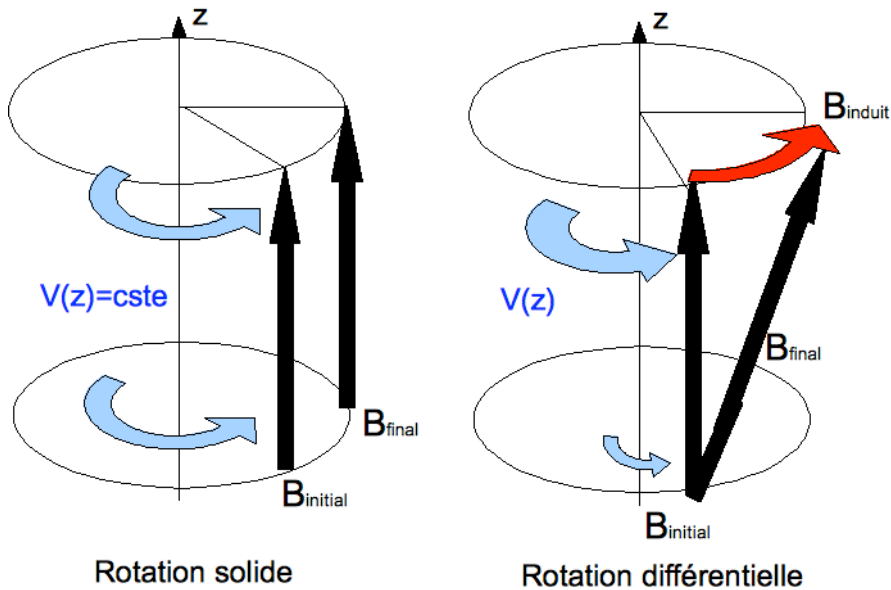


FIG. 1.8: Illustration schématique de l'effet ω .

L'effet ω est un mécanisme de création de champ magnétique illustrant directement le théorème d'Alfvén. La distorsion des lignes de champ magnétique y est due à la rotation différentielle existant au sein du fluide. Considérons par exemple une ligne de champ initialement verticale (ou plus généralement poloïdale), comme sur la figure 1.8. S'il existe une rotation globale du fluide V_ϕ selon la direction ϕ , le théorème de flux gelé nous indique que la ligne de champ sera advectée uniformément, sans déformation, et donc sans création de champ. Au contraire, s'il existe par exemple un cisaillement azimuthal $\partial V_\phi(z)/\partial z$, la ligne de champ poloïdale se déforme sous l'effet de la vitesse, créant ainsi une composante selon la direction azimuthale : l'effet ω engendre ainsi un champ magnétique toroïdal à partir d'un champ initialement poloïdal. L'amplification magnétique dépend évidemment de l'intensité de la vitesse et du cisaillement considéré, et la diffusion ohmique tend à réduire la création de champ magnétique. De plus, ce mécanisme seul ne peut engendrer d'amplification exponentielle du champ, et nécessite un couplage avec d'autres mécanismes, comme l'effet Parker.

L'effet Parker est un autre mécanisme décrivant la génération de champ magnétique. Il a été introduit par Parker en 1955 [64]. Ce mécanisme peut se produire au sein d'écoulement d'hélicité non-nulle. La figure 1.9 illustre cet effet Parker. Sur cette figure, on considère une ligne de champ au sein d'un écoulement tourbillonnaire. Cela signifie qu'en plus d'une rotation différentielle, il existe une composante de vitesse parallèle à la vorticité. La génération du champ se produit en deux temps. Dans un premier temps la ligne de champ est étirée dans la direction perpendiculaire par la vitesse. Dans un deuxième temps, sous l'effet de la vorticité, il se produit une distorsion de la ligne de champ telle qu'une boucle de champ magnétique se forme. Le courant ainsi crée engendre donc du champ dans la direction perpendiculaire au champ initial. Ce mécanisme est souvent mis en avant pour expliquer la génération de champ poloïdal à partir d'un champ toroïdal. On comprend ainsi que l'hélicité cinétique d'un écoulement est un ingrédient important pour obtenir un effet dynamo. Notons qu'il est possible d'envisager une combinaison des effets Parker et ω pour créer des mécanismes de dynamos auto-entret  nues, comme nous le verrons au prochain chapitre.

Il est ainsi possible de caractériser certaines propriétés des écoulements magnétohydrodynamiques, comme l'hélicité ou le cisaillement, favorables à la génération d'un champ magnétique. Le problème reste néanmoins complexe : ces ingrédients ne sont pas toujours nécessaires, et personne n'a jamais pu trouver des conditions suffisantes sur le champ de vitesse pour observer un effet dynamo. Malgré ces difficultés théoriques, un certain nombre de théorèmes ont été obtenus, montrant que certaines situations ne peuvent en aucun cas conduire à un effet dynamo. Parmi ces théorèmes dits 'anti-dynamos', on trouve par exemple qu'il est impossible d'obtenir un effet dynamo avec un écoulement purement toroïdal [13], ou encore lorsque l'écoulement est plan et à 2 dimensions [54]. Le théorème anti-dynamo le plus connu a été établi par Cowling en 1934 [16]. Il indique qu'un champ magnétique engendré par effet dynamo ne peut en aucun cas être purement axisymétrique. Ce théorème est d'une grande importance car l'axisymétrie permettrait un traitement plus

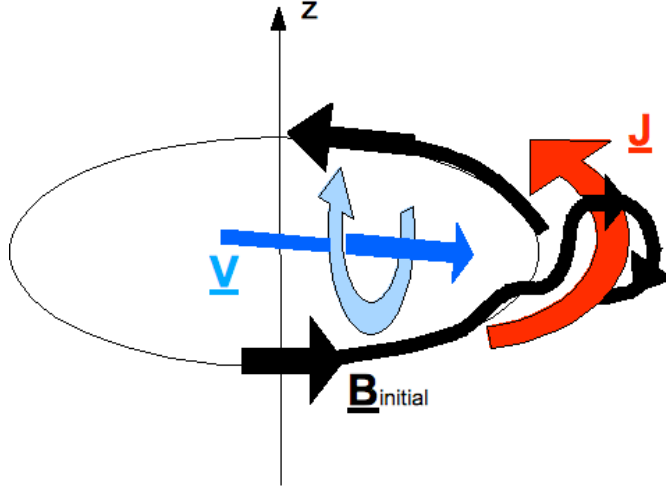


FIG. 1.9: Illustration schématique de l'effet Parker, parfois appelé effet α .

simple du problème dynamo. Le théorème de Cowling interdit donc la construction de modèles simplifiés de l'effet dynamo et nous force à étudier directement le problème en 3 dimensions d'espace. On notera en particulier que l'axisymétrie de $\mathbf{B}$ implique forcément l'axisymétrie de la vitesse $\mathbf{u}$, sans que l'opposé ne soit vrai. Une forme alternative du théorème de Cowling est donc de dire qu'un champ de vitesse axisymétrique ne peut maintenir un champ magnétique axisymétrique par effet dynamo. Cette formulation s'avère parfois utile pour comprendre l'origine de la composante magnétique axisymétrique d'une dynamo. Il existe plusieurs manières d'obtenir ce résultat. On montre ici la preuve telle qu'elle a été donnée par Braginskii, en 1964 [10]. Une description plus détaillée peut être trouvée dans Proctor [19] (2007). Puisque $\mathbf{u}$ et $\mathbf{B}$ sont axisymétriques, on utilise la décomposition suivante, dans les coordonnées cylindriques (s, ϕ, z)

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\phi + \nabla \times (A\mathbf{e}_\phi) , \quad (1.21)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + U\mathbf{e}_\phi . \quad (1.22)$$

L'équation d'induction se réécrit

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{s}\mathbf{u}_p \cdot \nabla (sA) = \eta \left(\Delta - \frac{1}{s^2} \right) A , \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + s\mathbf{u}_p \cdot \nabla \left(\frac{B}{s} \right) = s\mathbf{B}_p \cdot \nabla \left(\frac{U}{s} \right) + \eta \left(\Delta - \frac{1}{s^2} \right) B , \quad (1.24)$$

où $\mathbf{B}_p = \nabla \times (A\mathbf{e}_\phi)$. On peut déjà noter que le champ magnétique toroïdal n'apparaît pas dans l'équation pour A . Les équations précédentes se simplifient si l'on utilise le changement de variable $A = \chi/s$, $B = s\psi$ et $U = s\Omega$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla \chi = \eta \left(\Delta - \frac{2}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \chi , \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla \psi = \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega + \eta \left(\Delta + \frac{2}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi . \quad (1.26)$$

Il est clair que le champ magnétique poloïdal décroît donc vers zéro, indépendamment de la composante toroïdale, puisque celle-ci n'apparaît pas dans l'équation. Dans ce cas, le terme source $\mathbf{B}_\rho \cdot \nabla \Omega$ de l'équation 1.26 disparaît, et le champ magnétique toroïdal décroît également. L'axisymétrie des champs conduit donc à l'impossibilité d'une amplification du champ magnétique. Un des résultat de cette thèse est de montrer que le théorème de Cowling, bien que rigoureusement exact, reste toutefois limité à des cas très idéalisés.

Un apport considérable à la compréhension de l'effet dynamo a été fourni à partir des années 60 grâce à l'approche dite 'de champ moyen'. La théorie de champ moyen repose sur l'existence d'une séparation d'échelle dans le champ magnétique et cinétique. On décompose ainsi les champs en une composante moyenne de grande échelle et une composante de petite échelle, soit $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}'$ et $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$. Dans certains cas, il est alors possible de décrire l'évolution du champ magnétique moyen $\bar{\mathbf{B}}$ en ne connaissant que le champ de vitesse moyen et les propriétés statistiques du champ de vitesse fluctuant $\mathbf{u}'$. En effet, sous cette décomposition de Reynolds, l'équation d'induction devient

$$\partial_t \bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \epsilon + \nabla \times (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \bar{\mathbf{B}}) , \quad (1.27)$$

avec $\epsilon = \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}$. On voit que la dynamique du champ moyen est gouvernée par l'équation d'induction habituelle impliquant l'écoulement moyen auquel s'ajoute un nouveau terme source issu des champs fluctuants. Notons que la partie fluctuante du champ de vitesse peut être un champ de vitesse turbulent classique, ou une composante particulière de petite échelle. Sous certaines hypothèses, comme l'homogénéité de la turbulence par exemple, il est possible de relier le champ moyen à ϵ à travers la relation simple $\epsilon = \alpha \bar{\mathbf{B}}$. L'équation d'évolution devient

$$\partial_t \bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \alpha \bar{\mathbf{B}} + \nabla \times (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \bar{\mathbf{B}}) . \quad (1.28)$$

Cette forme de l'équation d'induction a été obtenue pour la première fois par Steenbeck et Krause en 1966 [80], la force électromotrice correspondante fournissant un effet α . On retrouve ici le même concept que pour l'effet Parker obtenu 10 ans auparavant, avec la possibilité de créer du champ poloïdal à partir d'une composante toroïdale. On peut donc voir le terme α des théories de champ moyen comme un effet Parker se produisant aux petites échelles de manière statistique, ce qui explique qu'il soit souvent associé aux mouvements cycloniques du fluide qui existent aux petites échelles. Il existe de nombreuses applications aux théories de champ moyen. Ce formalisme permet de réaliser des calculs analytiques. De plus, d'un point de vue numérique, il est plus aisé de manipuler l'équation d'induction modifiée 1.28 avec un terme source α , plutôt que d'implémenter une vitesse turbulente, avec un haut degré de fluctuations. Toutefois, il faut se souvenir qu'il s'agit d'une approximation, reposant sur plusieurs hypothèses. Par exemple, la séparation d'échelle indispensable à la construction de l'équation 1.28 n'est pas toujours vérifiée. Il est alors nécessaire d'étudier le problème d'un point de vue classique, par exemple en réalisant des simulations numériques directes de l'équation d'induction originale, avec une description complète de l'écoulement. Durant cette thèse, nous avons étudié deux cas différents

qui illustrent à la fois l'intérêt et les limitations de l'approche de champ moyen : dans l'étude de la dynamo galactique (voir annexe C), les résultats issus de simulations directes 3D sont en très bon accord avec les résultats prédits à l'aide de la théorie de champ moyen. Dans l'étude de la dynamo cinématique de VKS, nous verrons qu'il est compliqué de décrire les résultats expérimentaux à l'aide d'une approche de champ moyen, là où des simulations directes sans séparation d'échelle permettent d'obtenir des résultats satisfaisants.

Chapitre 2

Approche Expérimentale de l'effet dynamo

Contents

2.1	La Terre en laboratoire	17
2.2	VKS : montage expérimental	24
2.3	Résultats de l'expérience VKS	27
2.3.1	Ecoulement	27
2.3.2	Génération du champ magnétique	30
2.3.3	Géométrie du mode dynamo	31
2.3.4	Une dynamo $\alpha - \omega$	33
2.3.5	Régimes dynamiques	36
2.3.6	Renversements	38
2.4	Conditions aux limites et dynamique du champ	46
2.4.1	Contra-rotation exacte	47
2.4.2	Contra-rotation non-exacte	51
2.4.3	Co-rotation	55
2.4.4	Décomposition dipole-quadrupole	57
2.4.5	Dynamique de basse dimension dans l'expérience VKS	60

2.1 La Terre en laboratoire

La théorie dynamo permet d'expliquer l'origine des champs magnétiques géophysiques et astrophysiques, mais certaines questions restent encore sans réponses. Afin de répondre à ces interrogations, les méthodes d'observation du champ magnétique terrestre et de son évolution passée n'ont de cesse de s'améliorer. Cela permet d'extraire les informations indispensables à notre compréhension de l'effet dynamo, comme la structure ou la dynamique du champ magnétique. Malgré cela, et en dépit de l'ingéniosité dont font preuve les géophysiciens, les mesures disponibles restent

rares et peu précises. Le développement de l'astrophysique, et les découvertes en planétologie en particulier, devraient permettre dans les prochaines décennies d'obtenir de plus en plus d'informations sur le champ magnétique d'autres planètes et étoiles. Toutefois, ces observations permettent surtout de connaître le champ magnétique à l'instant présent. Nous avons vu en introduction que pour la Terre, les données paléomagnétiques permettent de déterminer la dynamique du champ sur des temps plus longs. L'absence de données paléomagnétiques pour les autres planètes rend pour l'instant impossible la détermination de la dynamique de renversements de ces champs par exemple. Nous avons également vu que les simulations numériques, bien que de plus en plus puissantes, sont encore très loin du régime de paramètre approprié.

L'approche expérimentale apparaît comme un moyen indispensable pour étudier l'effet dynamo à l'origine des champs magnétiques naturels. Du point de vue géophysique, il est très important de reproduire au mieux les caractéristiques d'une dynamo naturelle. Ainsi, depuis les premiers travaux expérimentaux sur l'effet dynamo, les physiciens ont sans cesse cherché à se rapprocher des conditions géophysiques, chacune des nouvelles expériences faisant apparaître de nouveaux phénomènes surprenants et enrichissants. De plus, d'un point de vue purement physique, la reproduction d'un champ dynamo en laboratoire est un outil intéressant pour accroître notre compréhension des phénomènes non-linéaires en général.

La dynamo disque de Bullard (ou bien la variante à deux disques proposée par Rikitake) illustre de manière simple le mécanisme de l'effet dynamo auto excité. En fait, cette dynamo n'a jamais été réalisée expérimentalement car la fréquence de rotation du disque nécessaire à l'obtention d'un champ magnétique est trop grande pour être atteinte en pratique. Si cette dynamo était toutefois réalisée, on pourrait immédiatement pointer du doigt son manque de réalisme : dans cette expérience, la géométrie du fil électrique connecté au disque est de telle sorte que le champ magnétique créé par le courant vient exactement renforcer le champ préexistant. Une telle contrainte géométrique est évidemment inexistante au sein de l'écoulement turbulent de fer liquide dans le noyau terrestre.

Dès les premières expériences dynamos, l'objectif fut donc de s'orienter vers une situation plus réaliste. Lowes et Wilkinson, en 1963, proposent pour la première fois une dynamo en laboratoire [47]. Leur configuration expérimentale s'inspire de calculs théoriques d'Herzenberg réalisés en 1958 [29]. Dans cette expérience, les deux physiciens cherchent à créer une situation dans laquelle les courants électriques ne soient plus contraints géométriquement, comme dans la dynamo de Bullard. Dans un travail en collaboration avec Nicolas Mordant, dans le cadre de l'enseignement pour les étudiants de l'Ecole Normale Supérieure, nous avons construit un dispositif expérimental inspiré de cette configuration (une photo de notre expérience est présentée sur la figure 2.1). L'expérience est constituée de deux cylindres non-coaxiaux tournant à des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 . Lorsque l'angle entre les deux axes des cylindres est de $\pi/2$, la situation est favorable à la création spontanée d'un champ magnétique. Le mécanisme est le suivant : la rotation ω_1 de l'un des cylindres amplifie

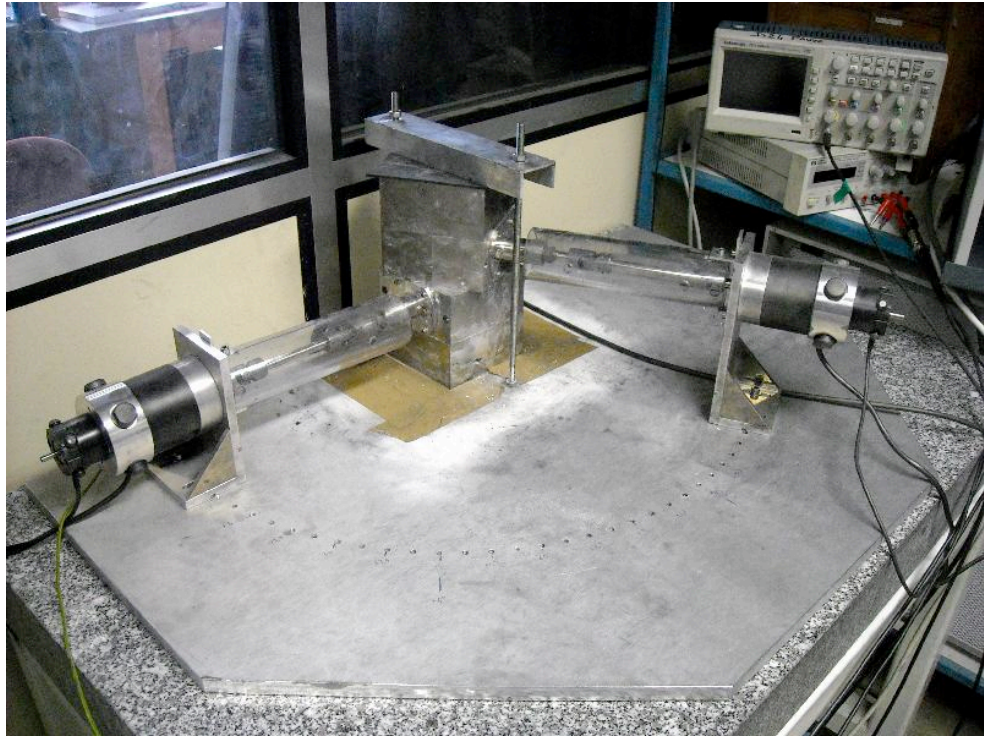


FIG. 2.1: Photo de l'expérience de Lowes et Wilkinson, reproduite au cours d'un travail en collaboration avec Nicolas Mordant. On y distingue clairement les deux moteurs et le bloc central contenant les rotors. Les blocs font environ 20 cm de largeur.

un champ initialement axial B_{01} dans la direction toroïdale. Grâce à l'angle choisit, ce champ toroïdal agit alors comme un champ axial B_{02} pour le deuxième cylindre qui peut alors, par le même mécanisme, ré-amplifier le champ initial du premier cylindre (voir figure 2.2, à gauche). L'intensité d'un tel mécanisme dépend évidemment des vitesses de rotation des cylindres. Si la rotation des cylindres est suffisamment rapide, le champ induit est plus grand que le champ initial, et ce phénomène typique d'instabilité conduit à la génération de champ magnétique auto-entretenu à partir d'une perturbation infinitésimale. Le diagramme de bifurcation de cette instabilité est illustré sur la figure 2.2, à droite. Pour certaines valeurs des vitesses de rotation des cylindres, il est possible d'observer une dynamique plus complexe qu'une simple dynamo stationnaire, comme des oscillations périodiques du champ magnétique [48]. Dans cette expérience, les courants ne sont plus contraints à se déplacer dans des fils, mais peuvent circuler n'importe où à l'intérieur des cylindres et des blocs qui les entourent. Ainsi, bien qu'il s'agisse d'une dynamo solide, cette expérience a permis de montrer qu'il est possible d'obtenir un effet dynamo reproduisant le caractère homogène de la dynamo terrestre.

Après Lowes et Wilkinson, l'étape suivante dans l'étude de dynamos expérimentales fut donc naturellement d'obtenir une dynamo à partir de l'écoulement d'un fluide conducteur plutôt qu'avec un solide en rotation. Il s'agit là d'un grand défi, à la fois technique et théorique, car plusieurs éléments viennent compliquer la génération

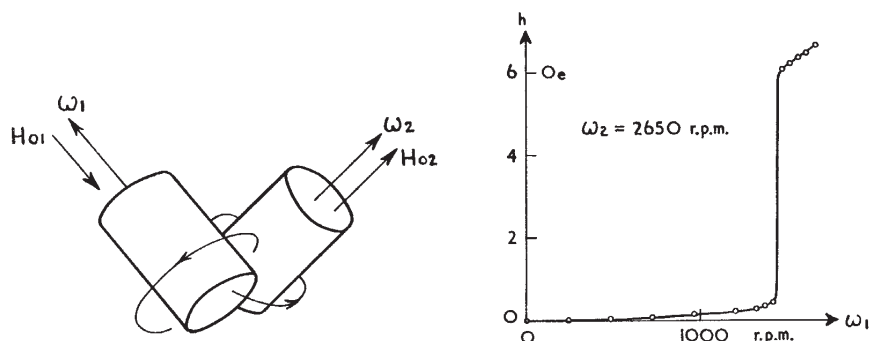


FIG. 2.2: Diagramme schématique de l'expérience de Lowes et Wilkinson illustrant le mécanisme d'amplification du champ magnétique.

du champ magnétique. Effectivement, en plus de l'homogénéité des courants induits, on libère une contrainte supplémentaire sur le mouvement même du conducteur. En utilisant un fluide conducteur, on ne peut contrôler le mouvement aussi bien qu'avec de simples rotors et rien ne garantit alors un mécanisme dynamo suffisamment efficace. Les premières dynamos fluides furent pourtant observées en 1999 et 2000, avec les expériences de Riga [22], en Lettonie, et de Karlsruhe [82], en Allemagne. Ces deux dynamos expérimentales furent motivées par l'existence d'écoulements modèles connus pour engendrer théoriquement un effet dynamo. Par exemple, dans le cas de l'expérience de Riga, l'équipe a utilisé un écoulement de sodium liquide en mouvement hélicoïdal dans un cylindre. Cette géométrie s'approche ainsi d'une solution analytique au problème de la dynamo proposée par Ponomarenko [69] en 1973, qui a prouvé que le mouvement hélicoïdal d'un cylindre infini dans un bloc de même conductivité conduit à une dynamo cinématique. L'expérience de Karlsruhe s'inspire d'une solution analytique proposée par Roberts [75]. Les schémas de ces deux expériences sont visibles sur la figure 2.3. Dans ces deux expériences, l'idée fut donc d'obtenir une configuration de l'écoulement aussi proche que possible de l'écoulement théorique connu pour sa capacité à engendrer une dynamo. En pratique, le métal liquide est donc contraint à se déplacer dans un réseau de tuyauterie, assurant ainsi la bonne structure au champ de vitesse. Le succès de ces deux expériences a contribué à mieux comprendre l'effet dynamo. Ce fut avant tout la première preuve expérimentale de génération d'un champ magnétique par effet dynamo au sein d'un fluide conducteur. D'autre part, ce fut une occasion unique de comprendre un peu mieux les mécanismes de saturation du champ magnétique. Ces expériences montrent par exemple que le régime de saturation du champ magnétique dépend du nombre de Reynolds [65]. Toutefois, l'aspect contraint de l'écoulement dans les deux expériences les rend encore très éloignées des systèmes naturels, où le métal liquide est en général extrêmement turbulent. En dépit de nombres de Reynolds importants, les résultats expérimentaux concernant la structure du champ magnétique sont en très bon accord avec les résultats numériques utilisant une description simplifiée, qui ne tient pas compte des fluctuations turbulentes (voir par exemple [84]). Cet accord avec les dynamos cinématiques laminaires s'explique peut-être par la contrainte géométrique de l'écoulement dans ces deux expériences, qui limite les

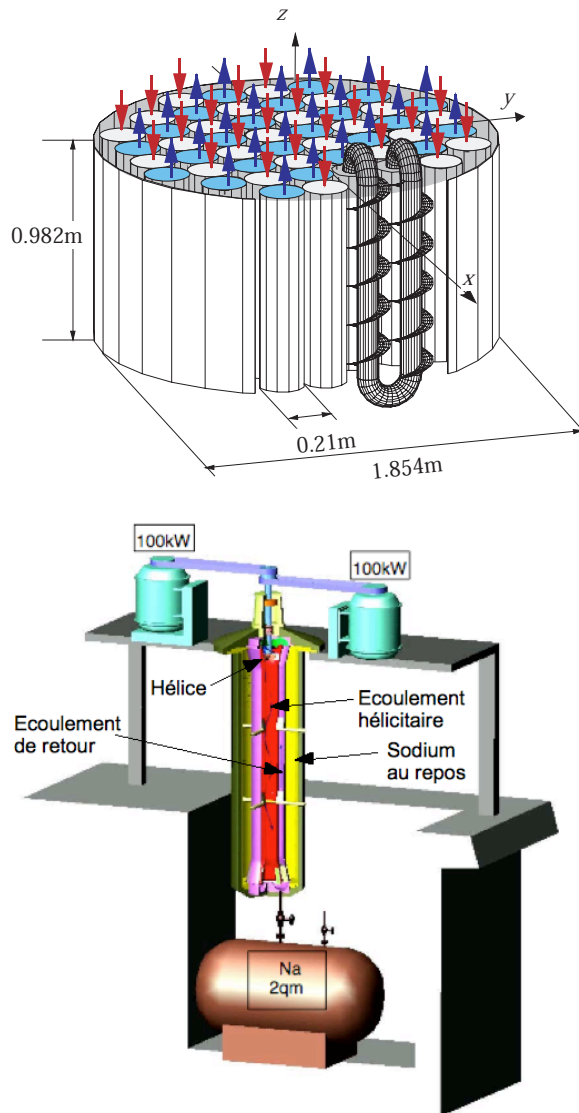


FIG. 2.3: Illustration schématique des expériences de Karlsruhe (En haut) et de Riga (en bas).

fluctuations turbulentes de grandes échelles.

C'est dans ce contexte qu'apparaît tout l'intérêt de l'expérience VKS. Il est intéressant d'obtenir un effet dynamo au sein d'un fluide complètement turbulent et non contraint, avec un écoulement totalement libre de s'organiser. Cette situation est effectivement beaucoup plus proche de l'écoulement qui existe au sein du noyau terrestre ou dans la zone convective du soleil par exemple. De façon plus générale, c'est également l'occasion d'étudier expérimentalement l'apparition d'une instabilité en présence de fluctuations. L'existence de grandes fluctuations turbulentes dans le système fait effectivement émerger de nombreuses questions fondamentales : Quel est le rôle de la turbulence sur le seuil d'apparition d'une dynamo, et comment un

écoulement fortement turbulent s'organise-t-il pour saturer l'instabilité ? Quel est l'impact des fluctuations hydrodynamiques sur la structuration spatiale du mode magnétique ? Comment le système s'organise-t-il pour mettre en place une dynamique complexe (comme des oscillations périodiques ou des renversements chaotiques du champ). Autant de questions auxquelles l'expérience VKS tente d'apporter des réponses. C'est également autour de cette problématique que s'organisent les travaux numériques de cette thèse.

Il existe en fait plusieurs tentatives à travers le monde qui tentent de reproduire une telle expérience afin de répondre à ces diverses questions. A ce jour, seule l'expérience VKS a mis en évidence la génération spontanée d'un champ magnétique par effet dynamo au sein d'un écoulement non-contraint. A Grenoble, une équipe de géodynamo française a mis au point l'expérience DTS (voir figure 2.4), qui consiste en la rotation différentielle de deux sphères concentriques dont l'espace entre les sphères contient 40 litres de sodium liquide. Un champ magnétique dipolaire est imposé à l'aide d'aimants permanents placés dans la sphère interne. Bien que l'effet dynamo ne soit pas un des objectifs de cette expérience, l'expérience DTS a permis d'obtenir d'intéressants résultats d'induction (voir par exemple [78],[60]). Cette expérience permet en particulier d'étudier des équilibres de forces similaires à ceux supposés au sein du noyau terrestre. L'équipe située à l'université du Maryland, aux Etats-

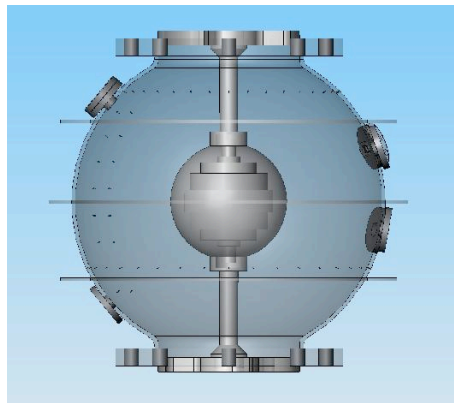


FIG. 2.4: Illustration schématisque de l'expérience DTS, à Grenoble.

Unis, sous la direction de Daniel Lathrop, a construit une sphère de trois mètres de diamètre à l'intérieur de laquelle se trouve une graine sphérique. Cet écoulement de Couette-Taylor sphérique, similaire à DTS, n'a pas encore engendré d'effet dynamo. A Perm, en Russie, l'équipe de Peter Frick utilise un tore en rotation rapide soumis à un freinage brutal. Pendant le court intervalle de temps pendant lequel le fluide retourne à l'équilibre, cette équipe espère observer la génération d'un champ magnétique par effet dynamo. Enfin, l'équipe de Cary Forest, à l'université du Wisconsin à Madison, étudie une configuration présentant quelques similarités avec l'expérience VKS. Il s'agit d'une sphère d'1 mètre de diamètre, remplie de sodium liquide, dans laquelle se trouvent deux hélices en contra-rotation (voir figure 2.5). Cette expérience n'a pas non plus montré, à ce jour, de génération d'un champ magnétique par effet

dynamo, mais d'intéressantes études d'induction ont également été menées [79].

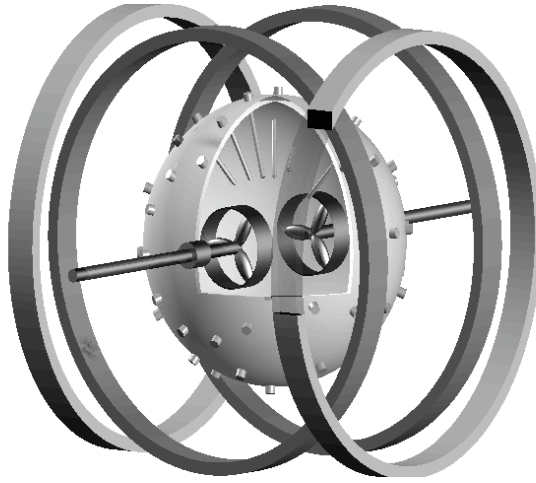


FIG. 2.5: Illustration schématique de l'expérience du Wisconsin. On voit clairement les deux hélices plongées à l'intérieur de la sphère.

Tout au long de ce chapitre, nous allons présenter l'expérience VKS de manière non-exhaustive, en essayant de se restreindre aux résultats les plus importants. De plus, nous donnerons les différentes interprétations théoriques qui ont été proposées. Les modélisations numériques réalisées pendant ma thèse se poseront alors comme un outil essentiel pour comprendre certains aspects de l'expérience, et dans certains cas faire le lien avec les explications théoriques.

2.2 VKS : montage expérimental

L'expérience VKS (pour Von Karman Sodium) est le fruit d'une collaboration réunissant le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) de Saclay et les Ecoles Normales Supérieures (ENS) de Lyon et de Paris. L'idée centrale, proposée par Stephan Fauve dès 1993, est d'engendrer la dynamo à l'aide d'un écoulement dit de 'von Karman' dans un cylindre contenant un métal liquide, à l'aide de deux disques ou turbines en rotation, situées aux deux extrémités du cylindre. C'est von Karman qui, en 1921, étudia en premier l'écoulement dans un domaine semi-infini entraîné par un disque en rotation [38]. Cette étude fut généralisée par la suite par Batchelor en 1951, qui étendit le problème à deux disques en rotations [5]. Les détails de la configuration expérimentale ont subi, au cours des quinze dernières années, de nombreuses modifications. La difficulté à obtenir la génération d'un champ magnétique a poussé l'équipe à tester différentes configurations, cherchant continuellement à abaisser le seuil de la dynamo, ou accroître la puissance disponible. Tout au long de ce chapitre, on s'intéresse principalement à la configuration ayant pour la première fois mené à un effet dynamo. Nous discuterons toutefois à la fin de ce chapitre l'effet des certaines modifications apportées à l'expérience. Un schéma du dispositif

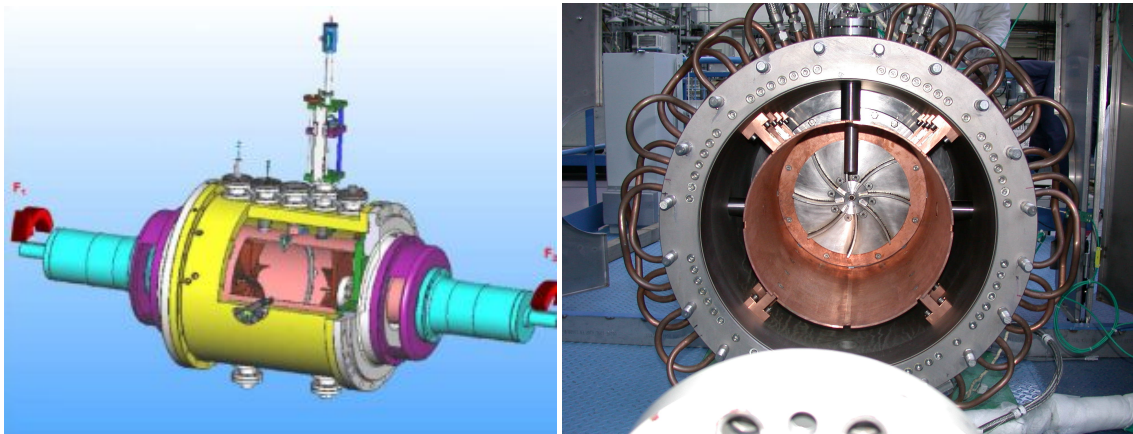


FIG. 2.6: L'expérience VKS. A gauche : schéma typique de l'expérience. Le cylindre, placé horizontalement, est muni de deux disques en contra-rotation. A droite : photo de l'intérieur de l'expérience lorsque l'un des disques est retiré : On voit au fond le deuxième disque et l'espace entre la cuve et le cylindre extérieur, permettant l'ajout du sodium au repos. Noter la présence de nombreux tuyaux assurant le refroidissement de l'ensemble.

expérimental, ainsi qu'une photo de l'expérience, sont présentés sur la figure 2.6. L'expérience VKS est constituée d'une cuve en cuivre, remplie d'environ 150 litres de sodium liquide. On trouve sur le schéma 2.7 les dimensions exactes du dispositif. La cuve est un cylindre de rayon $R = 289\text{mm}$ et de longueur $L = 606\text{mm}$. En fait, l'intérieur de cette cuve est séparée en deux domaines distincts par un cylindre en cuivre de 4mm d'épaisseur. A l'intérieur de ce cylindre de rayon $R_i = 206\text{mm}$, le sodium est mis en mouvement par les turbines, tandis qu'à l'extérieur le sodium y est

au repos. Les turbines sont deux disques coaxiaux avec l'axe du cylindre, de rayon 155mm et séparés entre eux de 412mm . Un entraînement visqueux de ces disques n'étant pas très efficace, chacun des disques est muni de huit pales courbes de hauteur 41mm , afin d'accroître le forçage inertiel du fluide. Nous verrons par la suite qu'il est possible que ces pales jouent un rôle plus important. La courbure des pales fournit un moyen supplémentaire de varier la configuration de l'expérience, puisque cela implique que les deux sens de rotation ne soient pas tout à fait équivalents quant à la structure de l'écoulement. Les disques ainsi que les pales étaient en acier inoxydable avant 2006, et ont été remplacés par des disques en fer doux, de perméabilité magnétique de l'ordre de 1000. Nous verrons qu'il s'agit d'une modification cruciale apportée à l'expérience. Enfin, il est possible dans l'expérience d'ajouter un fin anneau de cuivre dans le plan médian du cylindre intérieur, de rayon 175mm et d'épaisseur 5mm .

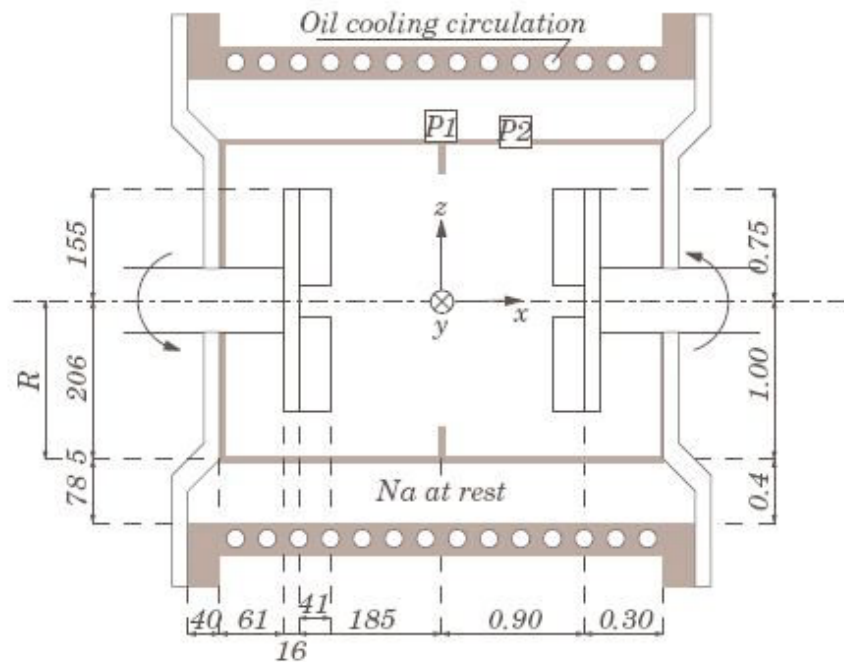


FIG. 2.7: Schéma de l'expérience VKS indiquant les cotes exactes du dispositif. À gauche, les valeurs indiquées sont en mm tandis qu'elles sont normalisées par le rayon de la cuve à droite.

Les deux disques sont mis en rotation à l'aide de quatre moteurs fournissant une puissance de 150kW pour chaque disque. Ces 300 kW disponibles permettent d'atteindre des fréquences de rotation d'environ 30 Hz . Il est possible de faire tourner ces deux disques dans les deux sens, en théorie indépendamment l'un de l'autre. Lorsque les disques tournent en sens opposé, le fluide est alors soumis à un fort cisaillement dans le plan médian du cylindre et l'on atteint un régime très fortement turbulent. Les 300kW fournis au sodium liquide provoquent inévitablement une

augmentation de la température du fluide. Tout autour de la cuve se trouve donc un réseau de tuyaux de refroidissement, afin de réguler la température du sodium liquide à environ 120° . En effet, la conductivité électrique du sodium diminue avec la température et puisqu'il s'agit d'une expérience à priori près du seuil d'instabilité, un changement, même minime, de cette conductivité peut affecter grandement la génération du champ magnétique.

L'instrumentation de l'expérience VKS est également une part importante du dispositif. Il est possible de mesurer la puissance injectée dans l'écoulement ainsi que la température à l'intérieur de la cuve. Pour mesurer le champ magnétique, nous utilisons principalement des capteurs à effet Hall. Les mesures sont généralement réalisées avec un gaussmètre unique ou des sondes multiples, assemblages constitués d'une dizaine de sondes Hall. La présence de 'doigts de gants', sortes de tubes métalliques plongeant à l'intérieur de la cuve dans lesquels les sondes sont insérées, permet d'obtenir la valeur du champ à l'intérieur de l'écoulement. Il est en revanche plus difficile d'obtenir des informations sur le champ de vitesse. Nous verrons tout au long de cette thèse que l'écoulement est donc souvent déduit indirectement à partir de mesures en eau. Une expérience a dans ce but été développée à Saclay, où est utilisée une cuve en tout point identique à celle de l'expérience VKS, mais à l'échelle $1/2$ et remplie d'eau. Des développements sont actuellement en cours, notamment suite à la thèse de M. Berhanu, afin d'obtenir des mesures hydrodynamiques à partir de sondes à différence de potentiel dans le sodium.

2.3 Résultats de l'expérience VKS

2.3.1 Écoulement

Plusieurs raisons ont motivé cette configuration d'un cylindre muni de deux disques en contra-rotation. Il s'agit avant tout d'un type d'écoulement bien connu, qui a été l'objet de nombreuses études hydrodynamiques dans les années 80 et 90 (voir par exemple [21]). En particulier, le champ de vitesse produit contient deux ingrédients importants connus pour favoriser l'effet dynamo : une forte rotation différentielle ainsi que de l'hélicité cinétique, sur lesquelles nous reviendrons plus tard. Mais l'intérêt majeur de l'expérience VKS réside dans le fait que cette configuration permet d'obtenir un niveau extrêmement important de turbulence. L'écoulement, complètement chaotique, n'apparaît structuré qu'à condition de réaliser une moyenne temporelle. C'est ce champ de vitesse moyen que nous allons décrire dans un premier temps.

L'écoulement moyen produit au sein de la cuve est dit de 'von Karman'. Lorsqu'un des disques tourne, il produit localement un fort entraînement du fluide dans la direction azimutale. Si les deux disques tournent en sens opposé mais à des vitesses de rotation identiques, régime parfois appelé 'contra-rotation exacte', cela produit deux cellules de vitesse toroïdale contrarotatives. Par symétrie, la rotation du fluide, de sens opposé près de chaque disque, doit s'annuler dans le plan médian entre les deux disques. C'est pourquoi cela donne naissance, en rotation rapide, à un fort cisaillement dans le plan équatorial du cylindre. Il y a également une forte recirculation poloïdale : lorsqu'un disque tourne, il crée une force centrifuge qui éjecte le fluide depuis l'axe central vers la périphérie du cylindre. Le fluide recircule vers l'axe près de la couche médiane, pour y être fortement pompé en direction des disques. La figure 2.8 montre schématiquement à quoi ressemble l'écoulement moyen de Von Karman. Selon la classification introduite par Dudley et James en 1989 [20], cet écoulement est parfois considéré comme étant du type $s_2^0 + t_2^0$, car il implique à la fois une partie poloïdale et une partie toroïdale de degrés d'harmonique sphérique $l = 2$ et $m = 0$.

La caractéristique principale de cet écoulement est donc qu'il présente tout d'abord une forte rotation différentielle, due au cisaillement de la contra-rotation dans le plan équatorial. Il s'agit d'une manière très efficace d'amplifier du champ magnétique, par exemple en advectant non-uniformément des lignes de champ initialement axiales, créant ainsi du champ selon la direction azimutale. Une autre source de cisaillement vient également de la présence des pales. Le fluide juste après les disques ne tourne jamais totalement à la même vitesse que le disque, mais légèrement moins vite. Toutefois, la présence des pales délimite des espaces où le fluide y est entraîné en bloc, à une vitesse proche de celle des disques. Dans cette zone, il existe une variation très rapide de vitesse créant un fort cisaillement. Nous reviendrons plus tard sur les implications d'un tel cisaillement.

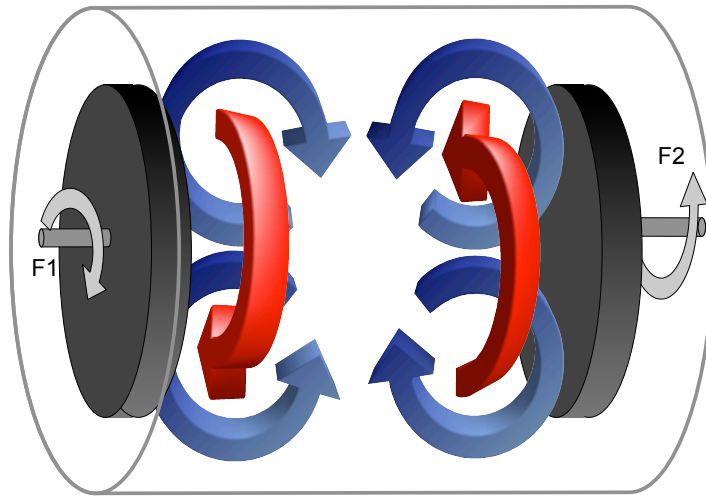


FIG. 2.8: Schéma illustrant l'écoulement de von Karman. Sur ce dessin, on voit clairement les deux disques en contra-rotation. En rouge sont illustrées les deux cellules de rotation azimutale et en bleu la recirculation poloïdale due à l'expulsion centrifuge du fluide près des disques.

L'hélicité cinétique est la deuxième caractéristique forte de l'écoulement. Par exemple, la combinaison de l'éjection centrifuge du fluide avec la rotation azimutale différentielle rend la vitesse fortement hélicitaire près des disques. Ceci peut mener à un couplage des parties poloïdale et toroïdale du champ magnétique et fournir un mécanisme dynamo.

Tel qu'il vient d'être décrit, ce forçage, et l'écoulement qu'il provoque, possèdent d'importantes symétries. Si l'on considère n'importe quel axe contenu dans le plan équatorial entre les deux disques, le système demeure invariant par une rotation d'un angle π autour de cet axe. Nous dénoterons dans la suite de cette thèse cette symétrie fondamentale par R_π . De plus, l'écoulement moyen est axisymétrique, ce qui signifie qu'il est invariant par toute rotation autour de l'axe des disques. Comme tout problème de physique, et tout particulièrement dans l'étude d'instabilité, il est capital de bien identifier les symétries du problème, et surtout les conditions dans lesquelles ces symétries sont brisées. Par exemple nous savons déjà grâce au théorème de Cowling que cette vitesse axisymétrique ne pourrait fournir seule un mécanisme de génération d'un champ magnétique principalement axisymétrique. De plus, nous verrons que l'ensemble des comportements dynamiques du champ magnétique n'apparaissent que lorsque la symétrie R_π du forçage est brisée, c'est-à-dire lorsqu'un des disques tourne plus vite que l'autre.

Lorsque les deux disques tournent à des vitesses de rotation différentes, mais toujours en sens opposé, l'écoulement devient alors dissymétrique. Effectivement, le pompage et l'entraînement est plus important près du disque le plus rapide. Dans la limite où l'un des disques possède une vitesse nulle, l'écoulement tend vers une

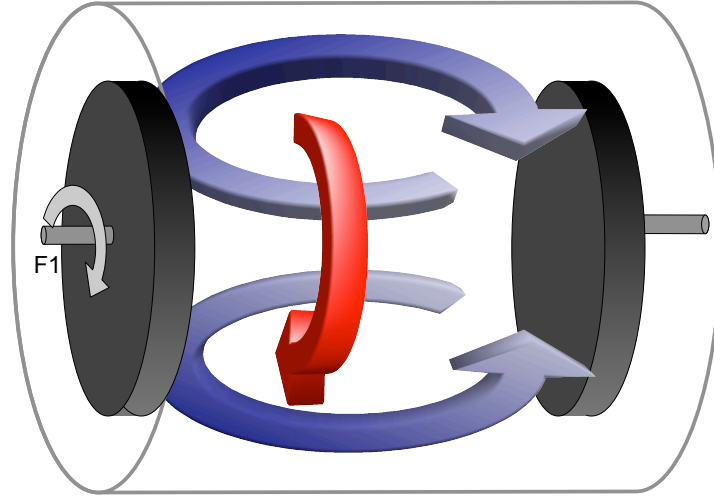


FIG. 2.9: Écoulement de von Karman créée par la rotation d'un seul disque, l'autre étant à l'arrêt ($F_2 = 0$).

topologie du type de celle illustrée à la figure 2.9. Sur la figure 2.9, on voit que le pompage a toujours lieu près de l'axe, mais celui-ci ne change plus de signe avec z . La recirculation se produit donc sur l'ensemble du cylindre et non sur chaque moitié comme précédemment. Le partie toroïdale du champ, elle aussi, ne change pas de signe. Ce champ de vitesse peut être classifié dans la catégorie $\mathbf{s}_1^0 + \mathbf{t}_1^0$ de la classification de Dudley et James. Il s'agit ainsi du mode de plus grande échelle anti-symétrique par rapport à la rotation R_π . En contra-rotation non-exacte l'écoulement moyen est donc une combinaison de ces deux types de vitesses.

Pour finir, il est important d'insister sur le caractère turbulent de l'écoulement. Effectivement, les caractéristiques géométriques que l'on vient de décrire, et en particulier la structure bien définie des figures 2.8 et 2.9, ne s'appliquent pas vraiment au champ de vitesse instantané de l'expérience. Dans le sodium liquide, et aux vitesses de rotation utilisées, les nombres de Reynolds atteints sont supérieurs à 10^6 . Ainsi, une mesure instantanée du champ de vitesse ne présente que très peu de ressemblance avec l'écoulement moyen de Von Karman décrit précédemment. Au contraire, l'écoulement à un instant donné est extrêmement chaotique et les fluctuations turbulentes atteignent des valeurs du même ordre de grandeur que le champ de vitesse moyen. Pour obtenir ce champ de vitesse moyen et reconnaître une structure cohérente dans l'écoulement, il est donc nécessaire d'effectuer une moyenne sur des temps de l'ordre de plusieurs secondes. En particulier, cela signifie que les symétries du problème ne sont pas les mêmes selon l'échelle de temps sur laquelle on considère le système. Par exemple, en contra-rotation exacte, le champ de vitesse instantané n'est ni axisymétrique, ni R_π -symétrique.

2.3.2 Génération du champ magnétique

Au cours des différentes campagnes de l'expérience VKS, plusieurs conventions ont été utilisées pour définir le nombre de Reynolds magnétique, contrôlant la bifurcation dynamo. La différence entre les diverses définitions reste suffisamment petite pour ne pas modifier la discussion des résultats. Nous choisisons ici la convention adoptée entre autres par Michael Berhanu au cours de sa thèse, qui consiste à utiliser la vitesse de bord des disques comme vitesse caractéristique et le rayon des disques comme longueur caractéristique, soit :

$$Rm = \mu_0 \sigma 2\pi F R^2 \quad (2.1)$$

où F est la fréquence de rotation des disques, μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, σ est la conductivité électrique du sodium liquide et R le rayon des disques. Dans cette expérience, Il s'agit donc d'atteindre le nombre de Reynolds magnétique critique de l'instabilité dynamo nécessaire à la génération du champ magnétique. La puissance disponible ainsi que l'utilisation de sodium liquide conduisent à des Rm de l'ordre de 50. Le sodium liquide possède une viscosité cinématique environ 10^{-6} fois plus petite que sa diffusivité magnétique. De ce fait, on s'attend à ce que l'écoulement soit extrêmement turbulent lors de l'observation d'une dynamo, avec des nombres de Reynolds de l'ordre de $Re \sim 5.10^6$ au seuil. Dans le cas de la contra-rotation non exacte, on pourra également définir des nombres de Reynolds magnétiques basés sur chacun des deux disques, c'est-à-dire $Rm_i = \mu_0 \sigma 2\pi R^2 F_i$.

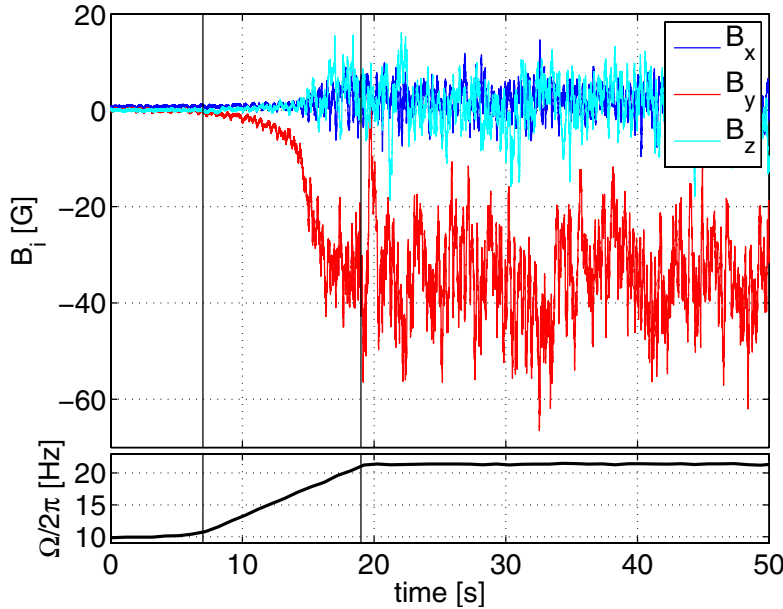


FIG. 2.10: Enregistrement des composantes du champ magnétique au cours du temps. Rm est augmenté de 19 jusqu'à 40

En septembre 2006, l'expérience VKS a engendré pour la première fois un champ magnétique par effet dynamo au sein d'un écoulement fortement turbulent [56]. Nous

nous intéressons d'abord dans cette section au cas de la contra-rotation exacte, où les deux disques tournent à la même fréquence. L'instabilité dynamo se déclenche pour un nombre de Reynolds magnétique critique de l'ordre de $Rm \sim 30$. La figure 2.10 montre l'évolution typique du champ magnétique lorsque l'on augmente la fréquence de rotation des disques. Les trois composantes du champ magnétique sont mesurées avec une sonde à effet Hall 3D. Sur la figure 2.10, la sonde est placée dans le plan médian du cylindre, en périphérie de l'écoulement. On peut noter qu'à cet endroit, la composante azimutale B_ϕ domine largement les deux autres composantes. Celle-ci augmente à partir de la valeur du champ magnétique terrestre (environ 0.5 Gauss) jusqu'à une valeur de 40 Gauss environ. Même si cela est peu visible sur la figure en raison des fortes fluctuations du signal, il est important de noter que les deux autres composantes du champ ont également des valeurs moyennes non-nulles. Cette observation souligne le niveau important de fluctuations dues à la turbulence hydrodynamique de l'écoulement, comme on s'y attendrait avec $Re \sim 10^6$. Toutefois, malgré ces importantes fluctuations, on observe une bifurcation statistiquement stationnaire du champ magnétique. La valeur moyenne atteinte dans le régime de saturation dépend évidemment de l'écart au seuil de la dynamo.

Un diagramme de bifurcation est montré sur la figure 2.11(a) et permet d'apprécier l'évolution de la valeur moyenne du champ azimutal dans le plan médian en fonction de Rm . Lorsque l'on répète plusieurs fois l'expérience dans les mêmes conditions, le signe du champ magnétique est choisi aléatoirement par le système, en raison de l'invariance par inversion du signe de B dans l'équation d'induction. On montre sur la figure 2.11(b) l'évolution du champ près des disques. Dans ce cas, on montre également la courbe de bifurcation dans le cas où l'on inverse le sens de rotation des deux disques, régime parfois nommé 'anti-contra'. A cause de la courbure des pales sur les disques, ces deux situations ne sont pas équivalentes et l'écoulement du fluide est légèrement différente. Ceci illustre la sensibilité du mode magnétique vis-à-vis de l'écoulement. Dans les deux cas étudiés, on peut voir qu'il s'agit d'une bifurcation fourche, stationnaire et supercritique.

2.3.3 Géométrie du mode dynamo

Une étape importante dans la compréhension de l'expérience VKS est la détermination de la structure spatiale du champ magnétique engendré. Effectivement, cela permet de répondre à plusieurs questions, comme par exemple le mécanisme de génération du champ magnétique. Dans l'expérience, pour des raisons de difficultés techniques, on dispose en général de très peu de points de mesures. Ce problème rend difficile la détermination exacte de la structure du mode magnétique observé, et seules quelques indications peuvent être données. On dispose toutefois d'assez d'informations pour déduire les symétries du mode magnétique et sa structure aux grandes échelles. Nous verrons que ceci est suffisant pour avancer quelques interprétations physiques. Les composantes de petites échelles du champ n'ont néanmoins pas pu être déterminées pour l'instant.

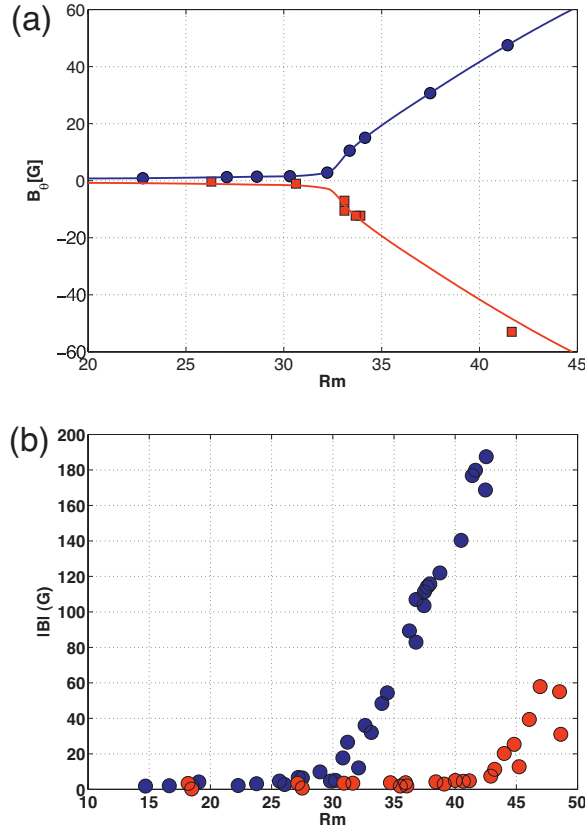


FIG. 2.11: Diagrammes de bifurcation. (a) : champ azimuthal dans le plan médian. On superpose deux résultats montrant une polarité différente. Les lignes continues sont un ajustement numérique des points expérimentaux tel que $B \sim (Rm - 32)^{0.77}$ (b) Champ mesuré près des disques dans le cas 'contra'(en bleu) et 'anticontra'(en rouge).

Étudions tout d'abord la dépendance azimuthale du champ. De nombreuses mesures successives ont été effectuées systématiquement dans le plan médian du cylindre ou près des disques, parfois pour deux sondes situées à $\pi/2$ l'une de l'autre. Toutes les mesures effectuées à ce jour dans l'expérience ont systématiquement conduit à l'interprétation d'un mode statistiquement axisymétrique, avec une dépendance azimuthale $m = 0$. Cette information est d'un grand intérêt et peut sembler déroutante au premier abord pour plusieurs raisons. Premièrement, nous avons vu en introduction qu'en 1934, Cowling a démontré un théorème anti-dynamo qui stipule qu'un champ magnétique axisymétrique ne peut en aucun cas être entretenu par effet dynamo. Par ailleurs, l'ensemble des simulations numériques effectuées avant l'observation de la dynamo ont toutes prédit une structure clairement non-axisymétrique, avec une dépendance azimuthale du type $B \sim \cos(m\phi)$, avec $m = 1$.

En ce qui concerne la violation apparente du théorème de Cowling, plusieurs réponses peuvent être apportées. On note d'une part que le champ magnétique est

fortement fluctuant, et donc axisymétrique seulement en moyenne. Rien n'empêche alors d'invoquer les fluctuations pour briser l'axisymétrie du champ. Nous verrons durant l'étude numérique du chapitre 4 qu'il existe en fait d'autres moyens plus subtils de contourner le théorème de Cowling, en invoquant la force de Laplace par exemple. D'autre part, le manque de précision des mesures expérimentales ne permet pas d'exclure de dépendance angulaire structurées de plus haut degré. Nous verrons par exemple au chapitre 3 que ce dipole principalement axisymétrique peut s'expliquer si l'on suppose une petite dépendance $m = 8$ dans les champs cinétique et magnétique, ce qui n'est pas pour l'instant mesurable expérimentalement. Dans tous les cas, cette observation d'un champ magnétique principalement axisymétrique, combinée aux prédictions numériques d'un dipole équatorial engendré par l'écoulement moyen, nous amène à une première conclusion claire : il n'est pas possible d'expliquer l'expérience VKS en invoquant uniquement un champ de vitesse dépourvu de fluctuations. Il s'agit là d'une différence fondamentale avec les expériences précédentes de Karlsruhe et Riga, et un défi intéressant du point de vue de la modélisation numérique.

La détermination de la géométrie du champ magnétique dans les autres directions est plus facile. L'utilisation de sondes multiples en particulier, permet d'obtenir beaucoup de points de mesures le long de l'axe. Il apparaît ainsi que le champ magnétique est dominé par un champ fortement azimuthal en périphérie de l'écoulement, tandis qu'il est principalement axial près de l'axe de rotation. Les mesures expérimentales, ainsi qu'une représentation schématique du champ magnétique, sont présentées sur la figure 2.12.

La structure la plus simple compatible avec ces informations est donc un dipole axial, associé à un fort champ toroïdal axisymétrique. On peut remarquer que la partie poloïdale du champ magnétique est finalement assez similaire à celui observé pour la Terre, à la différence qu'aucune composante équatoriale n'est été détectée dans l'expérience VKS. De plus, les mesures faites à l'aide des sondes multiples permettent d'avoir un profil assez précis du champ magnétique le long de la direction radiale (voir figure 2.13). Nous reviendrons plus tard sur ce profil lorsque nous comparerons ces résultats avec l'étude numérique du chapitre 3. Notons dès à présent que ce type de mesures n'exclut pas l'existence en plus du dipole axial d'un mode plus structuré. Nous verrons également que la structure du champ est plus complexe lorsque les disques tournent à des vitesses différentes.

2.3.4 Une dynamo $\alpha - \omega$

Cette observation d'un dipole axial exclut ainsi que la génération du champ magnétique soit exclusivement due au champ de vitesse moyen de l'expérience VKS. Au contraire, il semble impératif d'impliquer les perturbations non-axisymétriques de vitesse. Ceci explique ainsi l'échec des simulations numériques antérieures, qui prenaient uniquement en compte le champ de vitesse axisymétrique. Le mode ma-

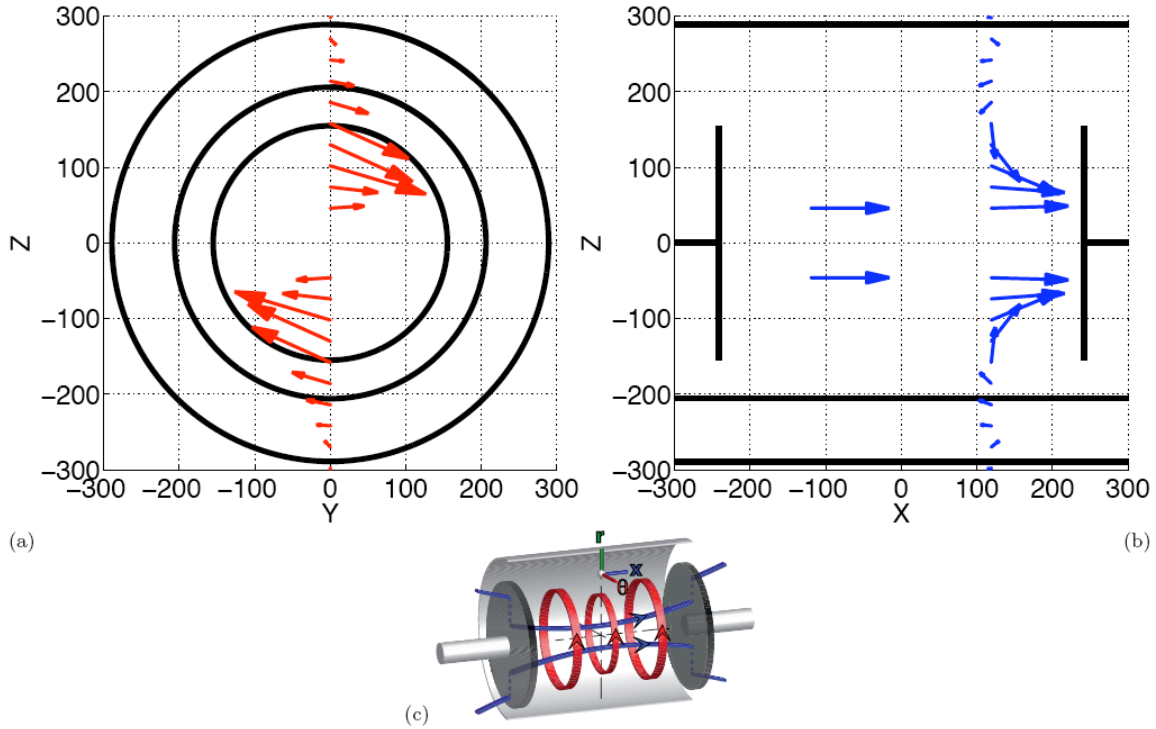


FIG. 2.12: Géométrie du mode dynamo. Les flèches représentent l'amplitude du champ magnétique déduite des mesures aux différents points de sonde. (a) : composante toroïdale du champ. (b) : composante poloidale. (c) : illustration du dipôle axial axisymétrique, structure la plus simple compatible avec les données (a) et (b).

gnétique excité illustre de manière frappante l'aspect turbulent de cette dynamo, dont le mécanisme de génération devient un problème central.

On pourrait craindre que la nature ferromagnétique des disques puisse être à l'origine de la génération du champ magnétique, un peu à la manière de la dynamo de Lowes et Wilkinson. De nombreux arguments vont toutefois à l'encontre de cette interprétation, et l'hydrodynamique semble au contraire l'élément déterminant de la dynamo. On peut voir par exemple sur la figure 2.11-b que les deux sens de contra-rotation, qui impliquent un écoulement légèrement différent à cause de la courbure des pales, engendrent des dynamos à des seuils nettement différents. De plus, une dynamo peut être observé lorsqu'un seul disque est en rotation, ou lorsqu'un seul disque est ferromagnétique. Nous étudierons dans la suite de cette thèse, et notamment au chapitre 3, l'effet des disques ferromagnétiques sur la génération de la dynamo.

Dans un article de 2007 de Pétrélis, Mordant et Fauve [68], il a été proposé qu'un des mécanismes les plus simples pour expliquer ce champ axisymétrique est un processus $\alpha - \omega$. Ce type de mécanisme a déjà été esquissé en introduction. Le lecteur

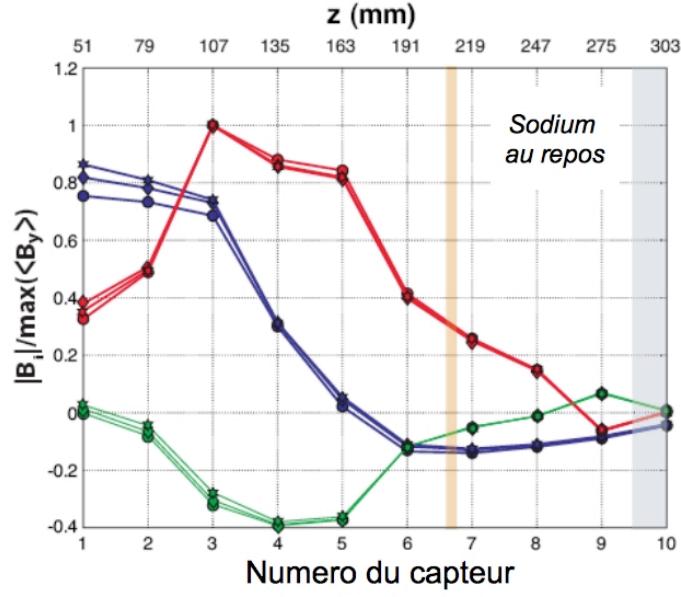


FIG. 2.13: Profils radiaux du champ magnétique. Bleu : champ axial, Vert : champ radial, Rouge : champ azimuthal. les différentes courbes de même couleurs indiquent le champ pour plusieurs Rm .

curieux pourra trouver en annexe C un exemple typique d'une telle dynamo $\alpha - \omega$, à travers une modélisation simple de la dynamo galactique effectuée durant cette thèse. L'effet ω , consistant à créer du champ toroïdal à partir d'un champ poloïdal, est dû ici au fort cisaillement provoqué par la contra-rotation des deux disques. Les simulations numériques effectuées au prochain chapitre suggèrent par ailleurs que l'écoulement de Von Karman moyen possède une hélicité importante, et l'effet α associé peut probablement contribuer à un effet dynamo dès que l'axisymétrie du champ de vitesse est brisée. Une source supplémentaire d'effet α pourrait venir de l'écoulement hélicitaire se produisant près des disques. En effet, la présence des 8 pales courbes sur les disques introduit un net cisaillement entre le fluide situé à proximité des disques et celui confiné entre les pales. Ce cisaillement, combiné à la rotation différentielle du fluide, donne ainsi naissance à de petits tourbillons de vitesse près des disques. Par conséquent, l'expulsion centrifuge du fluide près des disques est fortement hélicitaire, ce qui fournit une importante source d'effet α .

On s'attend de plus à ce que cette perturbation de l'écoulement, qui se déplace avec la rotation des disques, soit dépendante du temps. A cause des 8 pales, il est raisonnable d'introduire une composante $m = 8$ de l'écoulement, localisée relativement près des disques. Cette modulation disparaît donc sous l'effet d'une moyenne temporelle sur quelques temps de rotations, ou si l'on moyenne selon la direction azimuthale. Prendre en compte cette perturbation de vitesse non-axisymétrique est ainsi une manière simple d'expliquer la structure axisymétrique du champ magnétique. Au chapitre 3, nous utiliserons une modélisation numérique de cet écoulement pour montrer dans quelle limite cette hypothèse de dynamo $\alpha - \omega$ est appropriée,

et quel est alors le rôle des disques ferromagnétiques.

2.3.5 Régimes dynamiques

Les résultats qui précèdent concernent le champ magnétique obtenu lorsque les deux disques tournent à des fréquences de rotation similaires. Une des particularités de l'expérience VKS réside toutefois dans la présence de nombreux régimes dynamiques très différents dès que l'on s'éloigne de la contra-rotation exacte, c'est-à-dire quand les fréquences de rotation sont différentes ($F_1 \neq F_2$). Il faut également noter que ces régimes dynamiques n'ont jamais été observés tant que $F_1 = F_2$. L'observation de régimes dynamiques complexes est d'un intérêt majeur pour plusieurs raisons. Nous verrons que certains régimes, comme les renversements chaotiques du champ magnétique, présentent de surprenantes similitudes avec ceux du champ magnétique terrestre [8].

Comme nous l'avons déjà mentionné, cette situation dissymétrique du forçage correspond à une brisure de la symétrie R_π dans l'écoulement moyen. Cet écart à la contra-rotation exacte est parfois paramétré par le coefficient $\theta = (F_1 - F_2)/(F_1 + F_2)$. Un aperçu de la richesse des comportements dynamiques est donné à la figure 2.14, où l'on montre les différents régimes dans l'espace des paramètres.

A première vue, la situation peut sembler compliquée, et difficile à analyser. Il existe de nombreux types de régimes dynamiques, mais également des états stationnaires variés, et les transitions entre ces différentes solutions magnétiques ne paraissent pas vraiment ordonnées. On est ici bien loin des résultats simples obtenus avec la dynamo solide de Lowes et Wilkinson, ou des expériences relativement prédictibles de Riga et Karlsruhe. Une autre particularité étonnante est que l'ensemble des régimes dynamiques apparaissent dans des régions relativement petites de l'espace des paramètres, et pour des écarts de quelques pourcents par rapport à la contra-rotation exacte.

Il serait assez long de répertorier l'ensemble des états observés dans la totalité de l'espace des paramètres. Une fois encore, on se restreint ici à présenter les quelques résultats indispensables à la bonne compréhension des mécanismes sous-jacents de la dynamique du champ. La plupart des résultats rapportés ici peuvent être trouvés en détails dans [55] par exemple, ou encore dans la thèse de Michael Berhanu [7]. La majeure partie de l'espace des paramètres est occupée par différents états stationnaires, qui se distinguent en général par des amplitudes moyennes et des niveaux de fluctuations différents (voir figure 2.15a,d et l). Il existe par ailleurs une certaine robustesse dans la transition vers les régimes dépendants du temps, et la figure 2.14(b) montre un exemple de scénario dans l'espace (Rm, θ) . Cette robustesse peut paraître assez surprenante en raison de l'important niveau de fluctuation du système. Ainsi, pour de petits écarts à $\theta = 0$, les mesures indiquent que le mode magnétique se déforme un peu, mais reste stationnaire. On observe ensuite, à partir de

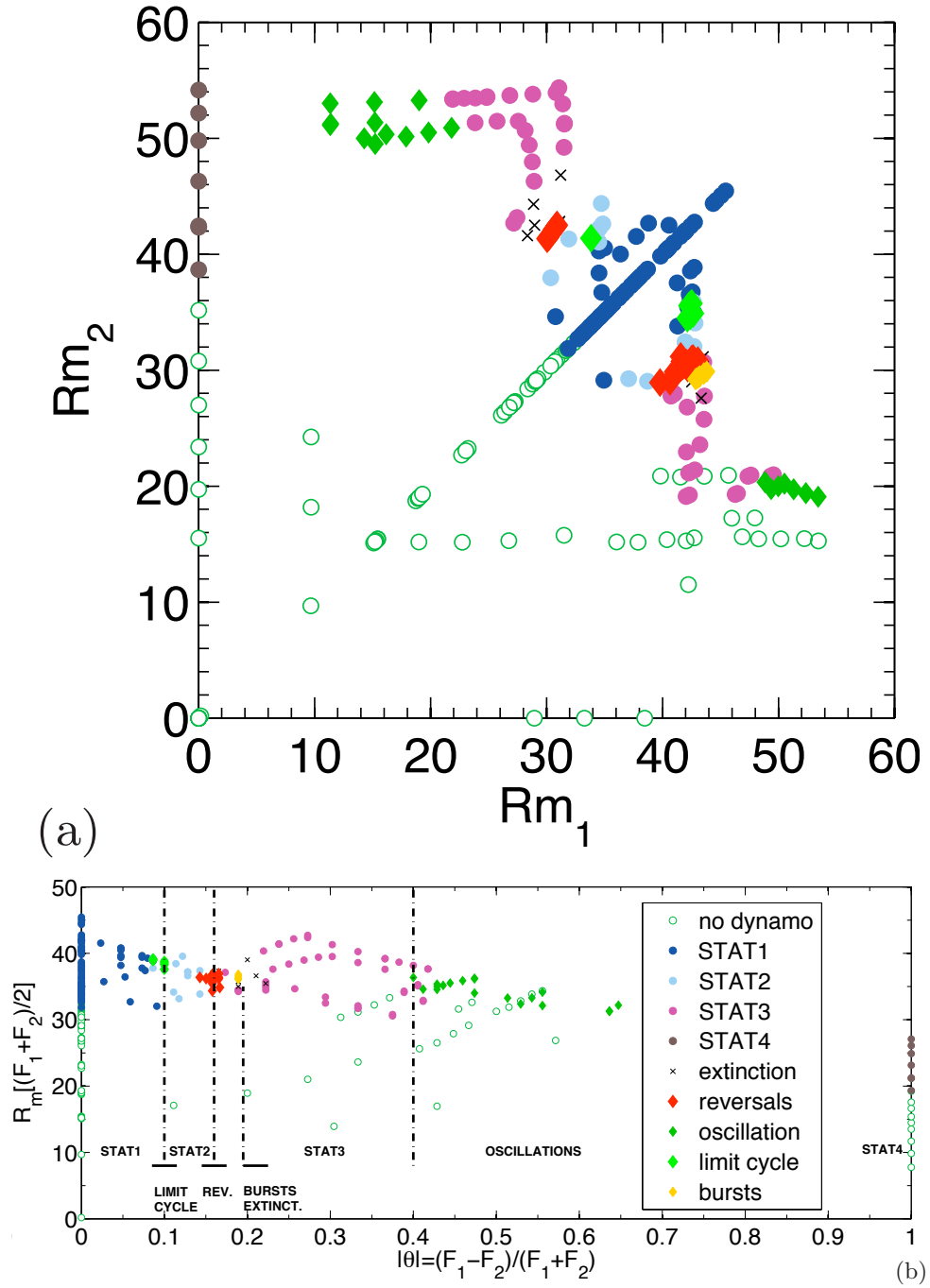


FIG. 2.14: Différents régimes dynamo dans l'espace des paramètres. (a) : dans le plan (F_1, F_2) . (b) : données symétrisées, évolution lorsque la rotation d'un seul disque est modifiée, dans le plan (Rm, θ) . D'après [55].

cet état stationnaire, une transition vers un cycle limite, produisant des oscillations non-linéaires. Sur la figure 2.14(b), la bifurcation vers ce cycle limite se produit par exemple pour $\theta \sim 0.1$. L'évolution au cours du temps du champ magnétique durant ce cycle limite est visible sur la figure 2.15(c). On note que le cycle ralentit nette-

ment près de l'ancienne solution stationnaire. En fait le ralentissement critique près de l'ancienne solution semble dépendre de la distance au point de bifurcation, et diverger en ce point.

Lorsque l'on augmente encore un peu le paramètre θ , l'état est de nouveau stationnaire avant de bifurquer vers un comportement tout à fait remarquable : le système subit des renversements apparemment chaotiques du champ magnétique connectant l'état stationnaire obtenu juste avant cette bifurcation à la solution opposée. Un exemple typique de ce type de régime est illustré par la figure 2.15(g). Il s'agit des premiers renversements chaotiques d'un champ magnétique observés dans une dynamo fluide expérimentale. La ressemblance avec les renversements du champ magnétique terrestre est frappante. On note également que ce régime bifurque toujours à partir d'un état stationnaire. L'étude de ce régime fait l'objet de la section suivante. D'autres régimes peuvent alors être trouvés si l'on continue de briser la symétrie R_π . Par exemple, à proximité des renversements se trouvent des bouffées intermittentes de champ magnétique (figure 2.15(e)) ou d'autres états stationnaires. Pour de plus grands θ , on note également la présence d'oscillations périodiques du champ magnétique, comme à la figure 2.15(k). Ce type de comportement du dipole axial est au contraire plutôt similaire à l'oscillation périodique observée pour le champ magnétique solaire. Ainsi, l'expérience VKS reproduit divers comportements propres aux dynamos naturelles dans une région très restreinte de l'espace des paramètres. Ce résultat laisse espérer un caractère universel des mécanismes à l'oeuvre dans ces différents régimes dynamos. Une étude toute particulière de l'apparition des renversements du champ magnétique dans VKS mérite donc que l'on s'y intéresse en détail.

2.3.6 Renversements

Comme nous l'avons suggéré en introduction, comprendre le mécanisme de renversement du champ magnétique terrestre est un des grands défis de la théorie dynamo. De plus, on a vu que le champ magnétique du soleil par exemple, qui résulte également d'un effet dynamo, présente au contraire un comportement fortement périodique. Le succès de l'expérience VKS fournit un nouvel exemple de dynamo turbulente. Au contraire des objets naturels, il est possible de modifier certains paramètres de ce système, et nous avons vu qu'il est alors possible d'obtenir facilement des renversements chaotiques très similaires à la géodynamo. Dans d'autres circonstances, on observe au contraire un comportement périodique qui rappelle la dynamo solaire. On peut donc espérer qu'il existe un mécanisme commun à ces différents systèmes, généralisant ainsi la compréhension de la dynamique des dynamos turbulentes.

Pour cela, il est indispensable de bien comprendre comment le système bifurque vers les renversements chaotiques dans l'expérience VKS. Tout d'abord, il faut noter que ces renversements se produisent systématiquement à proximité d'un cycle limite,

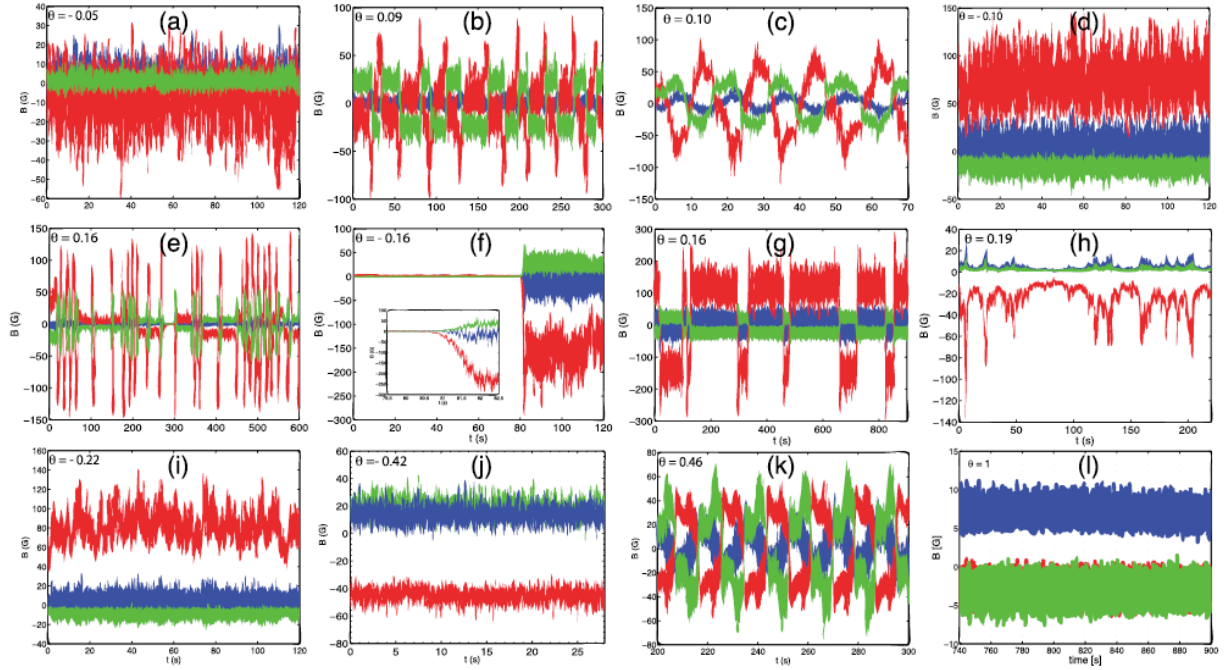


FIG. 2.15: Evolution temporelle des différents régimes dynamos observés dans l'expérience VKS. On notera la richesse des comportements obtenus : solutions stationnaires (a, d, i, j et l), renversements chaotiques (g), bouffées intermittentes (e) et oscillations périodiques (c).

mais toujours à partir d'un état stationnaire. Les bifurcations observées dans l'expérience suggère une dynamique de basse dimension, ne faisait appel qu'à quelques modes en interaction. En suivant cette démarche, un problème crucial semble pourtant surgir : Comment l'expérience VKS peut-elle être comprise en invoquant une dynamique de basse dimensionnalité ? Cela semble en effet contradictoire avec la forte turbulence du fluide ($Re > 10^6$) et le grand nombre de degrés de liberté du fluide associé avec un tel nombre de Reynolds. Toutefois, la forme et l'apparition des renversements semble être extrêmement robuste. Comprendre l'origine de cette simplicité dans la dynamique du champ magnétique sera l'un des objectifs du travail numérique effectué durant cette thèse, en particulier au chapitre 4. Nous verrons que la justification d'une approche de basse dimension réside dans la séparation d'échelle de temps entre les champs magnétique et cinétique, introduite par l'énorme rapport de diffusivités entre ces deux champs.

Comme nous l'avons déjà dit, lorsque l'on s'écarte de la contra-rotation exacte, pour $0 < \theta < 0.09$, le système demeure statistiquement stationnaire. Toutefois, le rapport entre les différentes composantes de champ magnétique change, indiquant une modification de la géométrie du mode. Le changement de topologie est illustré à la figure 2.16. Près de la transition vers le cycle limite (noté (22, 19) sur la figure), on observe que le champ magnétique mesuré dans le plan médian implique une com-

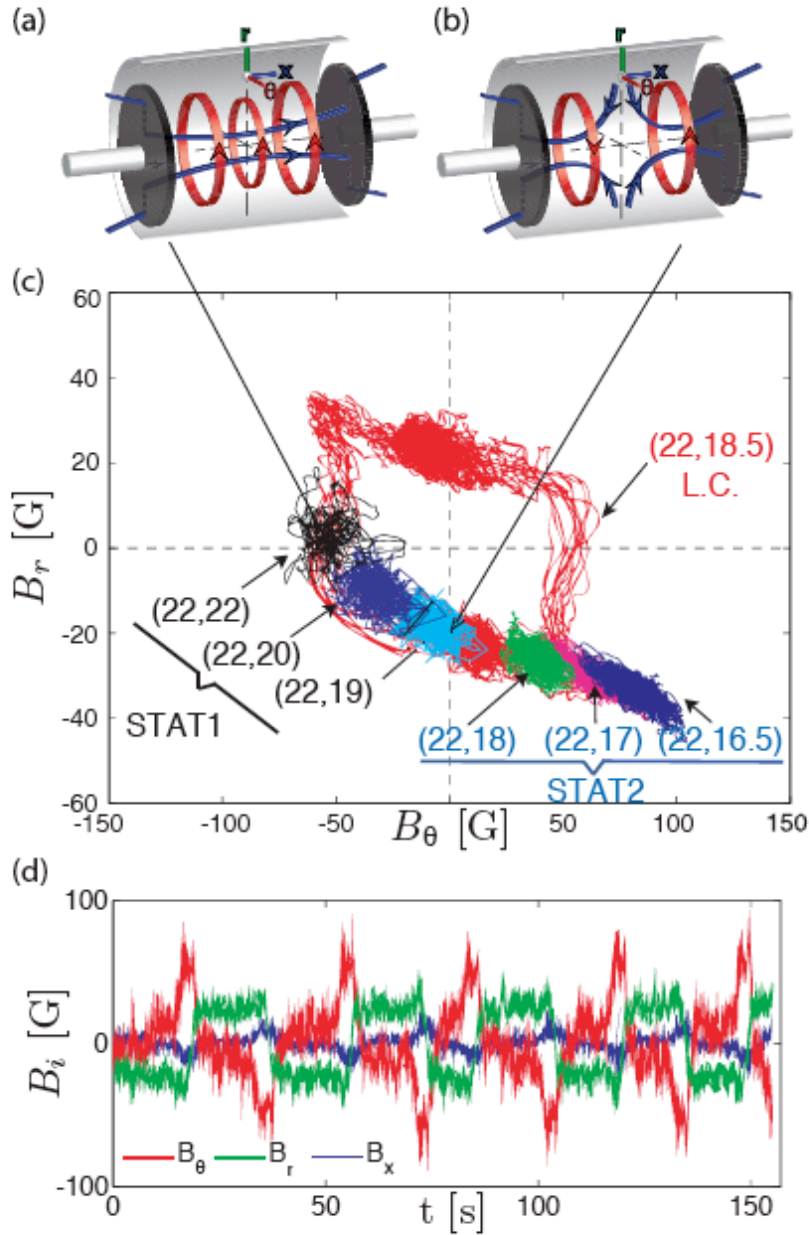


FIG. 2.16: Transition vers un cycle limite du champ magnétique. Le cycle semble impliquer deux modes magnétiques différents ; un dipôle (a) et un quadrupôle (b). L'évolution du champ dans l'espace des phases B_r, B_θ (c) montre que le cycle revisite chacun des points fixes précédents. (d) : Signal temporel du cycle limite.

posante axisymétrique assez forte de champ radial. Au contraire, la partie azimutale semble s'annuler. Il s'agit là de caractéristiques très différentes du cas symétrique (22,22), et peu compatible avec un dipôle axial. La géométrie la plus simple en

accord avec ces informations est un quadrupole axial, illustré schématiquement sur cette même figure. On peut donc considérer qu'il se produit une transition entre un champ purement dipolaire en contra-rotation exacte vers un champ quadrupolaire lorsque l'on augmente θ . La bifurcation du système vers le cycle limite est associée à un comportement remarquable : la trajectoire du cycle passe par l'ensemble des anciens points fixes obtenus avant l'oscillation (voir figure 2.16).

Ce comportement surprenant se retrouve en fait dans un exemple bien connu de physique classique : le pendule simple rigide soumis à un couple. Lorsque l'on soumet le pendule à un couple constant, la solution stable initialement verticale est modifiée et le pendule se stabilise dans une position légèrement inclinée. Respectivement, la solution instable correspondant au pendule pointant vers le haut est modifiée, et se rapproche du point stable. Lorsque le couple devient trop important, on observe que la solution stable et la solution instable du système collisionnent et disparaissent à l'angle $\pi/2$. Rien n'empêche alors la rotation du pendule et on observe un cycle limite qui passe par chacun des anciens points fixes. On note dans ce cas un ralentissement du pendule lorsqu'il approche le point de bifurcation. Cette transition correspond à une bifurcation noeud-col globale, et implique la collision d'une solution stable avec une solution instable. L'analogie est suffisamment forte pour que l'on soit tenté de comprendre la transition vers le cycle limite du champ magnétique comme étant une bifurcation noeud-col impliquant une solution stable, le dipole et une solution instable, le quadrupole. Cette interprétation est renforcée par l'observation que cette transition se produit lorsque l'on brise la symétrie R_π , autorisant alors un couplage linéaire entre dipole et quadrupole.

A ce stade, les éléments apportés aident surtout à comprendre la transition vers le régime périodique du cycle limite. Or, il existe également des renversements chaotiques du champ pour des paramètres très proches, comme le montre la figure 2.17(a). Sur cette figure, on voit que le champ magnétique reste dans une polarité donnée durant de longues périodes (plusieurs dizaines de temps résistifs), avant de subitement se renverser au bout d'un temps qui semble impossible à prévoir. La figure 2.17(b) permet également d'apprécier le caractère reproductible de ces renversements, et la 'forme' bien particulière qu'ils prennent. On voit qu'il se produit toujours une décroissance lente suivie d'une récupération très rapide du champ lors d'un retournement. De plus, juste après un renversement, le champ atteint toujours une valeur plus importante que la valeur moyenne stationnaire qui suit. Ce rebond, ainsi que la disymétrie dans le renversement, sont des caractéristiques également présentes dans les observations géophysiques [85]. Ces particularités, et le fait qu'elles soient systématiques et reproductibles, indiquent une fois de plus la basse dimensionalité de la dynamique du champ magnétique.

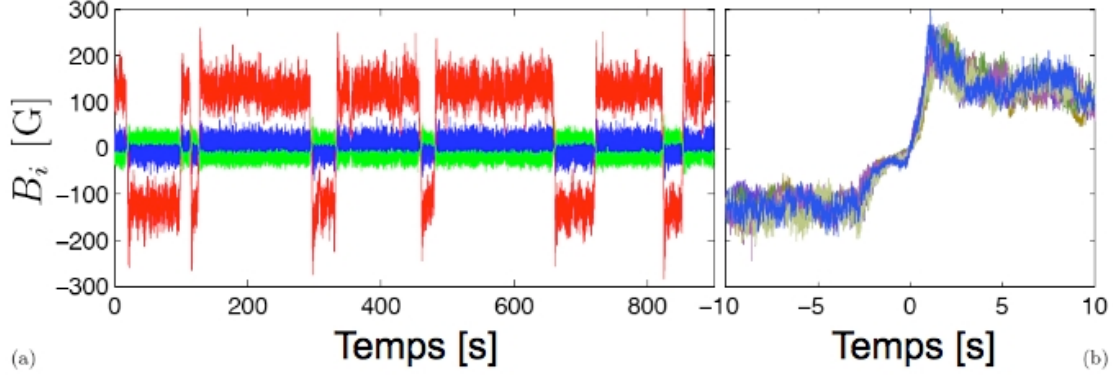


FIG. 2.17: Renversements du champ magnétique lorsque les fréquences de rotation sont $F_1 = 16\text{Hz}$ et $F_2 = 22\text{Hz}$. (a) : Série temporelle des trois composantes du champ magnétique (rouge : partie azimutale, bleu : axiale, verte : radiale). Noter le caractère chaotique des renversements. (b) : superpositions de douze renversements. On notera la robustesse de la forme des renversements.

Un modèle de renversement

Toutes les données expérimentales exposées durant ce chapitre semblent donc indiquer une possible interprétation en terme de dynamique de basse dimension, comme le suggère l'analogie du pendule rigide. Basé sur ces observations, un modèle simple pour les renversements du champ magnétique a donc été proposé récemment par Pétrélis et Fauve [66]. Dans ce modèle, il est primordial de considérer un système proche du seuil d'instabilité dynamo, comme dans l'expérience VKS. Cette proximité avec la criticalité permet de décomposer le champ en fonction de seulement deux modes

$$\vec{B} = D(t)d(\vec{r}) + Q(t)q(\vec{r}) , \quad (2.2)$$

où D et Q représentent respectivement les amplitudes du dipole et du quadrupole. On décide alors d'oublier la structure spatiale de ces modes et d'écrire simplement une équation d'évolution pour les enveloppes temporelles. A ce stade, il est plus commode de définir une amplitude complexe A telle que $A = D + iQ$. Près du seuil de l'instabilité, il est alors pertinent d'écrire l'évolution de cette amplitude en puissance de A et de son complexe conjugué $\bar{A}$. Utilisant la symétrie fondamentale $B \rightarrow -B$ (c'est-à-dire $A \rightarrow -A$), et en se limitant aux termes cubiques, on obtient ainsi

$$\dot{A} = \mu A + \nu \bar{A} + \beta_1 A^3 + \beta_2 A^2 \bar{A} + \beta_3 A \bar{A}^2 + \beta_4 \bar{A}^3 . \quad (2.3)$$

Nous avons déjà insisté sur le caractère fondamental de la symétrie R_π dans ce problème. Il faut remarquer que sous la transformation R_π , dipole et quadrupole

sont transformés de manière différente

$$D \rightarrow -D , \quad (2.4)$$

$$Q \rightarrow +Q , \quad (2.5)$$

$$A \rightarrow -\bar{A} . \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

Ainsi, à cause de cette symétrie, le dipole et le quadrupole ne peuvent être linéairement couplés lorsque cette symétrie est respectée. Dans ce cas, les paramètres de l'équation 2.3 doivent être réels. En supposant dans un premier temps que le module R de A évolue sur un temps typique plus court que la phase, on s'intéresse uniquement à l'équation pour la phase

$$\dot{\phi} = \mu_i - \nu_r \sin(2\phi) + \nu_i \cos(2\phi) . \quad (2.8)$$

On se restreint ici seulement aux termes linéaires du système. Par un changement approprié de l'origine de la phase $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$, on obtient l'équation simplifiée

$$\dot{\phi} = \mu_i + |\nu| \sin(2\phi) . \quad (2.9)$$

On s'intéresse dans ce cas à l'amplitude du dipole définie par $d = R \cos(\phi + \phi_0)$. Les comportements qualitatifs de la dynamique peuvent être capturés par cette version du modèle.

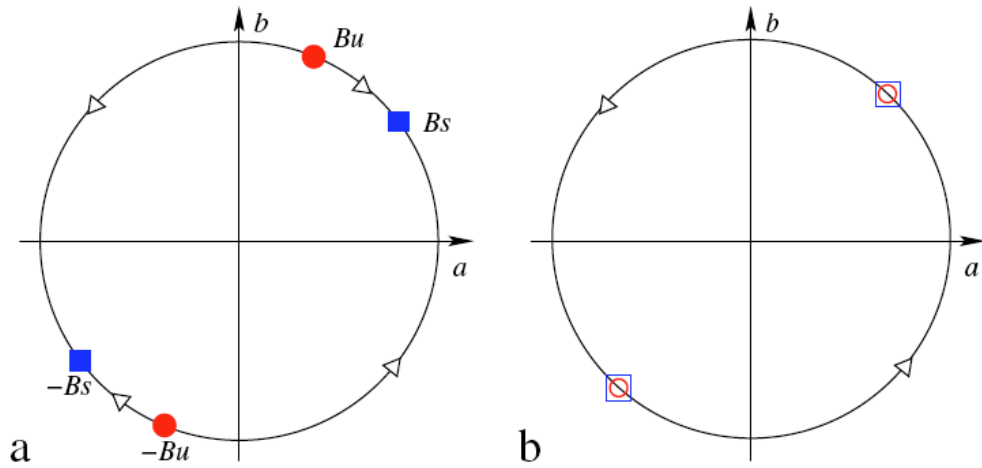


FIG. 2.18: Espace des phases typique d'un système invariant selon la transformation $B \rightarrow -B$ et présentant une bifurcation noeud-col globale. (a) : au-dessous de la bifurcation noeud-col, les solutions stationnaires sont des états mixtes entre dipole et quadrupole. (b) : au-dessus de la bifurcation noeud-col, le système oscille entre les deux modes.

On reconnaît dans 2.9 l'équation qui régit l'évolution d'un pendule soumis à un couple constant. Le facteur 2 dans le sinus vient de l'invariance $B \rightarrow -B$ qui

implique $\phi \rightarrow \phi + \pi$. Les solutions d'une telle équation sont donc une solution stable (purement dipolaire si $\mu_i = 0$) et une solution instable, ainsi que leurs opposées. Les solutions stationnaires de cette équation disparaissent à travers une bifurcation noeud-col lorsque μ_i est non-nul et suffisamment grand, et le système transite vers un régime oscillant. Sur la figure 2.18, on montre l'espace des phases du modèle 2.8. Avant la bifurcation noeud-col, pour $0 < |\mu_i| < |\nu|$, on voit en bleu les deux solutions stables (B_s et $-B_s$) et en rouge les deux solutions instables (B_u et $-B_u$). La solution stable (correspondant à un dipole pur lorsque $\phi = 0$), est un mode mixte, combinaison de dipole et de quadrupole. Au-delà de la bifurcation noeud-col, pour $|\mu_i| > |\nu|$, à droite sur la figure, on observe que la collision des solutions stables et instables conduit à un cycle limite qui connecte les deux anciens états stable B_s et $-B_s$.

Dans l'expérience VKS comme dans le noyau terrestre, l'écoulement du métal liquide est extrêmement turbulent. Dans ce modèle simple, il est donc nécessaire de prendre en compte l'effet des fluctuations hydrodynamiques. On considère donc le modèle suivant

$$\dot{\phi} = \mu_i + |\nu| \sin(2\phi) + \Delta(t) , \quad (2.10)$$

où $\Delta(t)$ est un bruit blanc gaussien, introduit pour modéliser les fluctuations créées par la turbulence hydrodynamique. Il est alors possible de comprendre l'apparition des renversements chaotiques du champ. A proximité du point de bifurcation noeud-col, légèrement en dessous (situation correspondant à la figure 2.18, à gauche), le système fluctue mais se situe en moyenne autour de la solution stable. Les fluctuations peuvent, de temps en temps, pousser le système assez loin de la solution stable B_s pour aller au-delà du point fixe instable B_u . Il y a alors attraction jusqu'au point fixe stable opposé, et le système produit ainsi un renversement du champ magnétique. Une série temporelle de l'amplitude d issue du modèle 2.10 est illustrée sur la figure 2.19, pour $\mu_i = -1.665$, $|\nu| = 1.85$ et $\phi_0 = 0.3$. On peut y voir que ce modèle simple produit des renversements chaotiques du champ magnétique, d'une nature similaire à ceux observés dans l'expérience.

Ce mécanisme simple permet de faire quelques prédictions sur le comportement du champ magnétique durant un renversement. Par exemple, on note qu'un renversement est constitué de deux phases distinctes : Dans un premier temps, les fluctuations amenant le système de la solution stable vers la solution instable luttent contre la partie déterministe de l'équation. En effet, le système se trouve dans un état stable, et cette première phase est donc lente. Au contraire, au-delà du point instable, la partie déterministe pousse le système à se renverser vers le point fixe opposé. Cette phase est donc plus rapide que la précédente. Ce mécanisme produit ainsi une asymétrie entre la phase de décroissance du champ et sa remontée. Cette asymétrie est observée assez nettement dans le cadre du champ magnétique terrestre et durant les renversements de l'expérience VKS. Par ailleurs, le point de transition ne correspondant pas en général à un dipole pur mais à un mode mixte, la valeur du dipole dépasse donc celle du point fixe lors d'un renversement. Ce modèle est ainsi capable d'expliquer le rebond typique observé dans l'expérience VKS. Ce modèle propose donc une explication unifiée de l'ensemble des comportements dynamiques

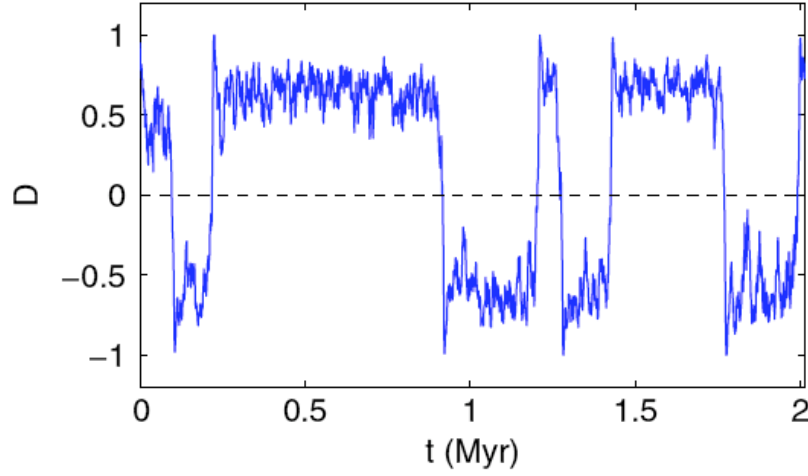


FIG. 2.19: Intégration numérique du modèle 2.10. On montre l'évolution temporelle de l'amplitude D . Le rebond est en particulier bien visible.

observés dans l'expérience VKS. Dans une étude complète impliquant l'ensemble des termes non-linéaires de l'équation 2.3, Pétrélis et Fauve ont par ailleurs montré que l'ensemble des comportements dynamiques de l'expérience peuvent être reproduits par ce modèle. Reposant sur des mécanismes simples et obtenue par des arguments de symétries, l'équation 2.3 est relativement générale. Ce modèle a ainsi été étendu aux renversements observés dans le cas du champ magnétique de la Terre [67]. Des efforts ont également été fait pour comprendre d'autres type de dynamos, comme les oscillations périodiques de la dynamo solaire ou le champ magnétique hémisphérique de Mars [23]. Nous verrons que les simulations numériques effectuées durant la thèse peuvent être directement comparées aux prédictions de ce modèle.

2.4 Conditions aux limites et dynamique du champ

Les nombreux résultats obtenus dans l'expérience VKS et décrits dans la section précédente concernent des campagnes de mesures antérieures à mon appartenance à la collaboration VKS. Il est donc important de souligner qu'il ne s'agit pas des travaux expérimentaux auxquels j'ai directement participé. Cette section présente au contraire les résultats obtenus dans le cadre de ma thèse. J'y décris les résultats obtenus durant la campagne réalisée en juillet 2009. J'ai déjà mentionné que la génération du champ magnétique dans l'expérience VKS n'a été possible qu'en utilisant des disques en fer doux. L'utilisation de disques ferromagnétiques introduit donc une complication dans la compréhension du mécanisme de production du champ dynamo. Au chapitre 3, nous étudierons ce problème à l'aide de simulations numériques afin de mieux comprendre le rôle de ces disques. La campagne dite '*VKS2n*', étudiée dans la première partie de cette section, est l'occasion d'étudier le problème des conditions aux limites magnétiques du point de vue expérimental, avec une configuration où les deux disques ne sont pas constitués du même matériau. Dans une deuxième partie, je présenterai un traitement original des données sur les régimes dynamiques observés lors des campagnes de mesures précédentes dites '*VKS2i*' et '*VKS2j*', plus classiques, avec deux disques en fer doux.

Dans cette campagne, la configuration expérimentale est la suivante : la chemise en cuivre séparant le fluide en mouvement de la couche de sodium au repos a été supprimée. On obtient ainsi un domaine de fluide en mouvement un peu plus grand. Ainsi, l'anneau du plan médian n'est pas présent. Enfin, et c'est la caractéristique la plus intéressante de cette configuration, un seul des deux disques est en fer doux (noté par la suite disque 1), l'autre étant en acier inoxydable (disque 2).

La figure 2.20 montre l'espace des paramètres obtenu durant cette campagne. Sur cette figure, on répertorie l'ensemble des régimes étudiés en fonction des paramètres de contrôle de l'expérience. Le diagramme est gradué en Rm . L'abscisse Rm_1 indique le Rm associé au disque 1 ferromagnétique tandis que l'ordonnée Rm_2 est associée au disque en inox 2. Les valeurs négatives indiquent une rotation du disque dans le sens opposé au sens naturel imposé par la courbure des pales (voir le schéma de la figure 2.21).

La figure 2.20 permet d'apprécier les différents régimes hydrodynamiques explorés dans cette configuration. On peut déjà noter que certains de ces écoulements sont capables d'engendrer des dynamos, malgré l'utilisation d'un seul disque en fer. Toutefois, cette configuration n'est pas capable de produire des régimes dynamiques du champ magnétique, comme des oscillations ou des renversements du champ. Dans une petite région de l'espace des paramètres, on observe néanmoins un régime de bouffées intermittentes du champ magnétique (appelés '*bursts*').

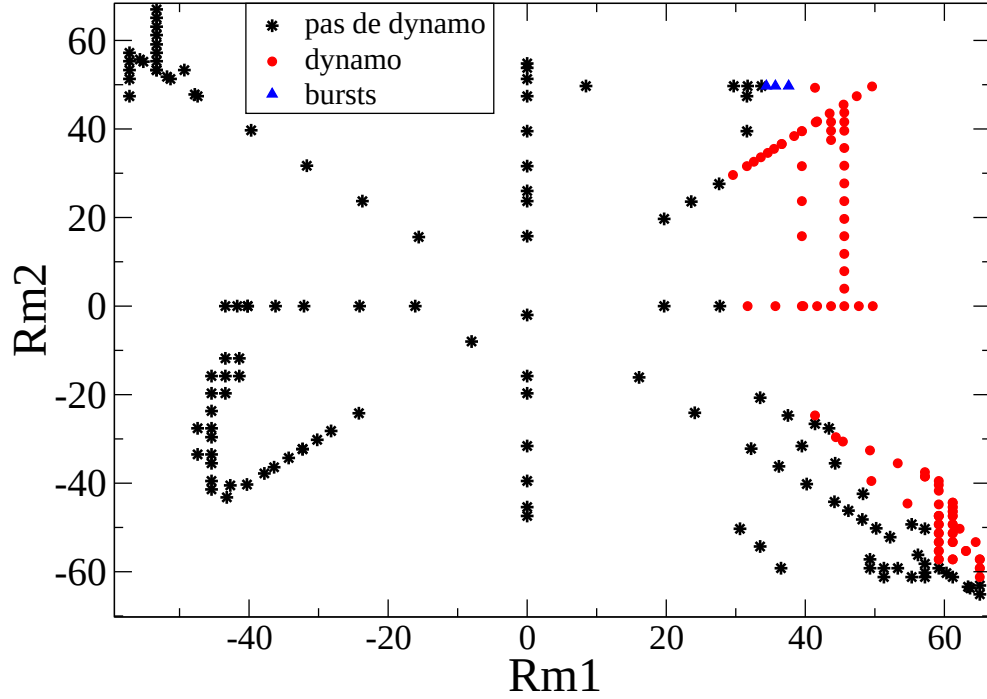


FIG. 2.20: Espace des paramètres pour la campagne 'VKS2n'. Les ronds rouges indiquent une dynamo.

2.4.1 Contra-rotation exacte

Comme pour les configurations précédentes, un champ magnétique stationnaire est engendré en contra-rotation exacte, c'est-à-dire lorsque les deux disques tournent à la même fréquence mais en sens opposés. Le champ est fortement fluctuant, et on montre sur la figure 2.22 la courbe de bifurcation correspondant aux valeurs moyennes du champ magnétique. La bifurcation supercritique du champ magnétique se produit pour un seuil $Rm_c \sim 30$. Aux fréquences de rotations maximales, le champ total sature à une valeur d'environ une centaine de Gauss.

Cette observation d'une dynamo en régime contra-rotatif est importante : cela montre qu'il n'est pas nécessaire que les deux disques soient ferromagnétiques pour engendrer un effet dynamo dans l'expérience VKS, ce qui élimine un éventuel mécanisme d'amplification du champ par induction mutuelle entre les deux disques en fer en rotation.

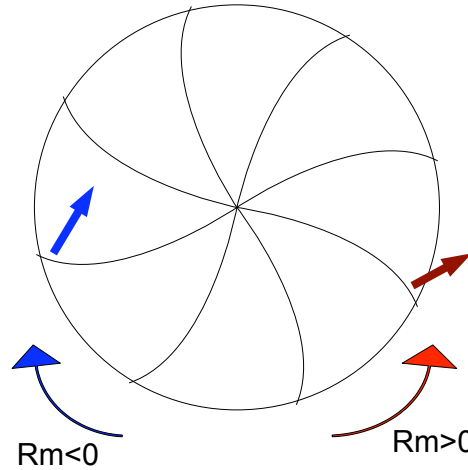


FIG. 2.21: Schéma du disque muni des huit pales dans l'expérience VKS. On indique les deux sens de rotation différents utilisés, associés à des Rm de signes opposés. Selon le sens de rotation, la courbure des pales accroît ou diminue l'éjection radial du fluide entre les pales à la périphérie du disque.

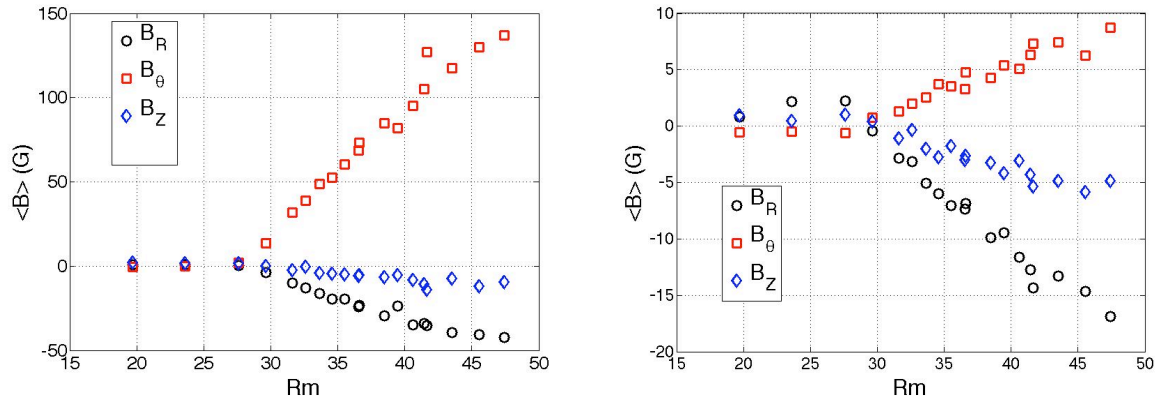


FIG. 2.22: Évolution de la moyenne du champ magnétique en fonction de $Rm = Rm_1 = Rm_2$. A gauche : le point de mesure est situé en $z = -119\text{mm}$, près du disque en fer. A droite : la mesure est réalisée en $z = +119\text{mm}$, près du disque en inox. Dans les deux cas, $r = 96\text{mm}$ et $\theta = 0$.

Géométrie du mode dynamo

Cette campagne se distingue par l'utilisation de plusieurs sondes multiples, permettant de nombreuses mesures du champ magnétique. Il est ainsi possible de bien caractériser la structure spatiale du mode dynamo engendré. Dans ce régime, on dispose de quatre sondes multiples : deux sondes sont placées près de chacun des deux disques (comme indiqué dans la légende de la figure 2.22) et deux autres se situent dans le plan médian de la cuve, faisant un angle de $\pi/2$ entre elles. La comparaison de ces deux dernières permet d'évaluer la dépendance azimutale du champ

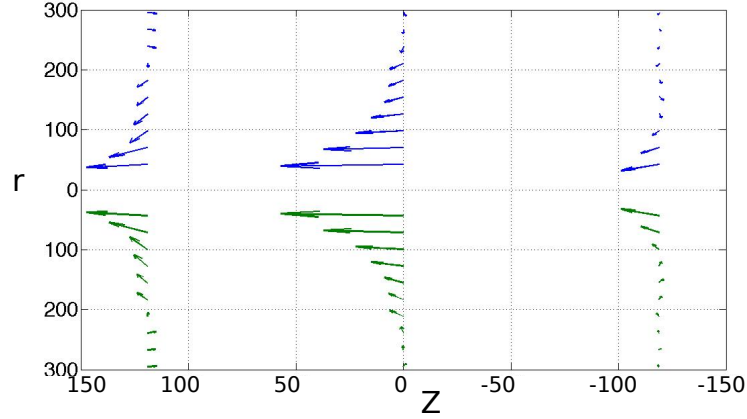


FIG. 2.23: Orientation moyenne du champ magnétique dans le plan (r, z) . Le disque en fer est à gauche. Les deux fréquences de rotation sont égales et $Rm = 50$.

magnétique. Comme pour toutes les dynamos observées dans l'expérience VKS, les données suggèrent en moyenne une axisymétrie du mode dynamo, axisymétrie qui est évidemment brisée aux temps courts par les fluctuations turbulentes. Dans les représentations de la structure spatiale du champ, on symétrise donc systématiquement dans la direction ϕ les données obtenues, puisqu'il n'a pas été possible de mettre en évidence une déviation du champ moyen à l'axisymétrie. La figure 2.23 montre la structure de champ magnétique observé à l'aide des sondes multiples. On voit sur cette figure que le mode dynamo est sans aucun doute dominé par un mode axial. Sur cette figure, le disque en fer se situe sur la gauche.

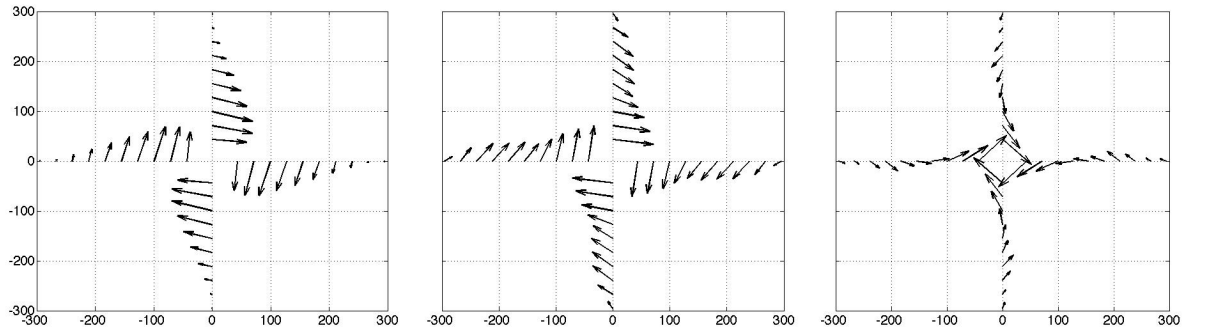


FIG. 2.24: Orientation moyenne du champ magnétique dans le plan (r, θ) et pour $z = 118\text{mm}$, $z = 0\text{mm}$ et $z = -118\text{mm}$ de gauche à droite. Les deux fréquences de rotation sont égales et $Rm = 50$.

Il est également possible de visualiser le mode magnétique dans le plan (r, θ) . La figure 2.24 montre les données obtenues dans le plan médian, ainsi que pour les deux plans près de chacun des disques. Quelque soit la composante, le champ est dissymétrique par rapport au plan $z = 0$, et montre une intensité près du disque en fer systématiquement plus forte que près de l'autre disque, sans que le champ ne

soit complètement localisé près du disque ferromagnétique : par exemple, on voit que le champ axial est plus fort dans le plan médian du cylindre qu'à proximité du disque en fer. Il est également intéressant de noter que le champ axial change de signe près de la paroi extérieure, montrant comment une partie des lignes de champs boucle dans le sodium. A cause de la dissymétrie introduite par la nature différente des deux disques, le mode dynamo observé est clairement axial, mais n'est pas totalement antisymétrique par rapport à la rotation R_π . Dans le plan (r, θ) , on

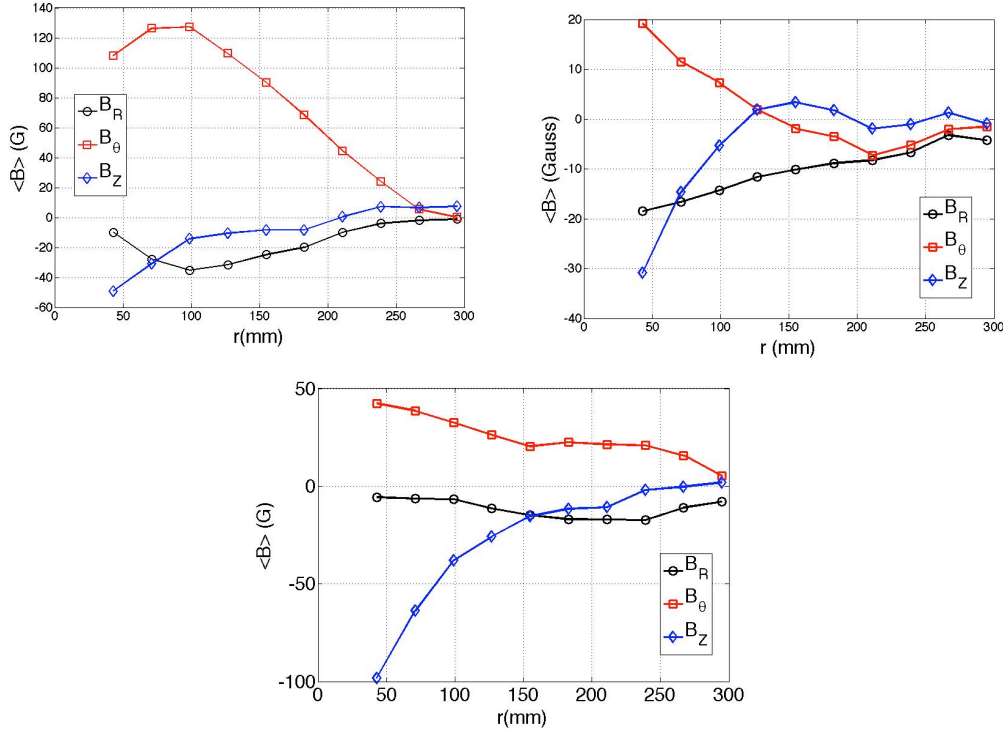


FIG. 2.25: Profils radiaux des trois composantes du champ magnétique obtenus à partir des sondes multiples. En haut, à gauche : sonde située près du disque en fer. En haut, à droite : sonde située près du disque en inox. En bas : sonde située dans le plan médian.

observe que le champ magnétique toroïdal est plus fort près du disque en fer que dans le plan médian. Cela pourrait suggérer que la nature ferromagnétique du disque est très efficace pour renforcer le champ toroïdal, comme suggéré dans le modèle de Mordant, Pétrélis et Fauve [68]. Il est également possible de présenter la structure du champ magnétique à travers les profils radiaux du mode dynamo, comme à la figure 2.25. On voit que la composante θ du champ magnétique reste relativement forte près de l'axe. Cela pourrait correspondre à la présence relativement faible d'une structure non-axisymétrique, comme un dipole équatorial. Une composante $m = 1$ peut également facilement être excitée par la présence des doigts de gants dans le plan médian de l'expérience, indispensable pour la mesure du champ.

On observe que la structure du mode dynamo obtenu varie très peu selon la valeur de Rm . On peut formuler deux conclusions à la suite de ces premiers résultats.

Premièrement, on voit que la génération du champ magnétique ne nécessite pas la rotation de deux disques ferromagnétiques (contrairement par exemple à l'expérience de Lowes et Wilkinson). Il est donc indispensable d'impliquer l'écoulement dans le mécanisme de génération du champ. La localisation du champ magnétique près du disque en fer suggère néanmoins un rôle d'amplification du champ, particulièrement pour la composante toroïdale. En comparant les profils dans le plan (r, z) près de chacun des deux disques, on peut également observer que les lignes de champs ont tendance à focaliser vers le disque en fer (de rayon 155mm). Cette hypothèse d'une modification locale de la topologie des lignes de champs fera l'objet d'une partie du prochain chapitre, dans le cadre de l'approche numérique.

2.4.2 Contra-rotation non-exacte

Nous avons montré à la section précédente que dans l'expérience VKS, tous les régimes dynamiques sont obtenus lorsqu'il existe un décalage entre les deux fréquences de rotation des disques. Il est également possible d'observer une dynamo lorsqu'un seul disque est en rotation. Le diagramme de la figure 2.20 montre que dans la configuration actuelle, il n'a pas été possible d'obtenir une dynamo lorsque seul le disque en inox tourne. En revanche, on observe la génération d'un champ magnétique faible lorsque le disque en inox est à l'arrêt et que seul le disque en fer est en rotation.

Dynamo a 1 disque : courbe de bifurcation

La génération d'un champ magnétique lorsqu'un seul disque est en rotation rentre également dans le cadre d'une interprétation en terme de dynamo $\alpha - \omega$. Dans ce cas, l'effet α est localisé près du disque en rotation, et un cisaillement est toujours présent dans l'écoulement, bien que moins important et moins localisé que dans le cas contra-rotatif. La figure 2.26 montre la courbe de bifurcation du champ magnétique en fonction de Rm_1 , lorsque $Rm_2 = 0$. La dynamo engendrée présente un seuil qui n'est pas beaucoup plus grand que dans le cas contra-rotatif, avec un nombre de Reynolds magnétique critique $Rm_c \sim 35$. La valeur atteinte du champ magnétique est néanmoins plus petite, avec une valeur maximale d'environ $30G$.

Géométrie du mode dynamo

Lorsqu'un seul disque est en rotation, on s'attend a priori à ce que la structure du mode magnétique soit différente de celle observée en contra-rotation exacte. La figure 2.27 montre la structure du mode magnétique. On voit que le champ magnétique reste dominé par un champ axial, associé à un fort champ toroïdal. Le champ présente une structure assez surprenante dans le plan (r, z) . On observe très

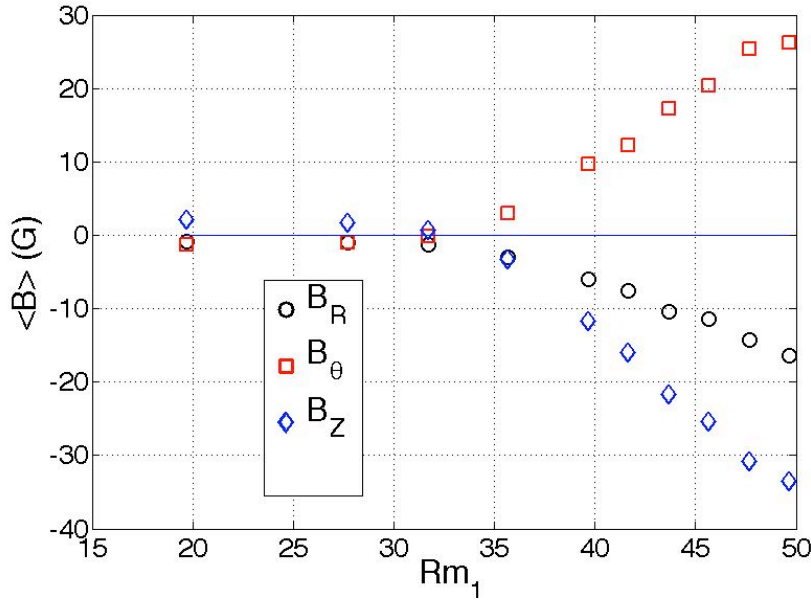


FIG. 2.26: Courbe de bifurcation lorsque le disque en inox est à l'arrêt. On montre la valeur moyenne des trois composantes pour une sonde située près du disque en rotation.

peu de champ dans la direction axiale près du disque en fer. Cette observation est très différente de la focalisation des lignes de champs vers le disque ferromagnétique observé en contra-rotation. Cet effet pourrait être dû aux pales se trouvant sur le disque. En effet, celles-ci sont également ferromagnétique, et peuvent donc dévier les lignes de champ différemment qu'avec un simple disque plat. Cette possibilité est d'ailleurs envisagée au chapitre 3 dans une approche idéalisée de ce phénomène. Dans tous les cas, la présence d'un disque ferromagnétique semble imposer de fortes contraintes topologiques sur les lignes de champ magnétique.

A partir de cette dynamo à 1 disque, il est possible d'augmenter progressivement la fréquence de rotation du disque en inox afin de ramener le système vers la contra-rotation exacte. La courbe 2.29 montre l'évolution de $\sqrt{\langle B^2 \rangle}$ en fonction de Rm_2 . La rotation du disque 1 est maintenue constante de sorte que $Rm_1 = 45$. La rotation du disque en inox provoque d'abord une diminution de la valeur saturée de l'énergie magnétique. Il semble donc que la mise en rotation du deuxième disque perturbe l'écoulement de manière défavorable pour ce mode dynamo. On note que pendant cette phase, la structure du mode reste la même. A partir de $Rm_2 \sim 35$, le champ augmente brutalement vers des valeurs bien plus fortes et sature finalement aux mêmes valeurs que celles observées en contra-rotation exacte. Il est intéressant de noter que ce saut brusque s'accompagne d'un changement de topologie du mode dynamo, où l'on retrouve la structure observée en contra-rotation.

Ces résultats montrent qu'il est possible d'engendrer une dynamo lorsqu'un seul disque tourne, mais uniquement s'il s'agit du disque en fer. Il semblerait donc que la

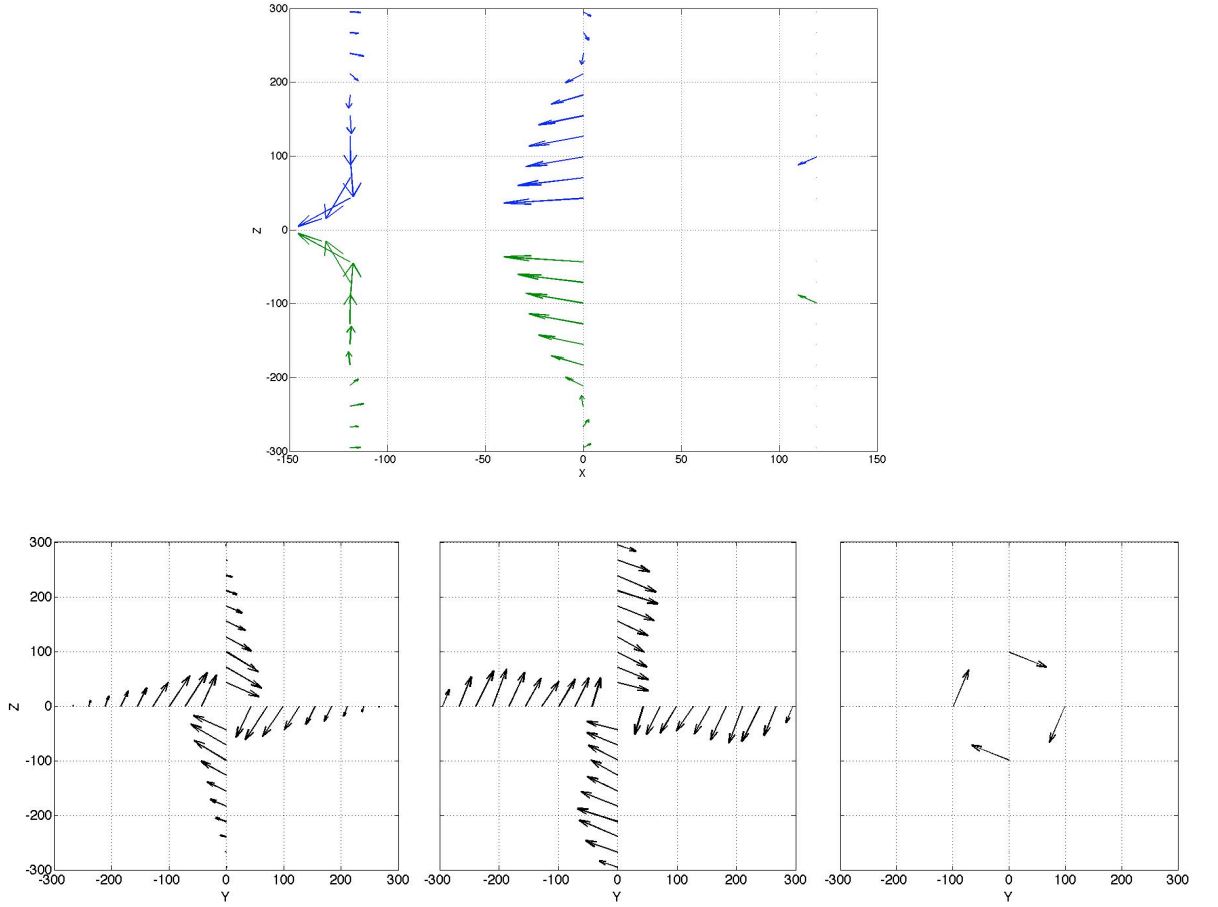


FIG. 2.27: Structure géométrique du champ magnétique lorsque le disque en inox est à l'arrêt. En haut : profil du champ dans le plan (r, z) pour deux sondes situées près du disque en rotation et dans le plan médian. En bas : Orientation moyenne du champ magnétique dans le plan (r, θ) et pour $z = 118\text{mm}$, $z = 0\text{mm}$ et $z = -118\text{mm}$ de gauche à droite.

rotation d'un matériau ferromagnétique soit nécessaire à la génération de la dynamo dans l'expérience VKS aux valeurs de Rm atteintes. Cette affirmation peut toutefois être relativisée par l'argument suivant : en se plaçant dans un référentiel en rotation, il est toujours possible de se ramener dans le référentiel du disque en fer, qui apparaît fixe. C'est le disque en inox qui se trouve alors en rotation, mais l'écoulement y est différent : la cuve est en rotation, ce qui introduit une rotation globale du fluide. De plus, la circulation poloidale est inversée, car le fluide est éjecté près de l'axe par le disque en rotation au lieu d'y être pompé. Bien qu'il ne soit pas possible de réaliser cette configuration expérimentalement, cela montre que la rotation du disque ferromagnétique n'est pas un élément indispensable, mais un ingrédient efficace pour amplifier le mécanisme de génération de l'instabilité dynamo.

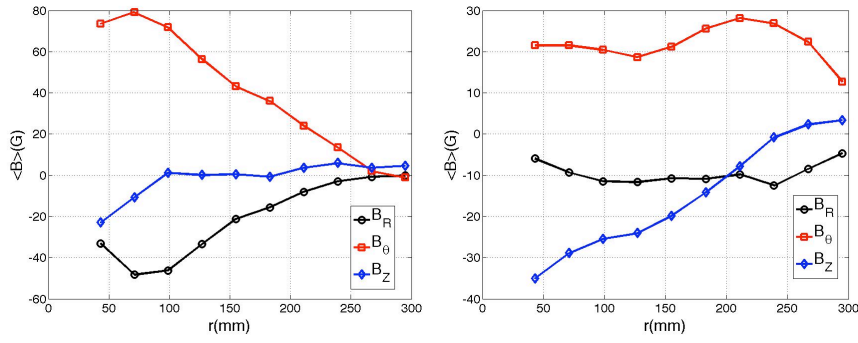


FIG. 2.28: Profils radiaux des trois composantes du champ magnétique obtenues à partir des sondes multiples. A gauche : sonde située près du disque en fer. A droite : sonde située dans le plan médian. La valeur du Gaussmètre, situé près du disque en inox et pour $r \approx 70\text{mm}$, indique $\langle B_R \rangle = -10\text{G}$, $\langle B_\theta \rangle = 23\text{G}$ et $\langle B_Z \rangle = -8\text{G}$

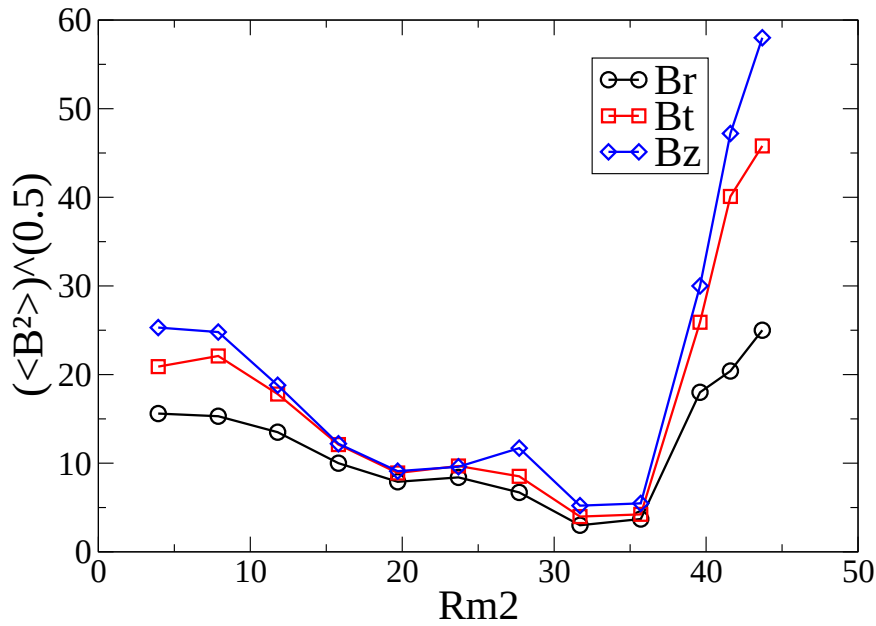


FIG. 2.29: Courbe de bifurcation du champ magnétique en fonction de Rm_2 , pour une rotation fixée du disque 1 telle que $Rm_1 = 45$. Sonde située dans le plan médian.

2.4.3 Co-rotation

Sur la figure 2.20, l'absence de dynamo pour les Rm négatifs illustre clairement l'asymétrie existant entre les deux sens de rotations pour les disques. Ceci met en avant l'importance du forçage hydrodynamique. Comme le montre la figure 2.21, il est possible de relier la courbure des pales à l'intensité de la vitesse éjectée radialement. Lorsque $Rm > 0$, la courbure augmente l'éjection du fluide, favorisant ainsi l'effet α dû à l'hélicité de l'écoulement près des pales. Au contraire, la rotation pour les Rm négatifs produit une éjection radiale plus faible, diminuant l'hélicité. La liberté quant au sens de rotation des disques offre donc un espace des paramètres plus grand. En particulier, il est possible de mettre en rotation les deux disques dans le même sens. Une telle configuration, que l'on nomme co-rotation, présente l'intérêt de produire un écoulement symétrique par rapport au plan $z = 0$, donc plus proche des symétries attendus pour l'écoulement au sein du noyau terrestre. A cause de la courbure des pales, on s'attend de plus à ce que la génération de champ soit légèrement différente pour chaque disque. La figure 2.30 est une illustration schématique de l'écoulement produit dans le régime co-rotatif. Lorsque les

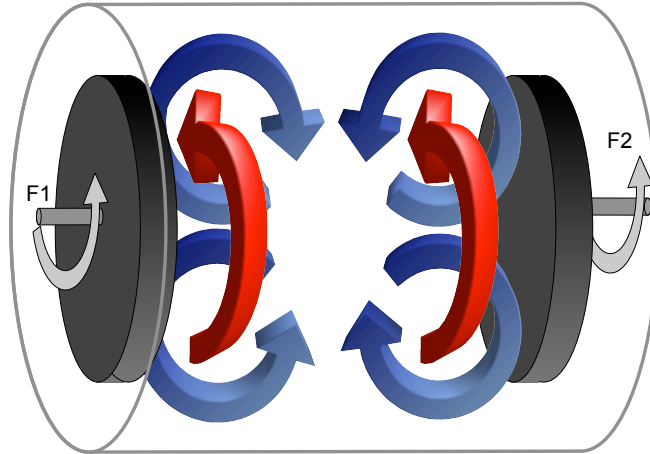


FIG. 2.30: Schéma de l'écoulement produit par un forçage co-rotatif dans l'expérience VKS.

deux disques tournent exactement à la même fréquence et en co-rotation, l'écoulement n'engendre jamais de champ magnétique. Cette observation amène quelques commentaires sur l'interprétation en terme de dynamo $\alpha - \omega$. En effet, on voit sur la figure 2.30 que la co-rotation est associée à une rotation différentielle a priori nulle, c'est-à-dire sans effet ω dans le champ de vitesse moyen. Au contraire, les tourbillons créés par les pales sont toujours présents, et la co-rotation engendre deux zones près de chaque disques avec des effets α de signes opposés. En co-rotation comme en contra-rotation, il existe toutefois un cisaillement dans la direction radiale, et il serait donc possible d'imaginer un processus de génération du champ magnétique impliquant ce cisaillement. On pourrait également considérer la vorti-

citée dans différentes directions afin de décrire un processus de type α^2 . Malgré cela, une dynamo est engendrée uniquement lorsque les disques tournent à des fréquences différentes. Il semble donc que le cisaillement dans la direction z joue un rôle important dans le mécanisme dynamo. La figure 2.31 indique l'évolution de la valeur moyenne du champ magnétique en fonction de la différence de fréquence entre les deux disques. Pour cette figure la rotation du disque en fer est fixée à $F_1 = 30\text{Hz}$, soit $Rm_1 = 60.3$. A partir d'un état nul, le champ magnétique croît en fonction de

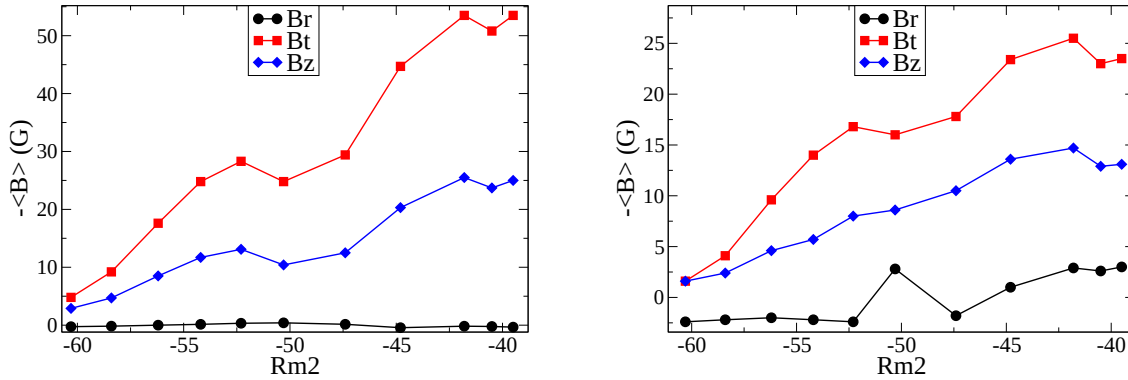


FIG. 2.31: Courbes de bifurcation du champ magnétique moyen à partir de l'état co-rotatif $Rm_1 = -Rm_2 = 60.3$ en diminuant la rotation du disques 2, mesuré près du disque 1 (à gauche) et du disque 2 (à droite).

l'écart à la co-rotation exacte, contrôlé par la valeur Rm_2 . Les valeurs obtenues sont plus grandes que celles atteintes lorsque seul le disque 1 est en rotation. Dans ce régime de co-rotation décalée, notons que l'on peut toujours décomposer approximativement l'écoulement comme la somme d'une vitesse produite par la co-rotation des deux disques avec une petite composante d'un écoulement à un disque.

Géométrie du mode dynamo

La figure 2.32 montre la géométrie dans le plan (r, z) du mode magnétique obtenu dans ces régimes. La structure ne change quasiment pas sur l'intervalle de Rm_2 exploré dans la figure 2.31. On observe une géométrie présentant certaines similarités avec le mode obtenu pour la dynamo à 1 disque. En particulier, le champ axial reste très faible près du disque 1. Il est en revanche assez surprenant de noter que le dipole axial observé reste associé à un champ toroïdal qui ne change pas de signe au passage du plan équatorial (voir figure 2.33). En effet, les symétries de l'écoulement en co-rotation sont fondamentalement différentes de l'écoulement classique en contra-rotation. En particulier, on s'attend ici à ce que l'effet ω engendre du champ toroïdal de sens opposé près de chacun des deux disques. Dans le cas du champ magnétique terrestre, il est généralement admis que le champ magnétique toroïdal à l'intérieur du

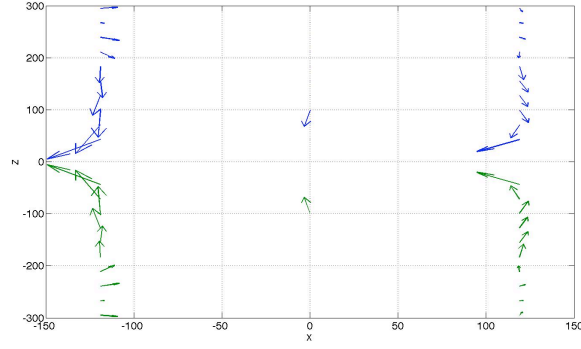


FIG. 2.32: Géométrie dans le plan (r, z) du champ magnétique engendré en co-rotation légèrement décalée.

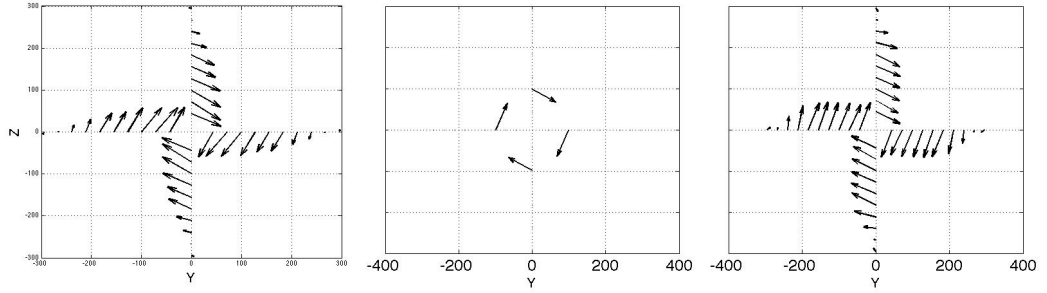


FIG. 2.33: Géométrie dans le plan (r, θ) du champ magnétique engendré en co-rotation légèrement décalée. De gauche à droite : mesures réalisées pour $z = 118mm$, $z = 0mm$ et $z = -118mm$.

noyau change de signe au niveau de l'équateur étant donné les symétries attendues de l'écoulement. Toutefois, on peut remarquer qu'aucune dynamo n'est observée en co-rotation exacte, et la brisure de symétrie équatoriale introduite par les natures différentes des deux disques peut également compliquer le raisonnement. La figure 2.34 montre les profils du champ magnétique près de chacun des disques en fonction de la distance à l'axe. Les valeurs sont comparables de chaque côté, ce qui peut s'interpréter comme un champ dominé par un champ antisymétrique par rapport à l'équateur (famille du dipole).

2.4.4 Décomposition dipole-quadrupole

L'utilisation d'un seul disque en fer doux dans cette configuration introduit une forte asymétrie dans le problème. En particulier, la structure géométrique du mode dynamo est plus compliquée que dans les configurations précédentes. En raison de cette brisure de la symétrie R_π , et à la lumière du modèle présenté brièvement à la section précédente, il est tentant de décomposer le champ magnétique mesuré

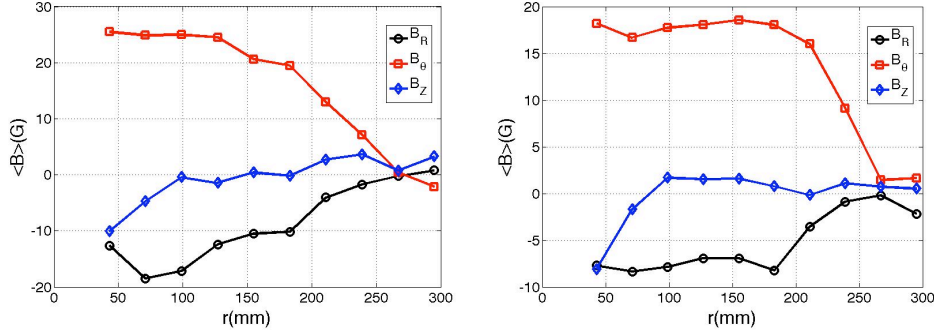


FIG. 2.34: Profils en fonction de r du mode dynamo mesuré par les sondes multiples. A gauche : près du disque en fer. A droite : près du disque en inox. La valeur du Gaussmètre, situé au centre, indique $\langle B_R \rangle = -10$, $\langle B_\theta \rangle = 22$, $\langle B_Z \rangle = 2$.

selon la base dipole/quadrupole. Tout champ magnétique peut évidemment être décomposé selon une base symétrique/anti-symétrique. En supposant que chacune de ces deux familles est respectivement dominé par un dipole D et un quadrupole Q , il est possible d'écrire le champ magnétique en tout point de l'espace comme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

Cette campagne de mesure se prête bien à une telle description puisque l'on dispose de nombreux capteurs de champ magnétique. On considère les deux sondes situées près de chacun des deux disques, en $z_1 = -118\text{mm}$ et $z_2 = +118\text{mm}$. Puisque ces deux positions sont exactement symétriques par rapport au plan médian (R_π -symétriques), on peut utiliser des arguments simples de symétrie pour extraire les composantes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{Q}$, ce qui donne en coordonnées cylindriques

$$D_r(r, z_1) = \frac{B_r(r, z_1) - B_r(r, z_2)}{2}, \quad Q_r(r, z_1) = \frac{B_r(r, z_1) + B_r(r, z_2)}{2} \quad (2.12)$$

$$D_\theta(r, z_1) = \frac{B_\theta(r, z_1) + B_\theta(r, z_2)}{2}, \quad Q_\theta(r, z_1) = \frac{B_\theta(r, z_1) - B_\theta(r, z_2)}{2} \quad (2.13)$$

$$D_z(r, z_1) = \frac{B_z(r, z_1) + B_z(r, z_2)}{2}, \quad Q_z(r, z_1) = \frac{B_z(r, z_1) - B_z(r, z_2)}{2}. \quad (2.14)$$

Les symétries des modes nous permettent d'obtenir les champs en $z = z_2$. De la même manière, il est possible d'extraire les modes dans le plan médian, en supposant que $D_r = 0$, $Q_\theta = 0$ et $Q_z = 0$.

La figure 2.35 montre la décomposition du champ obtenu en contra-rotation exacte, déjà illustré sur la figure 2.23. Sur la figure 2.35, on montre à gauche la partie dipolaire du champ tandis que la partie quadrupolaire est montrée à droite. La différence de nature des deux disques provoque une brisure de la symétrie R_π , ce qui explique la présence d'une composante quadrupolaire non-négligeable. Cette décomposition permet de raisonner sur des structures magnétiques plus simples que

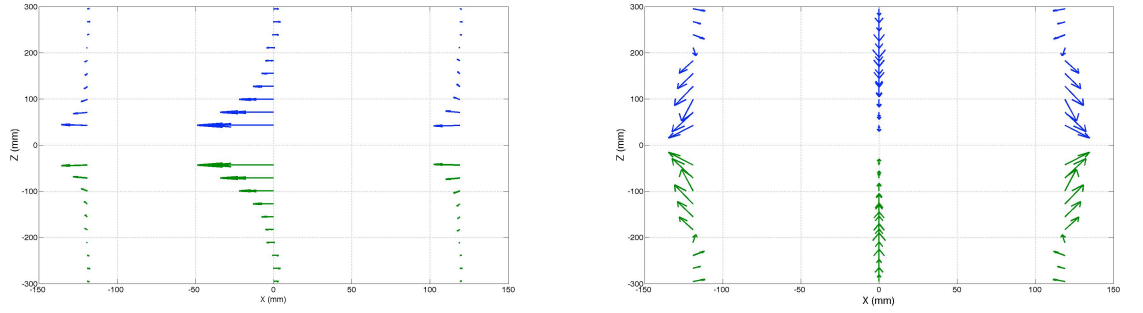


FIG. 2.35: A gauche : partie dipolaire du champ magnétique en contra-rotation exacte. A droite : partie quadrupolaire.

le champ magnétique original. On peut noter que D_z semble plus important dans le plan médian que près des disques.

Outre la structure spatiale de ces deux modes, il est intéressant d'étudier l'intensité relative des deux modes en fonction des différents paramètres du système. La figure 2.36 montre l'évolution des proportions relatives de dipole et quadrupole durant la bifurcation dynamo lorsque les deux disques tournent en sens opposés à même fréquence. On montre ici l'évolution des composantes selon θ . Le seuil se situe

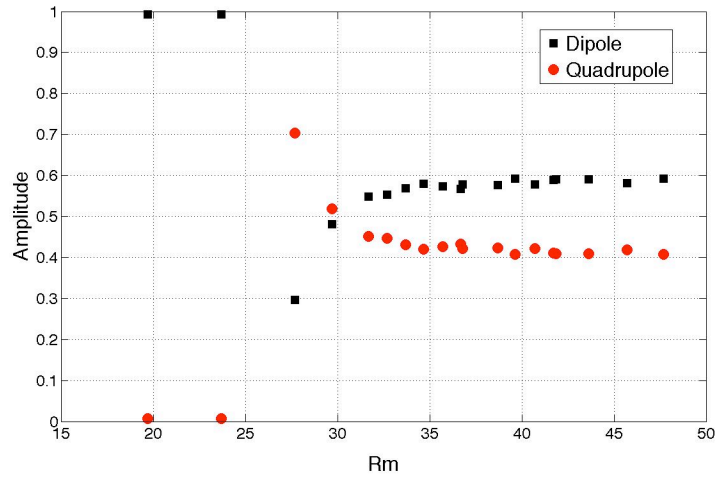


FIG. 2.36: Évolution, en contra-rotation exacte, des parties dipolaires et quadrupolaires du champ reconstruites à partir de $\langle B_\theta \rangle$, en fonction de Rm .

environ à $Rm_c = 30$. Au-dessus de Rm_c , la proportion reste constante, indiquant que le mode magnétique se modifie très peu avec l'écart au seuil. Celui-ci est légèrement dominé par la structure dipolaire. Au-dessous du seuil, le champ est très incohérent, et il est difficile de justifier notre décomposition. Toutefois, on peut noter un changement assez net sur la figure 2.36 pour $Rm \approx 27$, qui pourrait être interprété comme une indication de la proximité du seuil de la dynamo.

Sur la figure 2.26, nous avons vu que le passage d'une dynamo à 1 disque à une dynamo en contra-rotation exacte semble s'effectuer de manière brutale, et s'accompagne d'une forte augmentation de l'énergie magnétique. La figure 2.37 montre l'évolution des composantes dipolaire et quadrupolaire durant cette transition. La rotation du disque 1 est fixée de sorte que $Rm_1 = 45.6$, et on augmente progressivement la rotation du disque 2, allant de $Rm_2 = 19$ jusqu'à $Rm_2 = 50$. Durant la

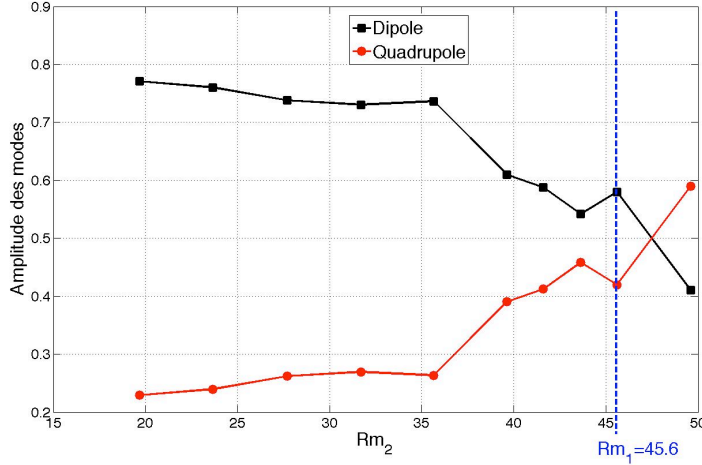


FIG. 2.37: Évolution des parties dipolaires et quadrupolaires et du champ reconstruites à partir de $\langle B_\theta \rangle$, en fonction de Rm_2 . La rotation du disque 1 est fixée à une valeur constante telle que $Rm_1 = 47.6$.

première phase, pour $19 < Rm_2 < 36$, la structure ne se modifie pas et le champ semble fortement dominé par un dipole. À partir de $Rm = 39$, on voit que la transition dans l'énergie magnétique est associée à une modification claire des composantes dipolaire et quadrupolaire, dont les valeurs deviennent plus proches. Plus surprenant, pour $Rm_2 > Rm_1$, on observe à partir de la composante θ que le champ magnétique est dominé par un quadrupole.

2.4.5 Dynamique de basse dimension dans l'expérience VKS

Dans cette section, on s'intéresse à la dynamique du champ observé lors des campagnes précédentes plus classiques, où les deux disques sont constitués de fer doux. Nous avons vu qu'il a été proposé une explication des régimes dynamiques, impliquant une compétition entre un dipole et un quadrupole. Il est possible d'analyser les résultats des campagnes de mesures précédentes (campagnes dites *VKS2i* et *VKS2j*) afin d'extraire le comportement temporel des modes dipolaire et quadrupolaire. Pour ces deux campagnes, il existe trois zones distinctes dans lesquelles apparaissent des renversements ou des oscillations périodiques. En régime très décalé (pour $F_1/F_2 = 0.29$), dans une zone proche de la contra-rotation exacte ($F_1/F_2 = 0.75$) et pour une valeur intermédiaire ($F_1/F_2 = 0.6$).

VKS2j : régime périodique pour 15Hz, 25Hz

La campagne *VKS2j* utilise une configuration identique à *VKS2n* décrite précédemment, mais les deux disques sont en fer doux, et la couche de sodium au repos est présente. Afin d'écrire la décomposition en dipole/quadrupole, on dispose d'un Gaussmètre près du disque 1 et d'une sonde multiple près du disque 2. Il existe ainsi deux capteurs situés tous deux approximativement pour des r et θ identiques, mais pour des positions axiales opposées, c'est-à-dire $z_1 = -z_2 = 118\text{mm}$. Notons qu'il n'existe pas de point de mesure sur la sonde multiple exactement situé à la même position radiale que le Gaussmètre. Il apparaît néanmoins que les résultats ne sont pas qualitativement affecté par le choix du capteur de la sonde, tant que celui-ci a une position radiale raisonnablement proche de celle du Gaussmètre. Il existe plusieurs méthodes pour extraire les modes dipolaire et quadrupolaire du champ magnétique. Dans cette partie, on s'intéresse plus à l'évolution de l'amplitude des modes qu'à leurs structures spatiales. Il peut donc être utile d'obtenir une observable indépendante de la composante spatiale. Comme pour l'obtention du modèle d'équation d'amplitude, on fait l'hypothèse d'une séparation des dépendances spatiale et temporelle, de sorte que l'on peut écrire

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = D^*(t)\mathbf{d}(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = Q^*(t)\mathbf{q}(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

En supposant que la structure spatiale des modes n'est pas modifiée et que seule l'enveloppe temporelle évolue, il est possible de réaliser une projection sur le champ initial. On calcule donc :

$$D(t) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t_0)}{|\mathbf{D}(\mathbf{r}, t_0)|^2}, \quad Q(t) = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t_0)}{|\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t_0)|^2} \quad (2.17)$$

où $D(t) = D^*(t)/|D^*(t_0)|$ et $Q(t) = Q^*(t)/|Q^*(t_0)|$. Dans le régime (15Hz/25Hz), correspondant au cas 'moyennement décalé', le champ subit des renversements périodiques de sa polarité. La figure 2.38 montre l'évolution du champ magnétique durant le cycle. Les données ont été systématiquement lissées par moyenne temporelle glissante afin d'atténuer les fluctuations dues à la turbulence de l'écoulement. En haut de la figure, on montre les trois composantes du champ magnétique mesurées près du disque 1. Le début de la courbe ($t < 160$) correspond aux fréquences 14.1/23.5, pour lesquels une solution stationnaire est observée. Pour calculer les parties dipolaires et quadrupolaires on projette par la suite sur les modes de cette solution stationnaire (appelée état (D_0, Q_0)). En bas à gauche sur la figure 2.38, on montre l'évolution au cours du temps des deux modes. Les comportements caractéristiques sont un rebond systématique du champ dipolaire après chaque renversement, et un transfert net vers le quadrupole lorsque le dipole s'annule. A droite, la trajectoire dans l'espace des phases (D, Q) fait clairement apparaître un cycle qui ralentit dans deux régions opposées de l'espace, correspondant probablement à la position de deux points fixes. Ces comportements confirment l'interprétation des résultats en ne faisant appel qu'à l'interaction d'un dipole et d'un quadrupole. Cette interprétation semble assez robuste face aux différentes méthodes de calcul des parties dipolaires

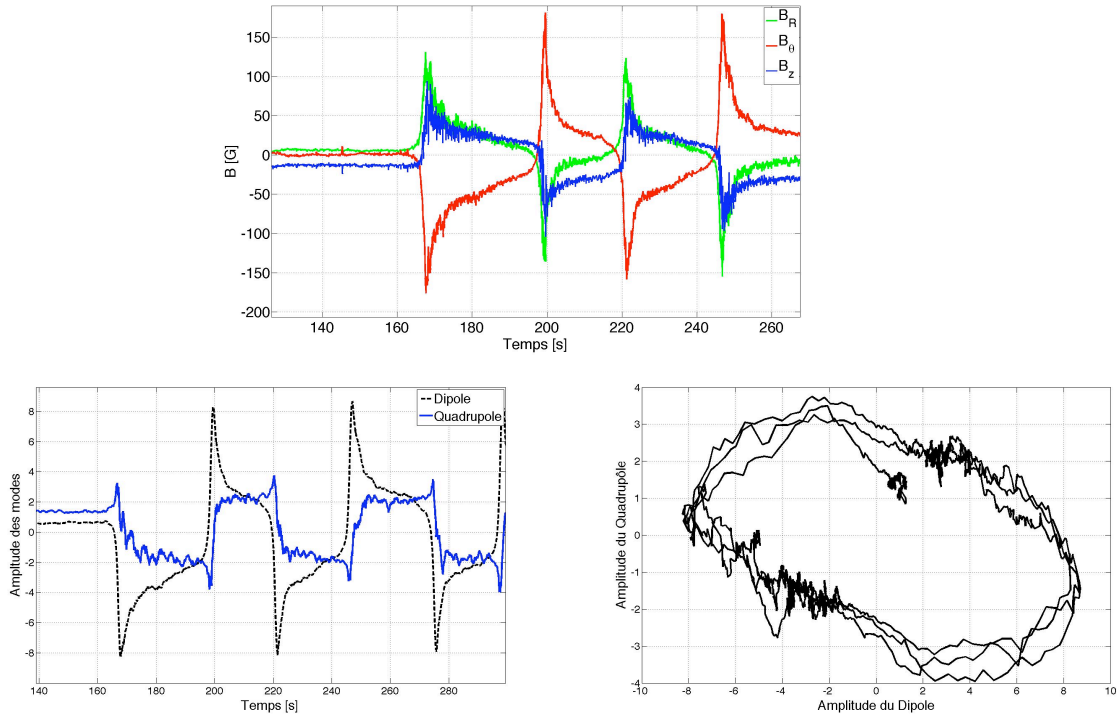


FIG. 2.38: Régime $F_1 = 15\text{Hz}$, $F_2 = 25\text{Hz}$ En haut : Évolution des composantes du champ mesurées près du disque 1. En bas, à gauche : évolution temporelle des modes dipolaire et quadrupolaire projetés sur l'état (D_0, Q_0) . En bas, à droite : on représente la trajectoire dans l'espace des phases (D, Q) .

et quadrupolaires. Il est possible d'obtenir des conclusions identiques sans réaliser de projection et en regardant par exemple directement les composantes radiales et axiales des modes. En revanche, la composante θ mène à un cycle un peu différent, où le transfert vers le quadrupole est moins net.

Évolution du cycle : apparition et disparition

Le cycle obtenu à la figure 2.38 est une bonne illustration du caractère de basse dimension de la dynamique dans l'expérience VKS. Il est important de mieux comprendre comment ce cycle évolue en fonction des paramètres de contrôle de l'expérience. Tout en restant au rapport de fréquence $F_1/F_2 = 0.6$, on modifie $F_1 + F_2$, afin de voir comment le système bifurque vers cet état oscillant. Pour les différentes mesures, on continue de projeter sur l'état (D_0, Q_0) utilisé précédemment afin de pouvoir comparer les résultats. La figure 2.39 montre les différents cycles obtenus. La tache noire correspond au point fixe obtenu pour $14.1\text{Hz}/23.5\text{Hz}$. En augmentant légèrement les fréquences tout en conservant le rapport $F_1/F_2 = 0.6$, le système bifurque vers un cycle limite. Le cycle est identique à celui vu à la figure 2.38. Lorsque l'on continue d'accroître la rotation des deux disques, on voit que le cycle se déforme

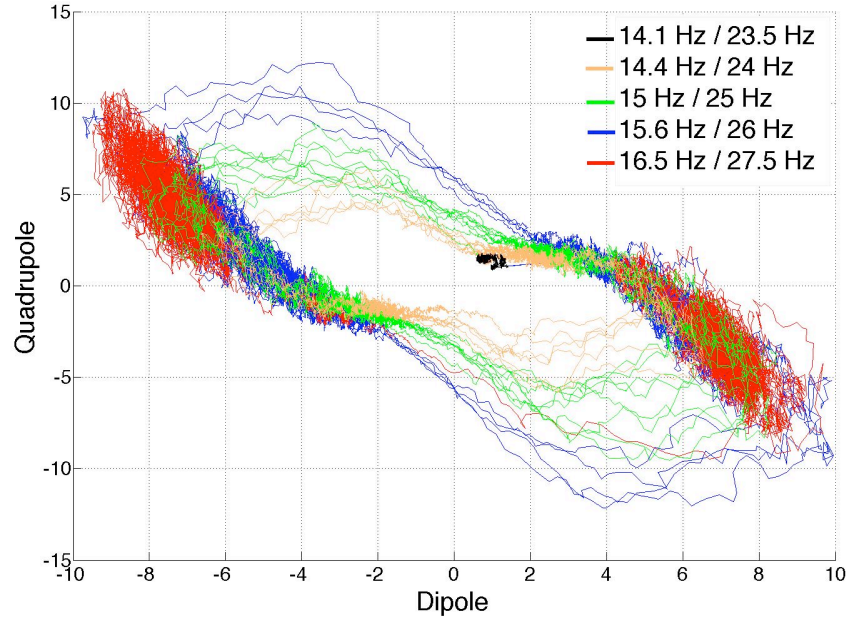


FIG. 2.39: Trajectoires dans l'espace des phases (D, Q) des régimes observés pour $F_1/F_2 = 0.6$. On observe une transition entre points fixes, cycles limites et renversements chaotiques.

légèrement, et les points de stagnation du cycle se déplacent. Le cycle semble également passer un temps de plus en plus long près des points fixes. Enfin, la figure 2.39 montre que le système se stabilise vers un régime de renversements plus rares (voir $16.5\text{Hz}/27.5\text{Hz}$, courbe rouge). Dans ce régime, les renversements se produisent de manière chaotique (voir figure 2.40 par exemple). Pour des fréquences plus élevées, le système reste piégé sur un des points fixes obtenus, sans se renverser.

VKS2J : renversements chaotique pour $16\text{Hz}, 26.5\text{Hz}$

On s'intéresse plus particulièrement au régime se produisant pour les fréquences $16\text{Hz}/26.5\text{Hz}$. Pour ces paramètres, le champ magnétique se renverse de manière chaotique. La figure 2.40 montre l'évolution des modes magnétiques durant les renversements. Pour cette figure, on choisit de montrer les composantes axiales des modes, c'est-à-dire calculées à partir de $B_z(\mathbf{r}, t)$. Avec cette méthode différente de visualisation des modes dipole/quadrupole, on voit que le cycle (en haut, à droite) est légèrement différent de celui de la figure 2.39, sans pour autant changer les conclusions qualitatives sur le comportement du champ. On retrouve sur la série temporelle les même caractéristiques (rebond du dipole et transfert vers le quadrupole). Sur la figure du bas, on superpose les 4 renversements obtenus dans ce régime. La compétition entre les deux modes, ainsi que la robustesse de la forme des renversements, est assez claire. Ce régime est d'autant plus intéressant qu'il

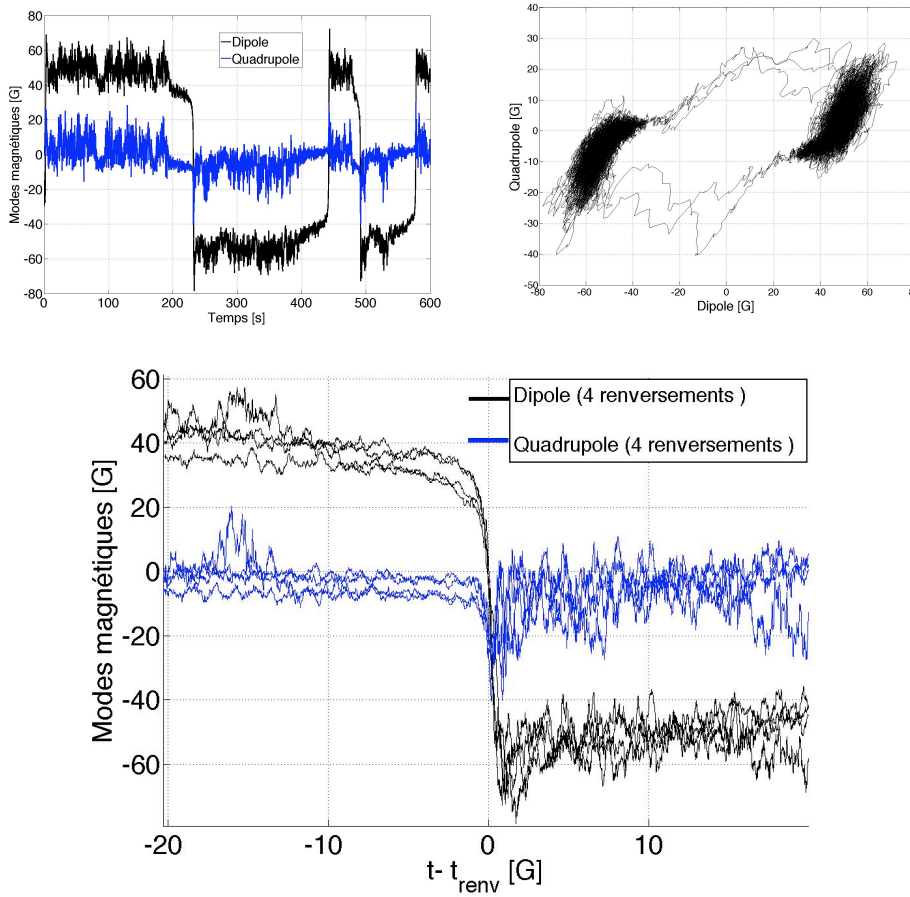


FIG. 2.40: Régime $F_1 = 16\text{Hz}$, $F_2 = 26.5\text{Hz}$ En haut, à gauche : évolution temporelle des modes dipolaire et quadrupolaire calculés à partir de la composante axial du champ. A droite : on représente la trajectoire dans l'espace des phases (D , Q). En bas : Évolution du champ durant quatre renversements superposés.

présente une partie quadrupolaire proche de zero pendant une polarité donnée, bien que le quadrupole participe activement à la dynamique. Il s'agit d'une situation similaire à la géodynamo, pour laquelle le quadrupole est faible durant les phases de polarité données. Un peu avant chaque renversement, on observe un changement dans l'amplitude des fluctuations et de la valeur moyenne des deux modes. Cela peut s'interpréter comme une interaction avec un point fixe instable. Le système se trouve probablement juste au-dessous du point de bifurcation noeud-col évoqué dans le modèle de la section précédente, et les fluctuations turbulentes permettent des renversements fréquents grâce à la proximité des solutions stable et instable. Cette interprétation est renforcée par le cycle observé à la figure 2.39, pour les fréquences $16.5\text{Hz}/27.5\text{Hz}$ (courbe rouge). Dans ce cas, les renversements du champ sont beaucoup plus rares, et se produisent entre des valeurs moyennes du dipole d'environ $D = \pm 7$. On aperçoit pourtant sur le cycle un point de stagnation correspondant à une valeur plus faible de $D \sim -3$, atteint juste avant le renversement. Ce point fixe instable se trouve visiblement plus loin de la solution stable que pour la figure 2.40. Cette distance par rapport au point de bifurcation noeud-col (correspondant

à la collision des deux solutions), rend plus difficile l'apparition des renversements.

VKS2i : oscillation périodique pour 28Hz, 8Hz

La configuration de la campagne VKS2i est identique à VKS2j, sauf que l'anneau central du plan médian est présent. La présence de l'anneau peut compliquer un peu la compréhension des résultats, car il introduit des mouvements hystériques dans l'hydrodynamique. Ces comportements sont liés à des décrochages rapides et brusques de la couche de mélange du plan médian. En présence d'un comportement hydrodynamique plus complexe, il est donc intéressant de se demander si une description de basse dimension, qui ne fait appel qu'à l'interaction de deux modes magnétiques, reste valable.

On étudie les régimes produits pour des décalages importants entre les deux fréquences, comme par exemple $F_1 = 28\text{Hz}$ et $F_2 = 8\text{Hz}$. Pour ces paramètres, on observe une oscillation quasi-périodique du champ magnétique. On réalise la décomposition dipole/quadrupole selon la direction z . La figure 2.41 montre le cycle obtenu. Là encore, un transfert périodique entre dipole et quadrupole est observé. On voit clairement le cycle ralentir près de deux solutions opposés. Sur la figure 2.41,

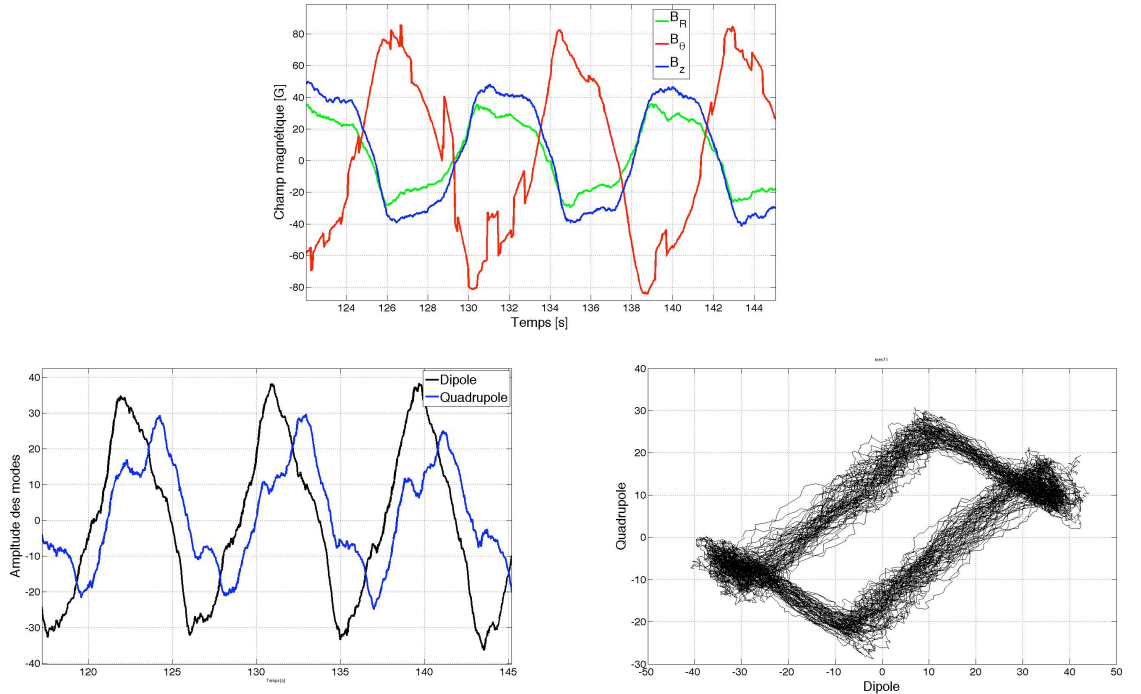


FIG. 2.41: Régime $F_1 = 28\text{Hz}$, $F_2 = 8\text{Hz}$ En haut : Évolution des composantes du champ mesurées près du disque 1. En bas, à gauche : évolution temporelle des modes dipolaire et quadrupolaire calculés à partir de la composante axiale du champ. En bas, à droite : on représente la trajectoire dans l'espace des phases (D , Q).

en haut, le signal direct semble montrer une évolution périodique du champ magnétique assez différente des comportements décrits pour la campagne. Par exemple, les composantes B_r et B_z semblent en phase, le signal ne présente pas d'importants rebonds, et l'asymétrie entre la croissance et la décroissance du champ est moins nette. Toutefois, le calcul des composantes dipolaire et quadrupolaire permet de mettre en évidence un cycle présentant les mêmes caractéristiques que précédemment. On voit que cette décomposition fait donc apparaître une similarité des résultats, qui n'est pas évidente sur le signal montrant les composantes classiques. Ainsi, une modification des détails de l'hydrodynamique (ajout de l'anneau) ne change pas la dynamique du champ, qui reste dominée par une interaction entre un dipole axial et une structure quadrupolaire.

VKS2I : renversements chaotiques pour 22Hz, 16.5Hz

Dans une autre zone restreinte de l'espace des paramètres, assez proche de la contra-rotation exacte, on observe des renversements chaotiques du champ magnétique. La figure 2.42 montre une évolution typique pour $F1 = 22\text{Hz}$ et $F_2 = 16.5\text{Hz}$. A première vue, le régime semble identique aux précédents : la décomposition dipole/quadrupole fait apparaître certaines caractéristiques communes, comme le rebond du dipole axial après chaque renversement, et un bref transfert vers le quadrupole. En revanche, la trajectoire dans l'espace des phases suggère l'interaction avec deux autres points fixes, situés assez loin des solutions stables. Il est toujours possible de comprendre cette dynamique plus complexe dans le cadre du modèle de basse dimension, mais cela nécessite de recourir à des termes d'ordre supérieur dans l'équation d'amplitude. Pour un régime de paramètres identiques, mais dans une configuration incluant l'anneau central, les renversements du champ n'impliquent pas ces points fixes supplémentaires, et il n'est pas nécessaire de prendre en compte les termes non-linéaires d'ordre cubique. A cause de la linéarité de l'équation d'induction, on sait que les termes cubiques dans l'équation d'amplitude proviennent de l'interaction avec le champ de vitesse. Toutefois, étant donné la valeur de Pm (et donc la différence entre les échelles de temps magnétique et cinétique), les modes de vitesses s'éliminent adiabatiquement, de sorte que leur effet n'intervient qu'implicitement à travers les paramètres du modèle. En supprimant la contrainte de l'anneau central, on autorise des fluctuations de grande échelle du fluide, et l'effet de l'écoulement sur la dynamique devient plus important. Ceci est pris en compte dans le modèle à travers les termes d'ordres supérieurs. Nous verrons au chapitre 5 de cette thèse qu'il est possible d'obtenir une dynamique de basse dimension qui prend en compte explicitement un mode de vitesse.

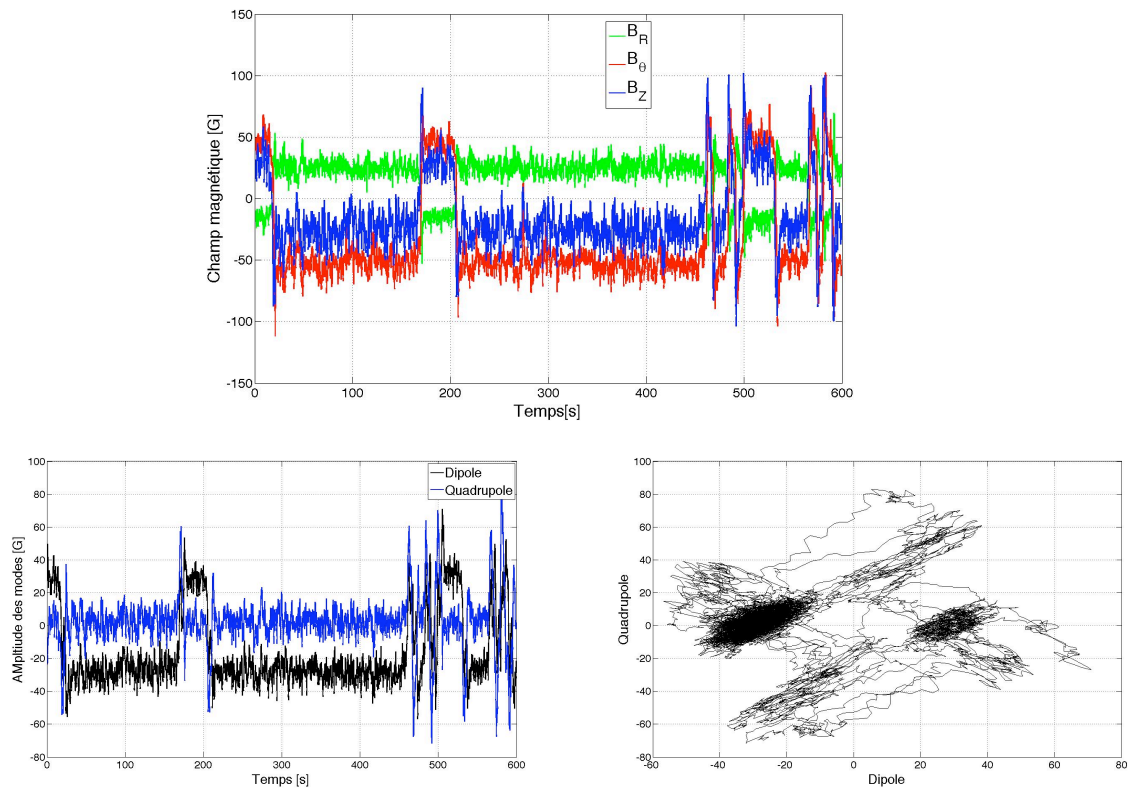


FIG. 2.42: Régime $F_1 = 22\text{Hz}$, $F_2 = 16.5\text{Hz}$ En haut : Évolution des composantes du champ mesurées près du disque 1. En bas, à gauche : évolution temporelle des modes dipolaire et quadrupolaire calculés à partir de la composante axiale du champ. En bas, à droite : on représente la trajectoire dans l'espace des phases (D, Q).

Chapitre 3

Approche cinématique

Contents

3.1 Outils numériques	70
3.1.1 Approche de volume fini et transport contraint	70
3.1.2 Singularité des coordonnées	73
3.1.3 Conditions aux limites	73
3.2 Étude cinématique d'une dynamo de von Kármán	77
3.2.1 Écoulement moyen de von Kármán	77
3.2.2 Effet des conditions aux limites sur l'instabilité	81
3.2.3 Rôle des fluctuations non-axisymétriques	85

Le chapitre précédent a montré que l'expérience VKS représente une avancée dans la compréhension de la théorie de la dynamo fluide et des champs magnétiques naturels. Cela montre que dans un écoulement turbulent non-contraint, il est possible d'obtenir une dynamo qui ne soit pas engendrée par l'écoulement moyen, mais par les fluctuations. Les résultats sont nombreux, et assez différents de ceux des expériences précédentes : la génération d'un champ magnétique moyen principalement axisymétrique, une dynamique très riche confinée dans une petite région de l'espace des paramètres, des régimes présentant une dynamique de basse dimensionalité. Au cours du chapitre précédent, nous avons esquissé des débuts d'explications, comme l'effet $\alpha - \omega$ pour comprendre la génération du champ ou un mécanisme basé sur une bifurcation noeud-col pour décrire des renversements. Notre compréhension de ces phénomènes, bien qu'en accord avec les mesures expérimentales, demeure difficile à justifier. C'est dans ce contexte qu'émerge le besoin d'une étude numérique, en interaction étroite avec cette approche expérimentale. A mi-chemin entre la complexité de l'expérience et la simplicité des modèles théoriques, l'étude numérique va nous permettre de mieux cerner les mécanismes de la dynamo. L'inverse est également vrai : on peut saisir ici l'opportunité de tester la modélisation numérique d'un problème dynamo par sa réalisation expérimentale, nous permettant de valider la pertinence des modèles numériques utilisés.

3.1 Outils numériques

3.1.1 Approche de volume fini et transport contraint

Nous présentons dans cette section l'un des deux outils fondamentaux utilisés durant cette étude. Il s'agit d'un code initialement développé par Emmanuel Dormy, Romain Teyssier et Sébastien Fromang [83]. L'approche est cinématique, n'incluant que la résolution de l'équation d'induction, et l'écoulement $\mathbf{y}$ est totalement prescrit. On ne résout donc pas l'équation de Navier-Stokes, et il n'y a pas de saturation du champ magnétique. Historiquement, ce code a été développé pour des études astrophysiques, comme par exemple le problème de la dynamo galactique traité dans l'annexe C. Dans une telle situation, la partie diffusive de l'équation d'induction est souvent négligeable, ce qui permet d'envisager le problème en considérant seulement la partie advective, puis de rajouter des corrections associées à la diffusion si besoin. Le présent code a été écrit pour décrire de façon optimale de tels problèmes à haut Rm . Dans cette thèse, nous nous intéresserons surtout à des dynamos à faible Rm , mais le code numérique reste bien évidemment complètement valide. Il ne s'agit pas de la description numérique la plus adaptée au problème en terme de vitesse de calcul, mais de légères modifications de ce code nous ont permis de pouvoir parfaitement explorer les situations qui nous intéressaient.

Le point de départ pour le choix de la méthode numérique vient du fait que l'équation d'induction peut toujours être ré-écrite sous la forme conservative

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} , \quad (3.1)$$

avec le champ électrique $\vec{E}$ défini par

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \nabla \times \mathbf{B} . \quad (3.2)$$

Lorsque la diffusivité électrique est nulle, il y a donc conservation du flux magnétique. De plus, on doit toujours satisfaire la contrainte de divergence nulle du champ magnétique. Une manière simple et efficace de décrire l'évolution des équations conservatives est d'utiliser les schémas conservatifs dits de 'Volumes Finis'. Dans de telles approximations numériques, les variables du problème sont considérées constantes par morceaux, découpant le domaine que l'on considère en petites cellules de taille $\Delta \mathbf{x}$ (de volume $\Delta \mathbf{x}^3$ dans le cas 3D). Puis on intègre temporellement l'évolution des champs au sein de ces cellules. A ce stade, puisqu'on effectue un moyennage sur l'ensemble de la cellule de taille $\Delta \mathbf{x}$, l'erreur commise est de l'ordre de $\Delta \mathbf{x}$: c'est pourquoi on parle alors de schéma numérique d'ordre 1 en espace. C'est cette approche 'Volume fini' qui a été choisie pour le code que nous utiliserons tout au long de ce chapitre.

Plusieurs méthodes possibles existent pour adapter les schémas de volumes finis aux problèmes de MHD. La plus naturelle est par exemple de définir à la fois le

champ magnétique et le champ de vitesse au centre de chaque cellule numérique. Dans ce cas, la contrainte de divergence nulle du champ magnétique doit être assurée par différentes techniques, comme l'utilisation d'une étape où l'on force $\nabla \mathbf{B} = 0$ à chaque pas de temps ('divergence cleaning'), ou en rajoutant artificiellement des ondes assurant la divergence ('divergence waves'). L'approche alternative utilisée pour ce code est de combiner la méthode de Volume fini avec un algorithme dit de 'transport contraint'. On définit la vitesse au centre de chaque cellule, mais les variables magnétiques sont décrites sur les faces de ces cellules. On utilise par conséquent une grille dite alternée, également appelée 'grille de Yee'. Ceci permet de tirer avantage de la forme conservative de l'équation 3.1 puisque l'on traite directement le rotationnel du champ électrique en calculant les circulations associées. Ainsi, si le champ magnétique initial est à divergence nulle, le schéma numérique assure $\nabla \mathbf{B} = 0$ pour tout temps. La méthode fournit une description efficace des équations puisqu'elle repose sur la contrainte de divergence nulle du champ magnétique, au lieu de l'imposer a posteriori.

Par simplicité, on décrit ici le schéma numérique utilisé à l'aide de variables cartésiennes. L'implémentation du code cylindrique ne diffère que par l'introduction des termes de courbure. Dans un repère cartésien (x, y, z) les trois composantes du champ magnétique à l'instant $t = n\Delta t$ sont discrétisées sur une grille cartésienne (i, j, k) comme suit

$$\langle B_x \rangle_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = 1/(\Delta y \Delta z) \int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} B_x(x_{i+1/2}, y, z, t^n) dy dz , \quad (3.3)$$

$$\langle B_y \rangle_{i,j+\frac{1}{2},k}^n = 1/(\Delta x \Delta z) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} B_y(x, y_{i+1/2}, z, t^n) dx dz , \quad (3.4)$$

$$\langle B_z \rangle_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n = 1/(\Delta x \Delta y) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} B_z(x, y, z_{i+1/2}, t^n) dx dy . \quad (3.5)$$

Ces trois variables doivent satisfaire la condition de divergence nulle, qui sous forme intégrale devient

$$\begin{aligned} & \frac{\langle B_x \rangle_{i+1/2,j,k}^n - \langle B_x \rangle_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \\ & \quad \frac{\langle B_y \rangle_{i,j+1/2,k}^n - \langle B_y \rangle_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} + \\ & \quad \frac{\langle B_z \rangle_{i,j,k+1/2}^n - \langle B_z \rangle_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} = 0 . \end{aligned} \quad (3.6)$$

En pratique, on choisit des conditions initiales satisfaisant cette contrainte. Le fait que la divergence reste nulle au cours du temps est alors naturellement assurée par le caractère conservatif du schéma d'intégration numérique utilisé. L'évolution de la composante $\langle B_x \rangle$ par exemple, est déterminée par

$$\begin{aligned} \langle B_x \rangle_{i+1/2,j,k}^{n+1} = & \langle B_x \rangle_{i+1/2,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\langle E_z \rangle_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - \langle E_z \rangle_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} \right) - \\ & \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\langle E_y \rangle_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - \langle E_y \rangle_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2} \right) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Des expressions similaires peuvent être dérivées pour les autres composantes du champ magnétique. A ce stade, il ne reste alors plus qu'à déterminer une expression pour le champ électrique moyenné dans le temps et défini sur les arêtes de chaque cellule. Par exemple la solution pour E_x est donnée par :

$$\langle E_x \rangle_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \frac{v}{2} \left(\langle B_z \rangle_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,R} + \langle B_z \rangle_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,L} \right) - \frac{w}{2} \left(\langle B_y \rangle_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,T} + \langle B_y \rangle_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,B} \right) . \quad (3.8)$$

Dans cette expression, les symboles R, L, B, T représentent un des 4 voisins de l'arête considérée (top, bottom, right ou left), et se réfèrent aux états prédits, centrés dans le temps et interpolés aux arêtes des cellules. Dans la version originale du code, l'expression ci-dessus nécessite normalement le recours à deux termes supplémentaires, censés représenter l'upwind de la solution (associé au solveur MUSCL original) et agissant comme une diffusion numérique effective, indispensable à la convergence numérique du code. Nous avons ici préféré cette approche de schéma centré du second ordre sans 'upwind'. Nous verrons dans la suite que nous décrivons des situations dans laquelle la résistivité magnétique physique est relativement importante et domine largement la résistivité numérique qu'introduirait ce terme d'upwind. Il n'est donc pas nécessaire de prendre ce terme en compte pour assurer la stabilité numérique de l'ensemble.

L'approche traditionnelle est de calculer la solution approximative en utilisant un schéma temporel 'prédicteur-correcteur'. L'idée d'une telle méthode est de calculer un état prédit au temps $t^{n+1/2}$ et d'utiliser cet état intermédiaire comme état initial des solveurs finaux. A cause de cette discrétisation en temps et de l'approche volume fini utilisée, le calcul des flux correspondants est donc limité à une certaine condition de stabilité, appelé critère de Courant (ou critère CFL) : la taille du pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle est limitée par la taille des cellules et la vitesse considérée. Dans notre cas, ce critère est assez restrictif et il est donné par

$$\left(\frac{u}{\Delta x} + \frac{v}{\Delta y} + \frac{w}{\Delta z} \right) \Delta t \leq 1 , \quad (3.9)$$

où u, v et w sont les vitesses maximales dans chacune des directions.

Enfin, puisque notre intérêt se porte sur des systèmes près du seuil d'instabilité dynamo, il est important de prendre en compte l'effet de la résistivité. Cette résistivité est introduite dans le schéma au moyen d'une technique de séparation d'opérateur ('operator splitting technique'). Après que l'équation d'induction ait été avancé d'un pas de temps avec la solution B^* , on résout le problème pour le terme diffusif, en utilisant l'équation

$$\frac{B^{n+1} - B^*}{\Delta t} = \eta \nabla \times (\nabla \times B^{n+1}) . \quad (3.10)$$

Notons que cette expression est évaluée sur les arêtes des cellules. Si l'on considère le courant $j^n = \nabla \times B^n$ comme l'analogie du champ électrique considérée précédemment, tous les calculs précédents s'y appliquent parfaitement. La condition de

stabilité numérique sur le pas de temps n'est calculée que par rapport à la partie advective. On introduit donc une méthode de résolution itérative pour la partie diffusive du code numérique.

3.1.2 Singularité des coordonnées

Le code est, dans sa version originale, restreint à un domaine n'incluant pas le centre du cylindre. Dans une perspective de dynamo galactique, ceci n'est pas un problème puisque le centre de la galaxie contient un trou noir peu descriptible par l'approximation de la MHD classique. Afin de décrire une expérience telle que VKS, dans un cylindre plein, il est nécessaire de modifier le code cylindrique pour supprimer ce trou. Conceptuellement, la méthode numérique utilisée ici s'applique parfaitement à une géométrie pleine. Le rayon du cylindre intérieur est un paramètre libre du problème et il est tout à fait possible de réduire cette taille à zéro, afin d'obtenir un maillage s'étendant jusqu'en $r = 0$. Toutefois, cela pose en pratique un problème technique : comme nous l'avons vu dans la section précédente, la méthode de volume fini introduit inévitablement un critère de stabilité CFL, c'est-à-dire une borne supérieure sur la valeur du pas de temps, dépendant de la distance minimale qui existe entre deux arrêtes de cellules. Lorsque l'on étend le maillage au centre, la singularité intrinsèque des coordonnées cylindriques produit des cellules de plus en plus petites, conduisant à des pas de temps de plus en plus courts. Le problème est de pouvoir contourner la restriction du critère CFL. Pour cela, on utilise un filtre haute fréquence dans la direction azimutale capable d'amortir numériquement les ondes de très hautes fréquences. Il est ainsi possible de prendre un pas de temps plus long, basé sur un certain rayon critique R_c . Le critère CFL est brisé dans le domaine où $r < R_c$, et des instabilités numériques apparaissent et sont filtrées par le schéma. Pour cela, on applique une transformée de Fourier rapide au champ magnétique pour un rayon donné, selon la direction ϕ . Les composantes de Fourier de faible longueur d'onde, correspondant aux instabilités numériques créées, sont alors atténuées par le filtre et renvoyées dans l'espace physique via une transformée de Fourier rapide inverse. Le nombre azimutal m_c de coupure de ce filtre dépend de r selon une formule choisie empiriquement

$$m_c = N_\phi \left(\frac{r}{R_c} \right)^{n_f}, \quad (3.11)$$

où n_f est un paramètre optionnel permettant d'accroître la force du filtre. En pratique, on prend la partie entière de m_c pour effectuer le filtre.

3.1.3 Conditions aux limites

Comme nous allons le voir, une partie de ce chapitre est consacrée à l'effet de différentes conditions aux limites magnétiques sur la génération de la dynamo de von Kármán. Le but est de mieux comprendre le rôle du sodium au repos ou de la

nature ferromagnétique des disques par exemple. Dans cette section, nous voulons décrire de manière simple l'implémentation numérique de ces différentes conditions aux limites, sans rentrer dans les détails concernant les motivations pour de telles configurations. Les raisons physiques exactes pour de telles conditions apparaîtront claires dans la prochaine section, au moment de leur utilisation.

La condition aux limites pour le champ magnétique la plus répandue est celle correspondant à un domaine extérieur électriquement isolant. Il s'agit de la situation rencontrée dans les dynamos naturelles comme le manteau entourant le noyau terrestre. Dans ce cas, il n'y a pas de courants dans le domaine extérieur et le champ magnétique satisfait l'équation

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 . \quad (3.12)$$

Dans ce cas, le champ satisfait également la contrainte de solénoïdalité. Dans le domaine isolant a priori infini, le système obéit aux équations

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\nabla\Phi , \\ \Delta\Phi &= 0 . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dans une telle situation, afin de calculer le champ magnétique en un point donné de la surface limite, il est nécessaire de connaître le comportement global du champ sur l'ensemble de la surface. On parle alors de conditions aux limites globales, ou non-locales. Il existe plusieurs méthodes pour implémenter les conditions magnétiques aux bords d'une région isolante. Il est par exemple possible de résoudre numériquement les équations 3.13 à l'aide d'une méthode de grille quelconque. Cette approche nécessite toutefois de définir un domaine additionnel dans lequel on résout l'équation de Laplace, ce qui correspond à introduire un domaine isolant de taille finie. Cette approche utilise donc des approximations numériques supplémentaires. La stratégie ici est plutôt d'utiliser une formulation intégrale des conditions aux limites pour résoudre le jeu d'équation 3.13. Il est possible de décrire le champ potentiel Φ en fonction de la valeur de la composante normale du champ magnétique sur l'ensemble de la surface limite. La détermination de la composante tangentielle du champ magnétique se fait alors en fonction de la composante normale et d'une matrice d'interaction qui ne dépend que de la géométrie du domaine. La grille numérique n'étant en général pas modifiée au cours de la simulation, la matrice n'est calculée qu'une fois, au début du calcul. On gagne ainsi un temps précieux car l'implémentation des conditions aux limites se réduit à une simple multiplication matricielle à chaque pas de temps. Pour une description plus détaillée de cette méthode, on renvoie le lecteur aux articles d'Iskakov et al [34],[33].

En plus de cette condition correspondant à un saut infini de conductivité, on considère également des situations où il existe un saut de perméabilité magnétique avec le domaine extérieur. Les conditions de passage pour le champ magnétique entre deux milieux de perméabilités magnétiques différentes sont bien connues en physique. Pour deux milieux que l'on dénote par les indices 1 et 2, on a

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_1 , \quad (3.14)$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{n}|_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{B} \times \mathbf{n}|_1 , \quad (3.15)$$

où $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire défini comme étant normal à l'interface entre les deux régions, et les μ_i représentent les perméabilités magnétiques correspondantes. La composante normale à l'interface est continue, tandis que le changement de perméabilité introduit un saut dans la composante tangentielle du champ magnétique, plus forte dans le milieu de haute perméabilité. Nous pourrions tenter de décrire dans le code un saut de perméabilité fini basé sur les équations 3.14,3.15. Toutefois cela n'est pas aisé numériquement et n'est pas très pertinent pour le problème étudié. Les disques utilisés dans l'expérience, à l'origine du saut de perméabilité que l'on tente de modéliser, sont constitués de fer doux, matériel ferromagnétique correspondant à une perméabilité magnétique cent à mille fois supérieure à celle du sodium. Ce facteur justifie la considération des équations 3.14-3.15 dans la limite d'un saut de perméabilité magnétique infini. Dans cette limite, si on élimine la possibilité d'un champ tangentiel infini dans le domaine ferromagnétique, on peut raisonnablement supposer que la condition suivante s'applique dans le domaine non-ferromagnétique, du côté fluide

$$\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} . \quad (3.16)$$

Les lignes de champ magnétique dans le domaine fluide ont tendance à se connecter perpendiculairement au domaine ferromagnétique. On obtient un jeu de conditions aux limites suffisant pour fermer le système d'équations. En fait, ces conditions sont parfois utilisées comme approximation des conditions isolantes, et appelées 'pseudo-vide'. Sur les couvercles supérieur et inférieur du cylindre, cela revient à imposer un champ purement selon z , de sorte qu'on a

$$\mathbf{B} \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} , \quad (3.17)$$

Il est également possible d'imposer un autre type de conditions aux limites sur les couvercles. Pour des raisons liées à la nature ferromagnétique des disques, discutées en détails dans la suite, il peut être intéressant de forcer les lignes de champ magnétique à se raccorder à la surface en étant purement azimutales. On obtient dans ce cas

$$\mathbf{B} \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{0} . \quad (3.18)$$

Contrairement aux autres conditions aux limites, ce jeu de conditions magnétiques est relativement peu courant, et cela mérite que l'on s'attarde aux détails d'une telle implémentation, notamment en ce qui concerne les contraintes requises sur le champ magnétique. La nature solénoïdale du champ magnétique ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) et le fait que B_r est identiquement nul sur l'ensemble de l'interface limite, implique

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = -r \frac{\partial B_z}{\partial z} . \quad (3.19)$$

Cette équation nous fournit alors la condition de solvabilité suivante

$$\oint_0^{2\pi} \frac{\partial B_z}{\partial z} d\phi = 0 . \quad (3.20)$$

L'écoulement considéré lors de l'utilisation de cette condition aux limites est complètement axisymétrique, et les modes dans la direction ϕ se découplent complètement. On sait de plus que le théorème de Cowling implique qu'un mode propre magnétique axisymétrique ne peut exister. La condition de solvabilité est ainsi obligatoirement satisfaite, ce qui ne serait pas le cas pour une simulation non-linéaire. Pour les modes non-axisymétriques, on peut alors écrire

$$\oint_0^{2\pi} B_\phi d\phi = 0 , \quad (3.21)$$

ce qui, avec 3.19 détermine complètement le champ magnétique B_ϕ . En pratique, l'implémentation numérique de cette condition aux limites se réalise en deux étapes successives. On calcule d'abord

$$B'_\phi(\phi) = -s \oint_0^\phi \frac{\partial B_z}{\partial z} d\phi . \quad (3.22)$$

Ce champ magnétique est alors défini à une constante arbitraire près. Il faut ensuite corriger l'erreur commise en assurant que la constante satisfasse 3.21. L'implémentation décrite ici est mathématiquement consistante et maintient le caractère solénoïdal du champ magnétique.

3.2 Étude cinématique d'une dynamo de von Kármán

Durant cette thèse, nous avons choisis de séparer notre étude en deux parties distinctes quant à l'approche, mais complémentaires en ce qui concerne les résultats. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une modélisation de l'expérience VKS en géométrie cylindrique, à l'aide du code qui vient d'être décrit. L'approche, très simple, consiste à résoudre le problème cinématique uniquement, et en utilisant des écoulements modèles plutôt que des solutions de l'équation de Navier-Stokes. Ceci nous permet de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu, puisque l'on sait exactement le type de vitesse que l'on introduit dans la simulation. De plus, les mécanismes étudiés ici sont purement linéaires, ce qui facilite l'interprétation des résultats. Dans cette section, plusieurs questions sont abordées : Quel est le rôle des disques ferromagnétiques ? Quel est le mécanisme qui engendre la dynamo ? Comment comprendre le rôle des fluctuations turbulentes par rapport à l'écoulement moyen ? Et enfin, comment la transition vers les régimes dynamiques se produit-elle ? Au chapitre suivant, nous étudierons une géométrie sphérique, mais dans laquelle le problème MHD dynamique est résolu, apportant des réponses plus complètes à certaines de ces questions.

3.2.1 Écoulement moyen de von Kármán

Comme cela a été mentionné plus tôt, étudier expérimentalement l'effet dynamo offre, entre autres choses, l'opportunité de mieux comprendre une instabilité en présence de bruit. Un aspect fondamental de ce problème concerne l'effet des fluctuations sur l'instabilité. On peut par exemple se demander si les fluctuations n'ont qu'un rôle parasite sur l'instabilité, en changeant uniquement la valeur du seuil. Ou au contraire ces perturbations jouent-elle un rôle plus actif, en modifiant la structure et la valeur de saturation du champ magnétique ?

L'expérience VKS est un bon exemple de la difficulté des mécanismes en jeu. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la structure du champ magnétique observé est principalement un dipole axial, qui suggère l'implication des composantes non-axisymétriques de l'écoulement dans la génération de la dynamo. La plupart des planètes de notre système solaire présentent une déviation assez claire à l'axisymétrie. Le dipole équatorial est souvent important. Dans ce cas, il s'agit d'une composante structurée à grande échelle, clairement identifiable. Dans l'expérience VKS, les données expérimentales semblent indiquer que les composantes non-axisymétriques sont au contraire de petite échelle et fluctuantes dans le temps. Il semble difficile d'attribuer cette structure magnétique à l'effet d'une vitesse purement axisymétrique et de grande échelle comme l'écoulement moyen de von Kármán. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, dans les dynamos expérimentales de Karlsruhe ou Riga, les prédictions numériques réalisées en utilisant le champ de vitesse moyenné en temps sont assez proches de ce qui est observé expérimentalement. Les

fluctuations turbulentes influent essentiellement sur la valeur de saturation de l'instabilité, sans participer activement à la structuration du mode. Toutefois, dans ces expériences, l'écoulement, même si il se trouve dans un régime relativement turbulent, est fortement contraint géométriquement, puisque forcé à se déplacer le long d'un réseau de tuyauterie.

Dans l'expérience VKS, la génération du champ magnétique va être a priori liée à la partie non-axisymétrique de l'écoulement, mais n'est probablement pas complètement indépendante de la partie axisymétrique. L'écoulement moyen, indépendant du temps, reste une caractéristique importante du système et son étude peut permettre de mieux comprendre certains aspects de l'expérience. En particulier, ce champ de vitesse, simple à modéliser, s'avère utile pour aborder le problème lié à l'effet des conditions aux limites magnétiques sur le seuil de l'instabilité.

Historiquement, les premières études numériques liées à VKS se sont toutes focalisées sur l'écoulement moyen. Cette vitesse est effectivement facile à implémenter numériquement et bien étudiée expérimentalement. Il existe plusieurs façons de modéliser numériquement l'effet du champ de vitesse moyen. Par exemple, durant sa thèse, Louis Marié a implémenté numériquement des cartes de l'écoulement issues de mesures de vitesse moyenne à partir des expériences en eau réalisées au CEA à Saclay [50],[52]. Il s'agit d'une approche également utilisée plus tard par Ravelet et al [73], puis par Stefani et al [81]. On préfère ici une manière plus simple consistant à utiliser une expression analytique de vitesse connue pour représenter relativement bien l'écoulement moyen de von Kármán. Cette approche, introduite par Marié, Normand et Daviaud [51], puis reprise par la suite dans plusieurs études numériques [41],[81],[73] permet de pouvoir modifier continûment et de manière contrôlée certains paramètres de l'écoulement, comme le rapport entre vitesse toroïdale et vitesse poloïdale par exemple. Dans tout ce qui suit, le domaine contenant le fluide est défini, en coordonnées cylindriques, par $0 < r < 1$ et $-1 < z < 1$. L'expression analytique suivante 3.24, appelé parfois écoulement MND (pour Marié, Normand, Daviaud) est un exemple de vitesse reproduisant l'ensemble des caractéristiques de l'écoulement réel

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{\pi}{2} r(1-r)^2 (1+2r) \cos(\pi z) , \\ u_\theta &= 4\epsilon r(1-r) \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right) , \\ u_z &= (1-r) (1+r-5r^2) \sin(\pi z) . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ici, ϵ est un paramètre qui représente le rapport entre la partie poloïdale et la partie toroïdale de la vitesse. Des études antérieures ont montré que la valeur optimale de ce paramètre est $\epsilon = 0.7259$, qui conduit au seuil dynamo le plus bas. Les disques utilisés dans VKS sont munis de huit pales courbes usinées afin de s'approcher de ce rapport poloïdal/toroïdal.

Ce champ de vitesse synthétique reproduit la forte rotation différentielle conduisant à un cisaillement maximum dans le plan médian du cylindre, entre les deux disques. De plus, c'est un écoulement qui contient une importante hélicité cinétique.

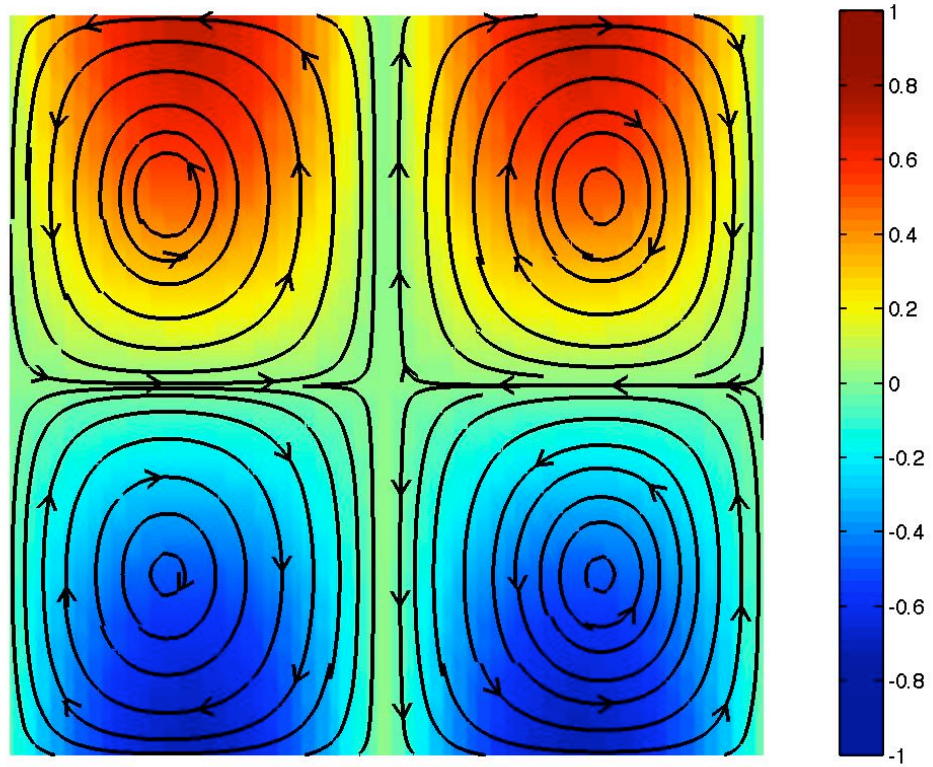


FIG. 3.1: Coupe dans le plan r, z de l'écoulement de von Kármán synthétique donné par l'expression 3.24.

La figure 3.1 montre l'écoulement 3.24 à partir d'une simulation numérique typique. Le code de couleur indique la partie toroïdale de la vitesse tandis que les lignes sont les isovalues de la fonction de courant de la vitesse poloïdale.

On résoud numériquement le problème de l'équation d'induction au sein d'un cylindre, où la vitesse est imposée explicitement par l'expression analytique 3.24. En condition initiale, le champ magnétique se projette sur les modes azimutaux allant de $m = 0$ à $m = 16$, et chacun de ces modes comporte une partie symétrique et une partie antisymétrique par rapport à l'équateur. Malgré la relative simplicité de cet écoulement, on observe la génération d'un champ magnétique par effet dynamo pour un seuil assez bas. L'écoulement de von Kármán synthétique utilisé ici est complètement axisymétrique. On s'attend logiquement à ce que le champ produit par une simulation cinématique basée sur cet écoulement brise fortement l'axisymétrie, selon le théorème de Cowling. La figure 3.2 montre la topologie du mode instable. Il s'agit d'un dipole équatorial $m = 1$, similaire à celui observé dans les travaux numériques antérieurs précédemment cités.

Dans tous les cas étudiés durant cette section, le mode crée par l'écoulement est toujours stationnaire. L'observation d'un mode $m = 1$ magnétique n'est pas vraiment surprenant, mais mérite réflexion. Il s'agit d'une structure magnétique très

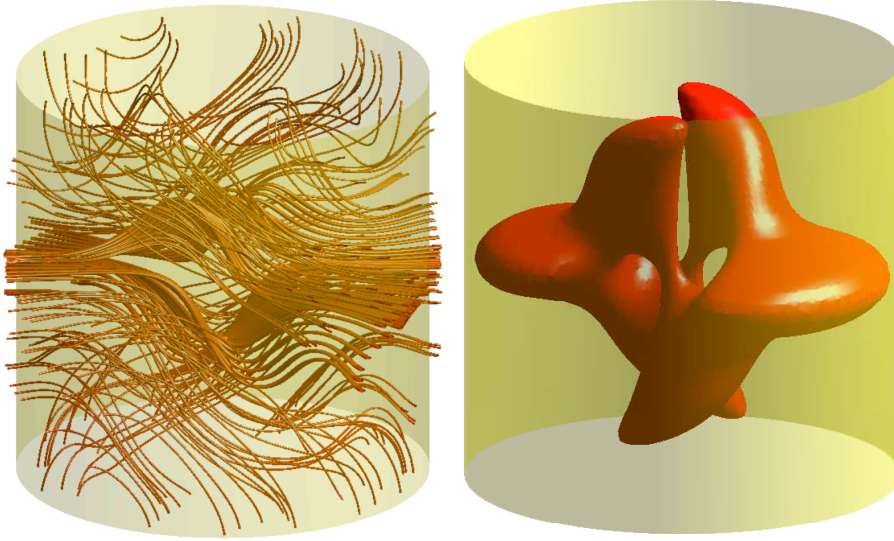


FIG. 3.2: Structure du dipole équatorial engendré par l'écoulement moyen de von Kármán. A gauche : lignes de champ magnétique du mode. A droite : isovaleur de 25 % du maximum de l'énergie magnétique. Il s'agit d'un dipole équatorial, dont la totalité de l'énergie se situe sur le nombre azimutal $m = 1$

souvent observée, pour de nombreux systèmes différents. Nous avons déjà mentionné plus haut le fait que de nombreux objets naturels présentent une composante $m = 1$ dans leur champ magnétique, y compris la Terre. Les deux expériences de dynamos fluides réalisées, Karlsruhe et Riga, ont montré toutes les deux une dépendance azimutale $m = 1$. Une des premières études numériques sur les dynamos cinématiques, réalisée par Dudley et James sur différents types d'écoulements modèles axisymétriques, a prédit la génération de telles structures équatoriales. Cela peut, une fois de plus, être relié au théorème de Cowling. En l'absence de vitesse, les diffusion des modes $m = 1$ et $m = 0$ sont les plus lentes, en raison des faibles gradients associés à ces structures. Le mode axisymétrique étant interdit par le théorème de Cowling, on s'attend donc à ce que le mode $m = 1$ soit la structure la plus facile à exciter. Dans des systèmes impliquant des champs de vitesse axisymétrique, il semble naturel que le dipole équatorial soit le mode observé. Dans cette perspective, c'est plutôt la tendance de la plupart des objets naturels à trouver un moyen d'engendrer une composante axisymétrique qui peut sembler surprenante. Nous reviendrons au prochain chapitre sur les moyens que possède un système pour contourner la contrainte du théorème de Cowling, notamment lorsque la force de Laplace est prise en compte.

Il est difficile d'avancer une explication plus précise pour la génération du dipole équatorial (voir néanmoins [62] et [9] pour une analyse du mode magnétique $m = 1$). On peut noter que l'énergie magnétique se concentre principalement dans le plan médian. Ceci correspond à l'endroit où le cisaillement est le plus important, suggérant le rôle fondamental que joue l'effet ω dans la génération du champ magnétique. Il est tout de même assez difficile de comprendre clairement les mécanismes en jeu ici dans la création de la dynamo. Le rapport toroïdal/poloïdal du champ de vitesse

contrôle fortement la valeur du seuil dynamo, et on peut penser que l’hélicité cinétique est également impliquée dans le mécanisme dynamo. Dans [9], la génération du dipole équatorial est associée avec un mécanisme de type $\alpha - \omega$, mais différent de celui présenté au chapitre 2 pour expliquer le mode axisymétrique observé.

3.2.2 Effet des conditions aux limites sur l’instabilité

L’importance des disques ferromagnétiques dans l’expérience VKS a déjà été mentionné à plusieurs reprises. C’est cette modification qui a conduit à l’observation d’un effet dynamo. A ce jour, la génération d’un champ magnétique dans l’expérience VKS n’a été observée qu’en présence d’au moins un disque ferromagnétique, et il est donc primordial de bien comprendre l’origine d’un tel effet.

Dans de nombreux cas d’instabilité, il est connu que les conditions aux limites du système peuvent influencer le développement de l’instabilité. Dans certains cas, cela peut modifier la valeur du seuil de l’instabilité. Dans d’autres cas, on observe une influence sur la dynamique et la structure du mode instable. Par exemple, dans le cas de l’instabilité de Rayleigh-Benard, où une couche de fluide initialement au repos est chauffée par le bas, on sait que les conditions aux limites sur la vitesse aux deux bords du domaine changent la structure et le seuil d’apparition des rouleaux de convection. Lorsque l’on utilise une surface libre en haut plutôt qu’une condition rigide, le seuil et le nombre d’onde de l’instabilité sont plus petits. Un changement sur les conditions aux limites thermiques a un effet encore plus important. Le même phénomène est a priori possible en ce qui concerne l’effet des conditions aux limites magnétiques sur une instabilité dynamo, et a été étudié depuis assez longtemps (voir par exemple [14]). Comme nous l’avons vu au chapitre précédent, il est techniquement difficile d’atteindre le seuil de la dynamo. Modifier les conditions aux limites magnétiques est une modification relativement simple et peu onéreuse qui peut permettre d’abaisser le seuil de l’instabilité. Par ailleurs, l’effet des conditions aux limites magnétiques sur une dynamo expérimentale reste un problème général et ouvert.

Dans la présente section, plusieurs conditions aux limites pour le champ magnétique sont étudiées et comparées entre elles. L’approche la plus classique dans le cas de simulations numériques est de considérer le domaine extérieur comme étant électriquement isolant. Ceci est assuré en raccordant le champ magnétique du domaine de calcul à un champ dérivant d’un potentiel, solution de l’équation de Laplace dans le vide. Un autre type de conditions est obtenu lorsque la paroi extérieure est un milieu ferromagnétique, correspondant à un milieu possédant une très haute perméabilité magnétique. Notons également que quelque soit la condition aux limites choisie, il est toujours possible de rajouter une couche de fluide au repos entre le domaine actif et le domaine extérieur. La condition aux limites ferromagnétique est évidemment la plus intéressante, à cause du rôle des disques ferromagnétiques.

L’utilisation de disques en fer doux permettant d’abaisser le seuil d’instabilité

dynamo trouve différentes justifications. Dans l'expérience, il existe un espace entre les disques et les bords extérieurs du cylindre. Dans cet espace, le sodium liquide est libre de circuler et il se produit probablement une recirculation du fluide. Des études numériques précédentes de Stefani et al [81], basées sur le champ de vitesse moyen, ont suggéré que la présence de cet écoulement secondaire pourrait être fortement défavorable à la croissance de la dynamo. Nous montrons ici comment cet écoulement peut affecter le seuil de l'instabilité. On effectue plusieurs simulations pour deux types différents de conditions aux limites près des disques. On peut raccorder le champ magnétique au domaine isolant soit directement au niveau des disques, soit après avoir rajouté une petite couche de sodium, au repos ou en mouvement. Ces deux couvercles de sodium derrière les disques se situent en $1 < |z| < 1.25$, étendant ainsi légèrement le domaine fluide du code. Lorsqu'une couche de sodium au repos est ajoutée entre chaque disque et le raccordement au vide extérieur, le seuil est $Rm = 72$. A cause de la rotation du disque, on s'attend à ce que ce fluide derrière les disques soit en mouvement. Dans ce cas, on considère une vitesse purement azimutale très simple (on utilise un profil linéaire qui s'annule au bord extérieur du cylindre, en $z = 1.25$) : le seuil est légèrement augmenté, passant à $Rm = 80$. Cette situation correspond à la configuration de l'expérience VKS avant la mise en place de disques ferromagnétiques, et n'a jamais montré d'auto-excitation du champ magnétique. Il a été suggéré que la présence de ce fluide derrière les disques pourrait avoir un rôle néfaste sur le seuil de l'instabilité. Il est aisé de vérifier ceci numériquement, puisqu'il suffit de supprimer ces petites couches de sodium et d'imposer la condition de raccordement à un isolant directement en $z = 1$. L'utilisation de conditions isolantes juste après les disques conduit alors à un seuil critique de l'instabilité à $Rm = 63$, significativement plus bas. Cette valeur est en relativement bon accord avec l'étude de Stefani et al, et avec les résultats de thèse de Raphaël Laguerre [40]. Dans sa thèse, Raphaël Laguerre étudie également l'effet sur le seuil dynamo de sauts finis de conductivité au niveau de la paroi extérieure. La figure 3.3 montre l'évolution du taux de croissance du champ magnétique pour les différentes conditions aux limites.

L'utilisation de disques en fer doux dans l'expérience produit un écrantage total du champ magnétique entre l'intérieur de la région dynamo et ce qu'il se passe derrière les disques, laissant espérer une diminution du seuil. Malgré cela, l'utilisation d'un saut important de perméabilité magnétique peut avoir d'autres conséquences. Dans ce cas, le champ est forcé à pénétrer perpendiculairement à la surface ferromagnétique, ce qui implique une forte contrainte topologique sur la structure du champ magnétique près des bords. De plus, des conditions aux limites ferromagnétiques concentrent l'énergie magnétique à l'intérieur du cylindre. Lorsque les lignes de champ magnétique sont forcées à se raccorder perpendiculairement aux disques, on note sur la figure 3.3 que le seuil de l'instabilité décroît jusqu'à $Rm_c = 60.5$. Dans ce cas, on conserve une condition électriquement isolante sur la paroi latérale du cylindre. La modification topologique du champ n'agit que très près des disques, et on n'observe pas de modification globale de la structure magnétique $m = 1$ dans le reste du domaine.

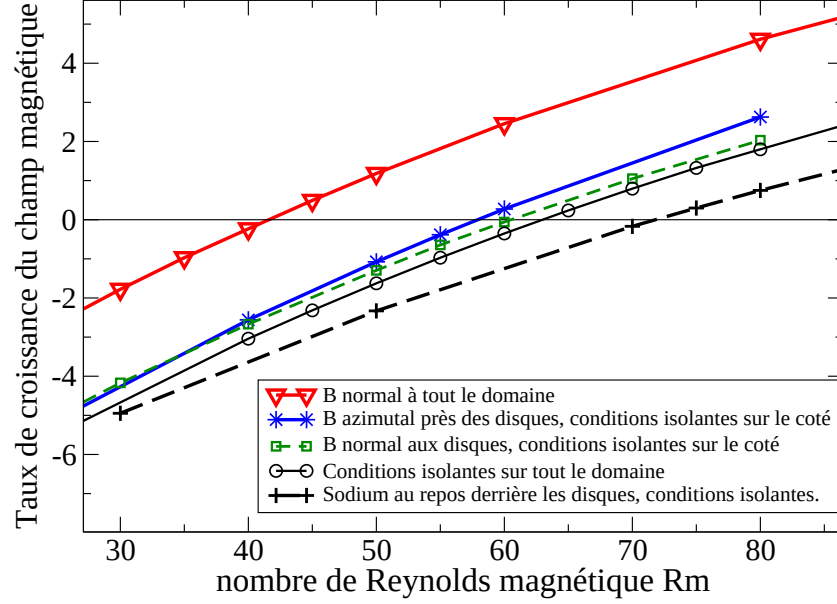


FIG. 3.3: Taux de croissance en fonction de Rm , pour différentes conditions aux limites.

Dans l'expérience VKS, chaque disque est muni de huit pales assurant un forçage inertiel du fluide. Ces pales sont également ferromagnétiques, et on pourrait imaginer que le champ devienne normal aux pales à proximité des disques, plutôt qu'à la partie plane des disques. Si on néglige l'effet de courbure des pales, l'effet collectif des huit pales correspond, en première approximation, à forcer le champ à devenir azimuthal près des disques. Les détails sur l'implémentation numérique d'une telle condition ont été présentés à la section précédente. Cette condition aux limites pour les couvercles du domaine conduit au seuil $Rm_c = 58$. Quelque soit le type de raccordement ferromagnétique utilisé, on voit que le seuil dynamo est nettement plus bas que celui impliquant un raccordement au vide (voir figure 3.3). Il est de plus intéressant de noter que les deux conditions ferromagnétiques, quoique topologiquement très différentes, présentent des seuils relativement proches. Ainsi, on observe que les conditions de haute perméabilité sur les disques ne se limitent pas à un simple écrantage de la recirculation derrière les disques. Il semble que ce changement de topologie dans le champ magnétique ait une influence plus importante sur le seuil de l'instabilité.

Dans l'expérience VKS, certaines configurations incluent également une couche de sodium au repos tout autour de la paroi latérale du cylindre. L'effet d'une couche latérale de fluide de même conductivité sur des dynamos en géométrie cylindrique a été étudié en 1999 par Kaiser et Tilgner [37]. Cela peut facilement être implémenté dans les simulations numériques, puisqu'il n'y a pas de saut de conductivité ou de

disques \ côté	$Na \& B_n$	B_n	$Na \& -\nabla\Phi$	$-\nabla\Phi$
B_ϕ	39	41	45	58
B_n	40	41.5	45.5	60.5
$-\nabla\Phi$	44	43.5	48.5	63
$Na \& B_\phi$	46	47	53	71
$Na \& B_n$	47	47.5	53.8	71.5
$Na \& -\nabla\Phi$	47.5	48	54.7	72

TAB. 3.1: Seuils dynamo pour différents types de conditions aux limites sur les disques et sur la paroi latérale du cylindre. B_n et B_ϕ indique des conditions ferromagnétiques (respectivement normal aux disques ou normal aux pales). $-\nabla\Phi$ indique une condition isolante et on ajoute Na lorsqu'une couche de sodium est présente entre l'écoulement et le domaine extérieur.

perméabilité impliquant des conditions aux limites supplémentaires. On considère simplement que le fluide conducteur possède une vitesse identiquement nulle au-delà d'un certain rayon cylindrique (en pratique pour $1 < r < 1.4$), puis on applique les conditions aux limites voulues au bords du domaine. On peut alors tester différentes configurations impliquant toutes les conditions aux limites décrites dans cette section. Les différents résultats sont représentés sur la table 3.1. Il est clair que le sodium au repos implique une forte diminution du seuil dynamo lorsqu'il est situé sur la paroi latérale, en opposition avec son rôle néfaste lorsqu'il est situé derrière les disques.

L'effet de réduction du seuil lorsque des disques ferromagnétiques sont utilisés suggère d'étendre cette condition aux limites à l'ensemble du domaine. En réalisant des simulations où le champ est forcé à se raccorder à un domaine ferromagnétique sur l'ensemble du cylindre, on observe la configuration la plus optimale en terme de réduction du seuil de l'instabilité dynamo. Dans ce cas, le nombre de Reynolds magnétique critique est $Rm_c = 41.5$. Une configuration intéressante est celle prenant en compte le sodium au repos entre la région active et la paroi ferromagnétique. On observe que la réduction du seuil reste significativement importante, bien que l'effet topologique de la haute perméabilité soit dans ce cas relativement loin de la zone active de la dynamo. Aucune modification notable de la structure magnétique générale n'est observée lorsque ces différentes conditions magnétiques sont utilisées.

Cette première modélisation numérique simple montre que, même si les diverses conditions aux limites magnétiques ne semblent pas modifier la structure magnétique générale du mode instable, elles peuvent modifier le seuil de l'instabilité. Ce seuil étant difficile à atteindre expérimentalement, les conditions aux limites peuvent donc jouer un rôle très important. Il semble que les parois ferromagnétiques soient très efficace pour diminuer le seuil d'apparition de l'instabilité dynamo. François Pétrélis a montré durant sa thèse avec un cas analytique simple que l'utilisation de matériaux ferromagnétiques peut réduire le seuil dynamo en canalisant les lignes de

champs [72]. Le même effet a été observé en 1995 pour la dynamo de Ponomarenko [53]. Numériquement, Avalos-Zuniga et al [3] ont mis en évidence une réduction du seuil dynamo pour des conditions aux limites ferromagnétiques dans une géométrie cylindrique. Vincent Morin a montré durant sa thèse que des calculs de convection en rotation conduisent à des seuils dynamo plus faibles lorsque la sphère externe est ferromagnétique [57]. Ce comportement semble être général et pourrait résulter d'un principe plus fondamental que simplement modifier la structure magnétique près des parois. Par exemple, on peut remarquer que le flux du vecteur de Poynting à travers une paroi ferromagnétique s'annule, conduisant alors à un échange d'énergie beaucoup plus faible avec l'extérieur. Ce comportement rend le système plus excitable, ce qui peut expliquer la diminution du seuil de l'instabilité dynamo. De plus, du point de vue expérimental, cette étude numérique ouvre la voie à plusieurs pistes de réflexion. Il serait par exemple intéressant d'utiliser des disques où seules les pales sont ferromagnétiques, ou au contraire des disques ferromagnétiques munis de pales en inox. Cela correspondrait aux différentes conditions aux limites utilisées ici et il serait intéressant de voir ce que deviennent le seuil et la structure du mode magnétique. De plus, on pourrait imaginer imposer des conditions ferromagnétiques sur des pièces en fer qui ne tournent pas avec les disques, afin d'éliminer un possible mécanisme d'amplification lié à la rotation d'un disque ferromagnétique. Enfin, les simulations présentant un raccordement à des conditions aux limites ferromagnétiques suggèrent une modification pour l'expérience VKS, mais également pour les différentes dynamos expérimentales actuellement en cours. L'utilisation d'une cuve extérieure entièrement ferromagnétique pourrait conduire à des seuils très bas pour la dynamo, et permettre d'atteindre des vitesses suffisantes à l'observation d'un effet dynamo en laboratoire de plus petite échelle.

3.2.3 Rôle des fluctuations non-axisymétriques

Dans la section précédente, nous avons étudié en détails la structure du champ magnétique engendré par l'écoulement moyen de von Kármán. Il est évidemment impossible d'attribuer à cet écoulement moyen seul l'origine du dipôle axial observé expérimentalement, en raison du théorème de Cowling. Contrairement aux dynamos de Karlsruhe et Riga, les fluctuations jouent ici un rôle majeur dans la génération du champ dynamo. Il s'agit de comprendre par quel mécanisme, et dans quelle mesure le champ moyen intervient dans le processus dynamo. Pour cela, un modèle a été proposé par Pétrélis, Mordant et Fauve et repose sur une dynamo $\alpha - \omega$, décrite au chapitre précédent. Alors qu'il n'y a aucun doute sur la capacité de la rotation différentielle à engendrer un effet ω , il est plus difficile de déterminer exactement une source d'effet α . Une manière simple est d'invoquer les fluctuations de l'écoulement qui sont associées à la turbulence. Dans le modèle de Pétrélis-Mordant-Fauve, il est proposé que l'éjection tourbillonnaire non-axisymétrique près des disques soit suffisante pour compléter l'effet du cisaillement et convertir du champ magnétique toroïdal en champ poloïdal. Cette approche utilisant une perturbation de vitesse plus structurée due aux pales des disques offre la possibilité d'une modélisation

cinématique simple.

Écoulement non-axisymétrique

Expérimentalement, il est pour l'instant impossible d'avoir accès à cet écoulement crée par les 8 pales de chaque disque. La localisation de ce mode de vitesse rend difficile la détermination de sa topologie exacte ou encore de son intensité. Dans cette section, nous nous bornerons à utiliser une représentation synthétique de la vitesse. On veut un champ de vitesse qui prenne en compte ces fluctuations, mais qui tende vers l'écoulement classique du champ moyen lorsque l'on effectue une moyenne dans le temps ou selon la direction ϕ , puisque la perturbation est non-axisymétrique et dépendante du temps. Une manière simple de représenter ce champ de vitesse est d'écrire

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \nabla \times (\kappa \mathbf{G}) , \quad (3.24)$$

où $\mathbf{U}$ est une représentation du champ moyen légèrement différente mais équivalente à celle utilisée à la section précédente. En coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) , cette vitesse est donnée par

$$U_r = -\frac{\pi}{2} r(1-r)^2 (1+2r) \cos(\pi z) , \quad (3.25)$$

$$U_\phi = r \frac{8}{\pi} (1-r) \arcsin(z) , \quad (3.26)$$

$$U_z = (1-r) (1+r-5r^2) \sin(\pi z) . \quad (3.27)$$

On note que ce champ de vitesse est axisymétrique, tout comme le champ moyen de l'expérience VKS. Le potentiel vecteur $\mathbf{G}$ représente les fluctuations non-axisymétriques dues aux pales. L'introduction d'un potentiel vecteur pour les perturbations de vitesse permet de garantir l'incompressibilité du fluide. De plus, il simplifie l'écriture. Il existe de nombreuses manières de représenter les fluctuations dues aux pales, et l'on choisit ici

$$\begin{aligned} G_r = & (1 + \cos(m\phi - \omega_1 t)) r \sin(\pi r) e^{-\zeta(z-1)^2} (z-1) \\ & + (1 + \cos(m\phi + \omega_2 t)) r \sin(\pi r) e^{-\zeta(z+1)^2} (z+1) . \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$G_\phi = -\frac{1}{2} r(1-r)^2 (1+2r) z^2 \sin(\pi z) (1 + \cos(m\phi \pm \omega_i t)) . \quad (3.29)$$

Cette expression peut paraître compliquée, mais il s'agit en fait d'une des manières les plus simples d'introduire les principales caractéristiques de l'écoulement. Dans cette expression, G_r engendre un écoulement dans le plan (z, ϕ) et modélise les huit tourbillons créés par les pales de chaque disque. On ne tient évidemment pas compte ici de l'éventuelle courbure des pales. La figure 3.4 montre la forme d'une telle perturbation. Sur cette figure, on représente les lignes de champ de vitesse associées à cette éjection hélicitaire.

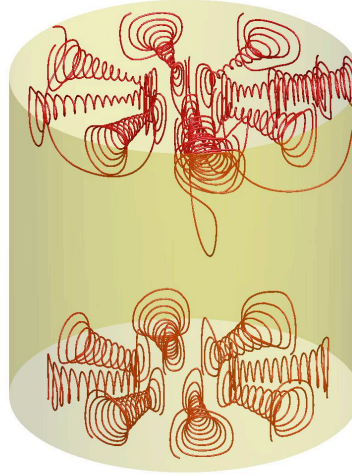


FIG. 3.4: Champ de vitesse crée par le vecteur potentiel $\mathbf{G}$ de vitesse. Il s'agit ici des lignes de champ de cet écoulement tout seul. On voit nettement les huit structures hélicitaires près de chaque disque.

La dépendance radiale choisie est une forme simple satisfaisant les conditions aux limites. La dépendance angulaire est la plus naturelle que l'on puisse imaginer pour la représentation de ces huit vortex non-axisymétriques et dépendant du temps. Il existe une plus grande liberté quant au choix de la dépendance axiale de cette expression. Dans l'expérience VKS, on s'attend raisonnablement à ce que les tourbillons restent confinés dans une région assez proche des disques. Nous avons donc choisi ici une dépendance exponentiellement décroissante à partir des disques, chacune des deux structures tournant en sens opposé. L'extension de ces tourbillons est contrôlée par le paramètre libre ζ . Cela va nous permettre d'étudier l'impact de cette extension sur la génération du champ magnétique. G_ϕ introduit une modulation selon la direction ϕ de la recirculation poloïdale de l'écoulement. En effet, la présence des pales module la force d'éjection du fluide près des disques. Enfin, le lecteur notera qu'une dépendance temporelle est introduite afin de décrire la rotation de ces tourbillons avec les disques.

Il faut également noter que dans l'expérience réelle, à chaque instant, l'écoulement turbulent brise en fait la symétrie R_π . Mais cette brisure de symétrie n'intervient que sur des échelles de temps relativement courte, moins d'un temps caractéristique d'advection. Dans la suite nous chercherons à décrire une situation où un disque tourne plus rapidement que l'autre, c'est-à-dire lorsque la symétrie R_π de l'écoulement moyen est brisée. On retrouve ici un problème typique de relation entre les brisures de symétries et les échelles de temps sur lesquelles elles interviennent. Nous verrons au chapitre 4 que ce problème peut être relié à la valeur du nombre de Prandtl magnétique. Afin de décrire la situation disymétrique où un disque tourne plus vite, il sera nécessaire de modifier l'expression analytique de ce champ de vitesse.

La vitesse choisie ici est complètement arbitraire, et il y aurait de nombreuses manières différentes de décrire probablement plus efficacement, ou plus fidèlement, l'écoulement de von Kármán non-axisymétrique. Toutefois, l'objectif de ce travail est de montrer que la dynamique ou la structure du champ magnétique peut être reproduite avec un grand nombre d'écoulements différents, pourvu que les ingrédients minimaux soit présents. Cette approche met en avant le caractère fondamental de ces ingrédients, comme par exemple la brisure de certaines symétries dans l'écoulement ou la présence d'hélicité. Il est probable que les comportements décrits dans ce chapitre persisteraient en utilisant une autre expression analytique pour les perturbations, à condition que cette vitesse présente les mêmes caractéristiques. L'étude numérique du chapitre suivant illustre d'ailleurs cet argument, puisque des résultats comparables sont observés, malgré le fait que la description des fluctuations de vitesse soit différente, et s'appuie sur une prise en compte de la turbulence engendrée par l'équation de Navier-Stokes .

Écoulement R_π symétrique

Dans les calculs suivants, la convergence de l'implémentation numérique a été vérifiée en comparant des résultats pour différentes résolutions. Cette partie nécessite une résolution plus importante que pour la partie précédente, puisque la vitesse utilisée est de plus petite échelle et dépend maintenant du temps. On rapporte ici des résultats obtenus avec une résolution de $150 \times 150 \times 128$. Un cas test réalisé pour une résolution de $200 \times 200 \times 256$ n'a montré aucune différence significative sur les résultats, ce qui prouve la convergence numérique de ces travaux. On s'intéresse tout d'abord à la situation correspondant au cas de la contra-rotation exacte. Il nous faut également choisir des valeurs pour les deux autres paramètres libres de l'écoulement : on prend ici $\kappa = 1$ et $\zeta = 20$, ce qui correspond à une taille typique pour les tourbillons d'un cinquième de la taille totale du cylindre, et une amplitude du même ordre de grandeur que le champ moyen. Ces paramètres sont assez proches de ce qui est attendu dans l'expérience, bien qu'il n'y ait pas de mesures exactes de ces paramètres.

La figure 3.5 montre le taux de croissance des différents modes magnétiques en fonction du nombre de Reynolds magnétique. On peut y voir que le premier mode à devenir instable est le dipole axial (3.6).

Ce mode axisymétrique bifurque pour une valeur de $Rm = 35$ pour les valeurs des paramètres choisies. Cette structure magnétique est engendrée par la présence des tourbillons de vitesse, basés sur le nombre azimutal $m = 8$. En accord avec le théorème de Cowling, le champ magnétique n'est donc pas totalement axisymétrique mais possède également de l'énergie sur le mode $m = 8$, à cause de l'advection du champ par les tourbillons. Cette structure est oscillante au cours du temps, et disparaît sur un moyennage de quelques temps advectifs. Cela signifie qu'une telle structure, si elle existe au sein de l'expérience, est très instationnaire, et la préci-

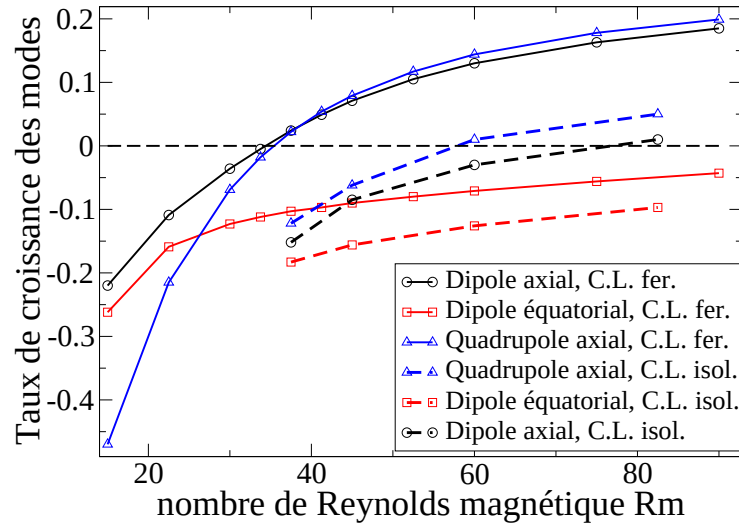


FIG. 3.5: Évolution du taux de croissance linéaire des modes magnétiques lorsque l'on augmente Rm , en contra-rotation exacte. Avec des conditions aux limites ferro-magnétiques, on montre le dipole axial (cercles). Triangles : quadrupole axial. Carrés : dipole équatorial. Les traits en pointillés indiquent les calculs dans le cas de conditions aux limites isolantes.

sion des mesures ne permet pas actuellement de la mesurer. La prise en compte des fluctuations de vitesse a également un deuxième effet frappant. Sur la figure 3.5, on voit que le dipole équatorial a un taux de croissance négatif dans l'éventail de Rm exploré ici. Cette situation tranche nettement avec les résultats de la section précédente. On est en présence d'un cas où les fluctuations autour d'un champ de vitesse moyen sont capables d'engendrer un champ magnétique complètement différent de celui engendré par l'écoulement moyen. De plus, ces fluctuations s'opposent à l'effet du champ moyen, puisque le seuil d'instabilité du dipole équatorial est repoussé assez loin. En l'absence de fluctuations (pour $\kappa = 0$) ce mode bifurque au contraire pour $Rm_c = 45$. Une autre information est également présente sur cette courbe. On voit que le mode quadrupolaire devient linéairement instable pour des Rm relativement faibles, les seuils des deux modes axiaux (dipole et quadrupole) étant assez proches. Le quadrupole présente ici un seuil plus haut que le dipole, et n'est pas présent lorsque l'on est près du seuil de l'instabilité dynamo. Dans l'expérience VKS, en contra-rotation exacte, le quadrupole n'a jamais été observé, tout comme le dipole équatorial. En revanche, lorsque les disques tournent à des vitesses différentes, la structure du champ magnétique se modifie et peut être interprétée comme une transformation du dipole en un mode mixte impliquant le quadrupole. On voit également que lorsque le nombre de Reynolds magnétique est suffisamment grand, le taux de croissance du quadrupole est supérieur au taux de croissance du dipole. La figure 3.7 montre un instantané des lignes de champ magnétique du mode instable pour une simulation à $Rm = 75$, lorsque le quadrupole est le mode dominant.



FIG. 3.6: Lignes de champ magnétique pour $Rm = 35$. Le champ est principalement un dipole axial. En plus de la composante axisymétrique, on reconnaît la présence du mode $m = 8$ près des disques.

Ces différents résultats (inhibition du dipole équatorial, génération d'un dipole axial à $Rm \sim 30$) présentent d'intéressantes similitudes avec l'expérience VKS. La figure 3.8 permet de comparer la structure du dipole axial de ces simulations avec le champ magnétique observé dans l'expérience. On y compare les profils radiaux des trois composantes du champ pour $Rm = 37$, à un z donné, proche des disques. Il apparaît clairement une similitude entre les valeurs relatives des trois composantes en fonction de la distance à l'axe. Dans les deux cas, on note la prédominance du champ toroïdal dans une grande partie du domaine. Il ne s'agit pas de données brutes : dans le cas de la simulation numérique, le champ magnétique a été moyenné selon la direction ϕ , éliminant ainsi la composante $m = 8$. Dans le cas des données expérimentales, il s'agit de données moyennées dans le temps sur plusieurs temps résistifs, en raison du caractère très fluctuant du champ magnétique. Un moyennage temporel plutôt que dans la direction ϕ des données numériques conduit au même résultat, puisque les perturbations magnétiques $m = 8$ sont instationnaires. Il existe également certaines différences avec le champ expérimental. Par exemple, la coupe de la figure 3.9 montre que le champ magnétique toroïdal est très faible dans le plan médian du cylindre, ce qui n'est pas le cas dans l'expérience réelle.

Ces différents résultats, et la similitude avec l'expérience, apportent une confir-



FIG. 3.7: Lignes de force du champ magnétique pour $Rm = 75$. Le champ est principalement un quadrupole axial. En plus de la composante axisymétrique, on reconnaît la présence du mode $m = 8$ près des disques.

mation du mécanisme proposé par Pétrélis et al, qui suggère que les perturbations non-axisymétriques près des disques sont responsables de la génération du champ magnétique dans l'expérience VKS, via un processus $\alpha - \omega$. Ces résultats numériques illustrent également la compétition qui peut exister entre l'écoulement moyen et les fluctuations autour de cet écoulement : les perturbations sont capables d'inhiber le dipole équatorial due au champ moyen et produisent une structure différente. En fait la relation entre fluctuations et écoulement moyen est probablement plus subtil qu'une simple compétition entre deux mécanismes d'instabilité. Par exemple, si on annule complètement le champ moyen, en imposant $\mathbf{U} = 0$ dans l'expression 3.24, les perturbations seules ne sont pas capables d'engendrer une dynamo. Le champ moyen contribue notamment à l'effet dynamo à travers la forte rotation différentielle nécessaire à l'effet ω . La circulation méridionale peut également jouer un rôle dans les dynamos $\alpha - \omega$ stationnaire.

Dans une étude de Laguerre et al [43] (voir également l'erratum [42]), ainsi que dans un travail ultérieur de Giesecke et al [24], un résultat complètement différent a été trouvé. Les auteurs utilisent une paramétrisation de l'équation d'induction à l'aide d'un terme α représentant l'effet de l'écoulement dû aux pales. Dans ce cas, le terme α nécessaire pour obtenir un effet dynamo à un seuil raisonnable

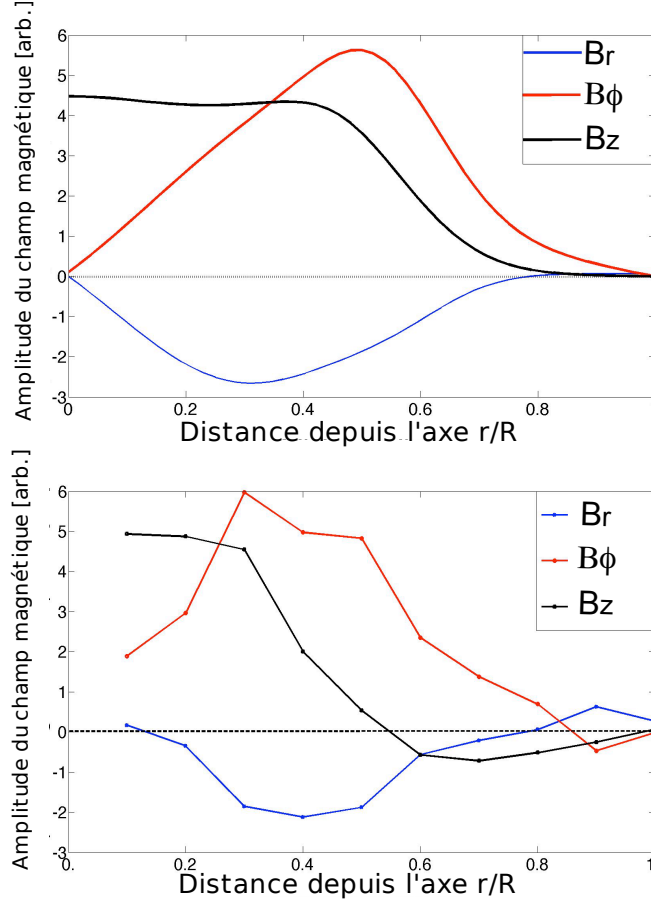


FIG. 3.8: Comparaison de la structure des modes obtenus dans les simulations numériques et l'expérience. On montre les profils radiaux des trois composantes, pour $z = 0.8$. En haut : profil numérique. En bas : profil expérimental. On note la similitude entre les deux modes magnétiques.

est supérieur de plusieurs ordres de grandeurs à toute valeur réaliste basée sur l'expérience VKS. Dans une étude plus récente, Giesecke et al [25] ont complété ces résultats en montrant qu'une modulation spatio-temporelle de la perméabilité magnétique près des disques diminue la valeur du terme α nécessaire à la génération de la dynamo. Les résultats présentés dans cette thèse suggèrent au contraire que la prise en compte d'une vitesse explicite suffit à obtenir le bon ordre de grandeur pour le seuil de l'instabilité. La différence des conclusions entre les deux approches n'est cependant pas vraiment surprenante puisqu'il n'existe aucune relation claire entre un écoulement hélicitaire 3D (comme celui donné par les expressions 3.28, 3.29 par exemple), et l'amplitude du terme α d'une approche de champ moyen. En particulier, dans ces études de champ moyen, seule la composante $\alpha_{\phi\phi}$ du tenseur est non nulle, ce qui est difficilement justifiable. Nous discutons au prochain paragraphe le rôle plus simple que peuvent jouer les conditions ferromagnétiques sur la diminution du seuil dynamo.

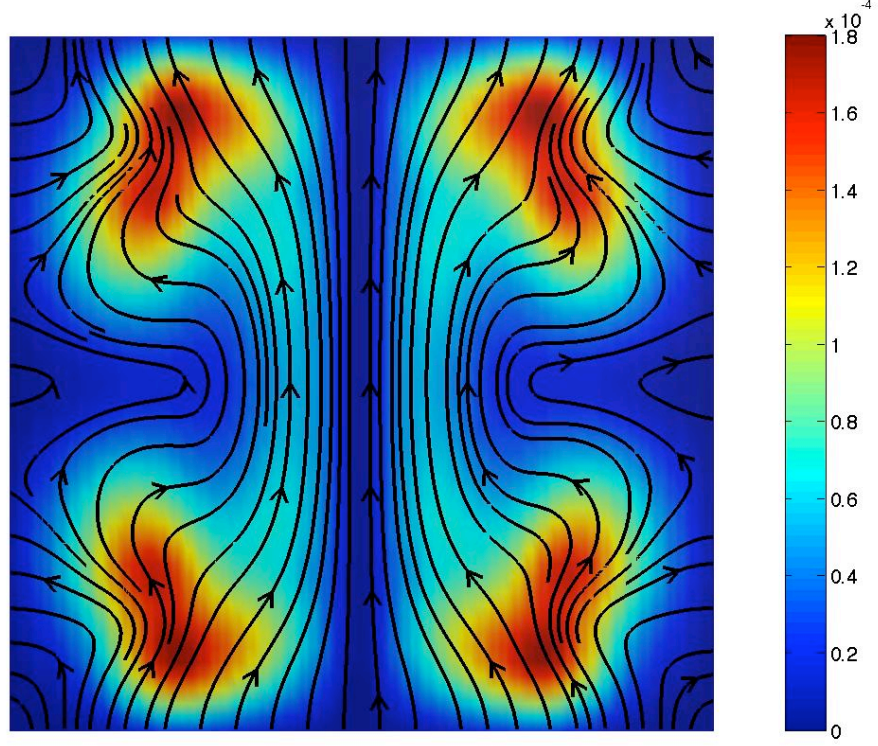


FIG. 3.9: Coupe dans un plan (r, z) du champ magnétique pour $Rm = 35$ et $C = 0$. Il s'agit de la partie axisymétrique du champ uniquement. Les lignes de champ font clairement apparaître un B_z dominant près de l'axe, tandis que le code de couleur indique B_ϕ . La structure est clairement dipolaire.

Effets des conditions aux limites ferromagnétiques

Nous avons également cherché à décrire dans cette étude l'effet des conditions aux limites magnétiques sur l'instabilité dynamo. Il est en particulier important d'étudier le rôle des conditions ferromagnétiques dans une situation où le dipole axial est instable. Sur la figure 3.5, les courbes en pointillé indiquent l'évolution du taux de croissance des modes dans le cas où le raccordement à un champ potentiel est utilisé comme conditions aux limites, tandis que les courbes précédemment discutées dans cette section, en traits continus, correspondent au cas ferromagnétique. Pour simplifier la discussion, on ne montre que des cas où les conditions sont identiques sur les couvercles et sur le côté du cylindre. On voit que sans l'utilisation d'un matériau ferromagnétique, les seuils dynamo sont beaucoup plus importants, et situés dans une zone de Rm qu'il n'est pas possible d'atteindre expérimentalement. On notera que dans le cas de conditions aux limites isolantes, le quadrupole devient le mode le plus instable, avec un seuil $Rm \sim 58$, tandis que le taux de croissance du mode dipolaire est positif pour $Rm > 77$. La figure 3.10 montre des coupes méridionales des modes

magnétiques observés. Cette modélisation de l'effet d'un domaine ferromagnétique ne repose que sur un changement géométrique des lignes de champ près des parois, comme nous l'avons vu à la section précédente. En particulier, on ne décrit pas l'effet d'une possible rémanence ou aimantation des disques. De la même manière, aucune modulation spatiale de la perméabilité magnétique n'est introduite, contrairement à l'étude de Giesecke et al [25]. On obtient ainsi une explication simple sur le rôle des disques ferromagnétiques dans l'expérience VKS et de la manière dont ils conduisent à la génération d'un effet dynamo.

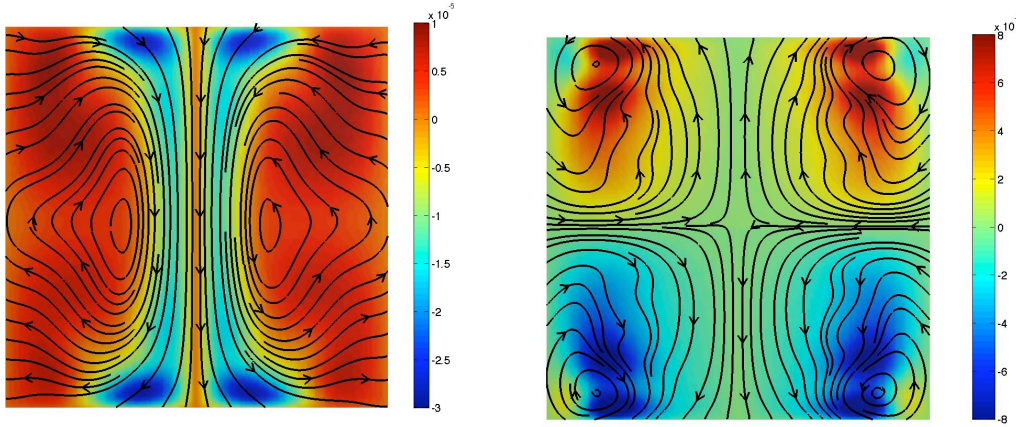


FIG. 3.10: Coupe dans un plan (r, z) du champ magnétique pour $Rm = 100$ et $C = 0$, avec des conditions aux limites isolantes. Il s'agit de la partie axisymétrique du champ uniquement. A gauche : composante dipolaire du champ magnétique. A droite : composante quadrupolaire (mode le plus instable). On notera la différence avec la structure observé dans le cas de conditions ferromagnétiques (voir la figure 3.9).

Régime oscillant

Dans l'expérience VKS, nous avons déjà mentionné que différents comportements dynamiques sont observés lorsque les fréquences de rotation des deux disques sont différentes : oscillations, bouffées intermittentes ou renversements chaotiques du champ dipolaire. Cette richesse de comportement est intéressante à plusieurs points de vue. Premièrement, peu d'instabilités présentent autant de régimes dynamiques dans un espace si restreint des paramètres, et cela peut permettre de mieux comprendre les phénomènes d'instabilité en général. De plus, ces différents régimes couvrent un éventail de comportements observés dans différents objets naturels, comme le Soleil ou la Terre. Il est donc capital de bien comprendre comment ces régimes sont créés. Au voisinage de ces régimes dépendants du temps, les mesures expérimentales suggèrent que le mode stationnaire est, à grande échelle, transformé d'un dipole pur vers une structure quadrupolaire. Ces résultats ont récemment été

compris dans la perspective du modèle simple présenté au chapitre 2, et les simulations s'imposent comme un outil naturel pour tester ce modèle. Dans l'expérience VKS, les régimes de renversement du champ se produisent lorsqu'un disque tourne plus vite que l'autre, brisant ainsi la symétrie R_π de l'écoulement de von Kármán. Comme pour la description des tourbillons, il existe plusieurs manières d'implémenter cette situation dans notre écoulement analytique. Une fois encore, nous cherchons une description simple. On ajoute donc un champ de vitesse supplémentaire, c'est-à-dire que l'on implémente la vitesse : $\mathbf{U}' = \mathbf{U} + C\mathbf{W}$, défini par

$$W_r = \frac{\pi}{4} r(1-r)^2 (1+2r) \sin(\pi z/2) , \quad (3.30)$$

$$W_\phi = 6r(1-r) , \quad (3.31)$$

$$W_z = (1-r)(1+r-5r^2) \cos(\pi z/2) . \quad (3.32)$$

Il s'agit d'une représentation du champ moyen correspondant au disque situé en $z = +1$ tournant tout seul. Le paramètre C contrôle la déviation à la contra-rotation ($C = 0$), et représente la différence entre les fréquences de rotation des deux disques. Enfin, il paraît assez naturel que la composante non-axisymétrique du champ soit également affectée par la brisure de symétrie. On utilise la transformation suivante : $\omega_1 = \omega_1(1+C)$ et $\kappa = \kappa(1+C)$ lorsque $z > 0$. La figure 3.11 montre une coupe dans le plan (r, z) du champ de vitesse $\mathbf{W}$.

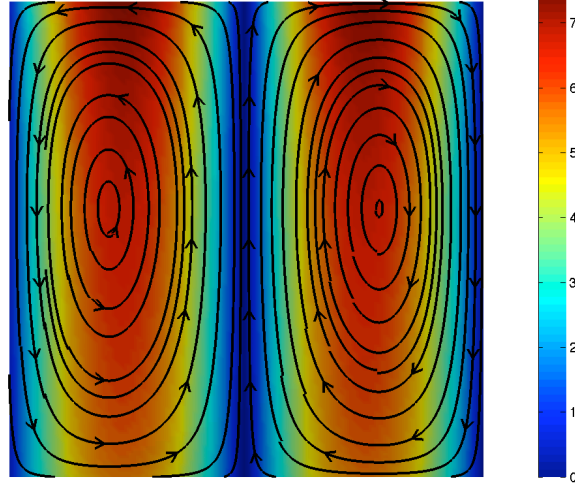


FIG. 3.11: Champ de vitesse $\mathbf{W}$ illustré par une coupe dans le plan (r, z) . Les lignes indiquent la circulation poloïdale tandis que le code de couleur représente l'intensité de la vitesse selon la direction ϕ

La symétrie de l'écoulement est essentielle puisque dipole et quadrupole, qui se transforment différemment sous R_π , se découpent linéairement tant que le système respecte cette symétrie. C'est pourquoi on observe sur la figure 3.5 que les modes dipolaire et quadrupolaire présentent des taux de croissances proches mais distincts, le mode neutre étant un champ dipolaire. Au contraire, lorsque l'écoulement brise

cette symétrie, dipole et quadrupole sont linéairement couplés, le rapport entre les deux composantes étant fixé par l'intensité de la brisure de symétrie. La figure 3.12

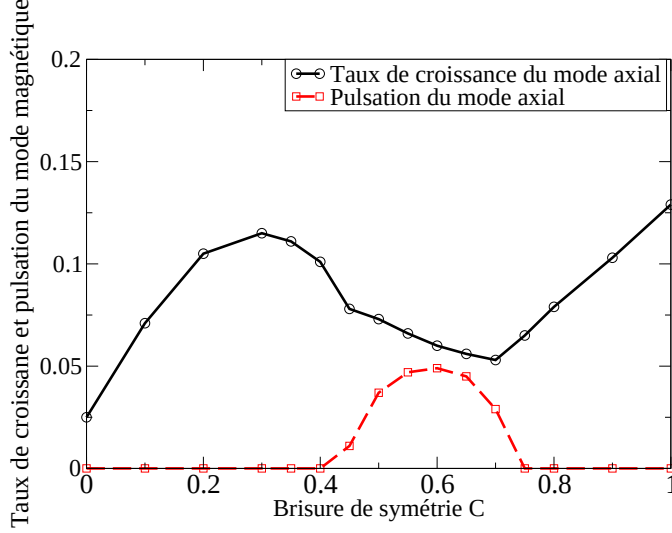


FIG. 3.12: Évolution du taux de croissance et de la pulsation du mode magnétique instable lorsque la symétrie R_π est brisée. En noir : partie réelle du taux de croissance du mode. En rouge : partie imaginaire. On voit nettement la bifurcation noeud-col se produisant à $C = 0.4$

montre l'évolution du taux de croissance du mode axial lorsque l'on augmente le paramètre C représentant la brisure de la symétrie et l'écart à la contra-rotation exacte. On démarre depuis $Rm = 35$ et $C = 0$, puis on effectue plusieurs simulations en augmentant progressivement C jusqu'à $C = 1$. Pour $C = 0$, le mode instable est purement dipolaire puisque les deux familles se découplent. Lorsque $C \neq 0$, le mode instable est une combinaison de dipole et de quadrupole et on voit que le taux de croissance du mode s'en trouve affecté. Il est important de souligner que nous ne pouvons décrire par intégration temporelle que le mode le plus instable sans utiliser une technique appropriée. La brisure de symétrie affecte également l'évolution du mode initialement quadrupolaire, devenant également un mode mixte dipole-quadrupole. Toutefois, le couplage des deux familles de champ rend impossible de suivre numériquement l'évolution du mode le plus stable. Il existe une valeur critique $C = 0.4$ pour laquelle le système bifurque vers un régime oscillant. Ceci correspond à un changement dans la nature des taux de croissance linéaire du problème, où les deux valeurs propres réelles (correspondant aux deux solutions stables et instables) se transforment en valeurs propres complexes conjuguées. Ces résultats illustrent le modèle de renversement décrit à la fin du chapitre 2, où l'évolution des modes près du seuil d'instabilité, dans le régime linéaire peut être décrite par [66]

$$\dot{D} = \alpha(C)D + \beta(C)Q, \quad (3.33)$$

$$\dot{Q} = \gamma(C)D + \delta(C)Q. \quad (3.34)$$

$$(3.35)$$

où les points représentent la dérivée temporelle. Les valeurs propres λ_i d'un tel système sont données par $2\lambda_i = \alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}$. Lorsque les deux disques tournent à la même fréquence, β et γ doivent s'annuler en raison des arguments de symétrie déjà évoqués. On obtient alors deux modes découplés correspondant à deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 = \alpha$ et $\lambda_2 = \delta$. Pour $C \neq 0$, lorsque le produit $\beta\gamma$ est négatif et suffisamment important, λ_1 et λ_2 deviennent complexes conjuguées et le système bifurque vers un régime oscillant. Le scénario simple décrit ici est exactement ce qui est observé dans les simulations numériques présentées dans cette section. La pulsation du mode oscillant est indiquée en rouge sur la figure 3.12. On peut y voir qu'au point de bifurcation cette pulsation est nulle, indiquant une divergence de la période d'oscillation au seuil de la bifurcation. Un comportement intéressant peut être noté concernant ce régime oscillant : on voit que ces renversement périodiques du champ magnétique ne se produisent que dans une région restreinte de l'espace des paramètres, c'est-à-dire pour $0.4 < C < 0.75$. Cela montre que la relation entre notre paramètre de contrôle C et les paramètres du modèle peuvent être assez compliqués. Ce comportement se produit également dans le cas de l'expérience VKS, où l'ensemble des régimes dynamiques dépendants du temps (oscillations périodiques, renversements chaotiques, bouffées intermittentes,...) n'apparaissent que dans de petites 'poches' de l'espace des paramètres.

La figure 3.13 montre une évolution temporelle typique d'une simulation dans le régime oscillant. Puisqu'il s'agit ici d'une simulation cinématique, le champ ne sature pas et la croissance exponentielle rend difficile l'observation des oscillations. On montre une simulation effectuée très proche de la criticalité ($Rm = 30, C = 1.6$), afin que la croissance exponentielle reste très faible. Ces oscillations illustrent bien la compétition entre dipole et quadrupole. On voit en particulier que les deux composantes sont en quadrature de phase, comme prévu par le modèle d'équation 3.35. Une conséquence importante de ce résultat est que le champ magnétique extérieur a tendance à changer de forme durant un renversement, plutôt que de simplement s'annuler.

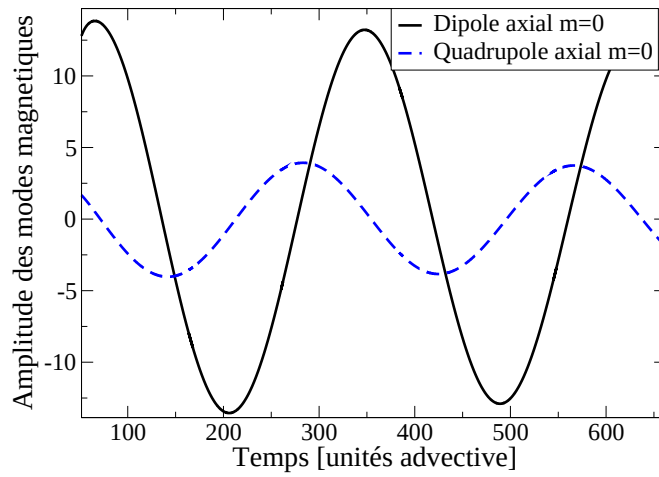


FIG. 3.13: Évolution temporelle du système dans le régime oscillant, pour $Rm = 30$ et $C = 1.6$. Le système est proche de la stabilité marginal, la croissance exponentielle n'est donc pas visible.

Chapitre 4

Modélisation dynamique

Contents

4.1	Introduction	99
4.2	Méthode numérique	101
4.2.1	Présentation du code <i>PaRoDy</i>	101
4.2.2	Décomposition poloïdale-toroïdale	101
4.2.3	Implémentation numérique	102
4.3	Simulations numériques en régime laminaire	106
4.3.1	Dynamos laminaires	109
4.3.2	Dynamique non-linéaire	111
4.3.3	Modélisation dynamique de basse dimensionalité	120
4.4	Dynamos turbulentes	126
4.4.1	Étude hydrodynamique	126
4.4.2	Structure de la dynamo turbulente	129
4.4.3	Dynamique de renversements	136

4.1 Introduction

Le chapitre précédent a mis en évidence une certaine compétition entre plusieurs modes magnétiques. D'une part un dipole équatorial est engendré par le champ de vitesse moyen de l'écoulement. D'autre part, la prise en compte des fluctuations de vitesses non-axisymétriques et dépendantes du temps conduit à un mode axial stationnaire, avec une composante dominante axisymétrique. Nous avons également pu voir que briser une symétrie de l'écoulement peut conduire à des comportements dynamiques plus riches, comme un régime oscillant impliquant une interaction avec un mode quadrupolaire. Ces derniers résultats sont en bon accord avec les observations expérimentales, et la simplicité de l'approche permet une interprétation claire. Nous avons ainsi pu esquisser les principaux mécanismes à l'oeuvre dans l'expérience VKS.

Cette simplicité de la modélisation nous a conduit à négliger de nombreux aspects physiques du problème. En particulier, le code numérique utilisé au chapitre précédent ne permet pas d'étudier un régime dynamique. Il est nécessaire d'avoir une situation plus réaliste, où la vitesse est une solution de l'équation de Navier-Stokes, prenant en compte la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement via la force de Laplace. Cela conduit à une saturation du champ magnétique, et le problème devient non-linéaire. Dans ce chapitre, nous utiliserons donc un code numérique plus complet, qui résout les équations complètes de la magnétohydrodynamique. Nous étudierons ainsi l'effet des fluctuations turbulentes sur l'instabilité dynamo, les interactions qui peuvent exister entre les différents modes magnétiques et la dynamique non-linéaire qui en résulte. Ce chapitre sera également l'occasion de comprendre les mécanismes impliqués dans les renversements chaotiques du champ magnétique.

Le code numérique utilisé dans ce chapitre repose sur une géométrie sphérique. Ce changement de géométrie peut paraître inadapté à une étude en relation avec l'expérience VKS. Notre modélisation est de ce fait plus proche de l'expérience de Madison par exemple. Si la structure détaillée des modes magnétiques dépend de la géométrie du domaine conducteur, nous verrons que leur dynamique dépend de caractéristiques telles que la symétrie du forçage, mais semble largement indépendant de la géométrie considérée.

4.2 Méthode numérique

4.2.1 Présentation du code *PaRoDy*

Afin d'étudier les équations de la magnétohydrodynamique dans leur intégralité, j'ai eu à ma disposition le code numérique *PaRoDy*, initialement développé par Emmanuel Dormy, puis parallélisé en collaboration avec V. Morin et J. Aubert [18]. Ce code est relativement puissant, mais a été développé dans le contexte de la dynamo terrestre. Dans sa version initiale, le code intègre la rotation de la sphère externe, l'équation de température, ou encore la présence d'une graine interne. Par conséquent, certaines modifications ont dû être apportées au code afin de pouvoir l'appliquer au problème des dynamos expérimentales. Puisque *PaRoDy* est un code reposant sur un domaine d'intégration sphérique, une différence supplémentaire vient de la géométrie elle-même, qui ne peut être modifiée sans réécrire l'intégralité du schéma numérique. L'utilisation d'une géométrie sphérique permet en outre de faire des comparaisons directes avec la géométrie cylindrique, mais également d'étudier d'autres configurations expérimentales, comme l'expérience de Madison.

PaRoDy permet de résoudre le problème magnétohydrodynamique complet, c'est-à-dire à la fois l'équation d'induction mais également l'équation de Navier-Stokes, cette dernière équation étant couplée à la première par la force de Laplace. Dans la version modifiée du code que j'ai développé durant cette thèse, le fluide conducteur incompressible est entraîné par un forçage volumique dans une sphère pleine sans rotation. Dans cette section, nous ne décrivons que très brièvement le code numérique et le lecteur est invité à lire la thèse d'Emmanuel Dormy pour une description plus complète [17] de Parody.

4.2.2 Décomposition poloïdale-toroïdale

la géométrie sphérique de Parody nous conduit à décomposer les équations vectorielles sur une base de deux potentiels scalaires. Cette décomposition permet de prendre en compte le caractère solénoïdal des champs de façon implicite, mais également d'éliminer le gradient de pression du système. La décomposition est la suivante

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge (\mathbf{r}B_T) + \nabla \wedge \nabla \wedge (\mathbf{r}B_P) , \quad (4.1)$$

$$\mathbf{V} = \nabla \wedge (\mathbf{r}V_T) + \nabla \wedge \nabla \wedge (\mathbf{r}V_P) , \quad (4.2)$$

l'indice P indique la composante poloïdale tandis que l'indice T indique la composante toroïdale. Cette décomposition en poloïdal/toroïdal, également appelée décomposition de Mie, a déjà été mentionnée dans le chapitre d'introduction. Cette décomposition s'avère utile car chacun des deux scalaires va pouvoir être exprimé à

l'aide d'un ensemble de fonctions complexes $Y_l^m(\theta, \phi)$, les harmoniques sphériques, définies par

$$Y_l^m(\theta, \phi) = C_l^m P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi} , \quad (4.3)$$

où C_l^m est une constante de normalisation et P_l^m est le polynôme de Legendre associé de degré l et d'ordre m . Ces harmoniques sphériques sont orthogonales deux à deux et offrent une base naturelle pour décrire les composantes poloïdales et toroïdales des champs vectoriels. Ceci est dû au fait que ces harmoniques sphériques sont les fonctions propres de l'opérateur L_2 , vérifiant

$$L_2 Y_l^m = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \phi^2} = l(l+1) Y_l^m . \quad (4.4)$$

Ceci s'avère très intéressant pour exprimer le laplacien d'une fonction f mise sous la forme $f(\mathbf{r}) = F(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ puisque

$$\Delta(F(r) Y_l^m(\theta, \phi)) = Y_l^m(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} F(r) \right) - l(l+1) F(r) \right] . \quad (4.5)$$

L'équation de Navier-Stokes ainsi que l'équation d'induction comportent des parties traitant la diffusion des champs. Ce traitement en harmoniques sphériques basé sur la décomposition de Mie facilite grandement la résolution des termes linéaires. Notons que l'on peut toujours se ramener à l'espace physique classique par la transformation suivante

$$V_r = \frac{1}{r} L_2(V_p) , \quad (4.6)$$

$$V_\theta = \frac{\partial V_s}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_t}{\partial \phi} , \quad (4.7)$$

$$V_\phi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_s}{\partial \phi} - \frac{\partial V_t}{\partial \theta} . \quad (4.8)$$

En projetant les équations sur la base des harmoniques sphériques, on obtient une expression matricielle simple pour tous les termes linéaires, et l'on peut donc les traiter implicitement en temps.

Le lecteur attentif aura noté que cette décomposition s'effectue sur les angles pour une sphère à un rayon donné. A cause de cela, il reste à calculer la partie du Laplacien qui dépend de r . Pour cela, le code est discrétisé sous forme de sphères concentriques, qu'il va falloir relier entre elles par un schéma numérique. Dans Parody, ce calcul est effectué par un schéma aux différences finies.

4.2.3 Implémentation numérique

Dans certains codes de dynamos sphériques, une méthode spectrale utilisant comme base les polynômes de Chebyshev dans la direction radiale est utilisée. Pour le code Parody, il a été préféré un schéma aux différences finies afin de pouvoir

paralléliser efficacement les calculs. On utilise donc un schéma aux différences finies centrées, écrit directement sur une grille régulière et reposant simplement sur un développement de Taylor classique.

De nos jours, le développement des outils informatiques permet que des calculs complexes puissent être effectués par plusieurs processeurs en même temps, qui co-opèrent afin de réduire le temps de calcul. Le schéma aux différences finies offre une telle opportunité, puisque chaque coquille sphérique est décomposée en harmoniques sphériques avec des coefficients indépendants. Chaque processeur peut ainsi calculer la valeur des champs sur une coquille à chaque pas de temps, puis communiquer brièvement avec les processeurs des coquilles voisines. Si la résolution est importante, et si la communication entre processeurs est suffisamment rapide, le calcul est effectué en un temps plus rapide que s'il était effectué par un seul processeur. Évidemment, si le nombre de processeurs est trop grand par rapport à la résolution, le système passe plus de temps dans la communication entre processeurs plutôt qu'à effectuer le calcul. Il y a donc, pour chaque code parallèle, une loi d'échelle donnant l'efficacité de la parallélisation en fonction de la résolution utilisée. La totalité des calculs numériques présentés dans ce chapitre sont des calculs parallèles réalisés sur le supercalculateur CEMAG du Laboratoire de RadioAstronomie, au centre de calcul de l'IDRIS, ou au centre de calcul du CEA. Le nombre de processeurs utilisés en parallèle pour un calcul donné varie entre 4 et 64.

Une fois le calcul des termes linéaires effectué, il reste à calculer les termes non-linéaires. Ces termes sont calculés dans l'espace physique, puis transférés dans l'espace spectral. Il faut noter que lorsque le nombre d'harmoniques devient suffisamment important, cette partie de la résolution numérique du code occupe la quasi-totalité du temps de calcul. Ceci s'explique en partie par le fait que des transformées de Legendre sont utilisées à chaque transition entre espace physique et espace spectral. Nous venons de décrire les différentes étapes menant à la résolution des équations de la MHD dans l'espace. Il faut ensuite intégrer ces équations dans le temps, afin de simuler l'évolution des champs cinétique et magnétique. Ces équations sont intégrées par un schéma aux différences finies de type semi-implicite Crank-Nicholson pour la diffusion, et Adams-Bashforth du second ordre pour les termes non-linéaires. La partie diffusive présente l'avantage d'utiliser un algorithme inconditionnellement stable, tandis que le schéma d'Adams-Bashforth est conditionnellement stable. Dans ce cas, la stabilité est déterminée de façon empirique pour une simulation donnée, dépendant du problème et de l'adimensionnement utilisé.

Enfin, la dernière étape nécessaire au bon fonctionnement de ce code est l'implémentation de conditions aux limites, à la fois pour le champ de vitesse et pour le champ magnétique. Regardons tout d'abord les conditions aux limites sur la sphère externe. En ce qui concerne la vitesse, et étant donné le problème étudié durant cette thèse, il est clair que nous allons utiliser le cas de déplacement nul ('no slip')

du fluide sur la paroi. Cette condition se traduit dans l'espace spectral par

$$V_p = 0 , \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial V_p}{\partial r} = 0 , \quad (4.10)$$

$$V_t = 0 . \quad (4.11)$$

Pour le champ magnétique, deux types de conditions aux limites peuvent être envisagés. La condition la plus simple est celle qui consiste à considérer un isolant à l'extérieur de la sphère, c'est-à-dire que le champ magnétique satisfait l'équation (pour $r > R$)

$$\mathbf{B} = -\nabla\Phi , \quad (4.12)$$

$$\Delta\Phi = 0 . \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

Dans ce cas, le champ magnétique et la composante radiale de $\nabla \times \mathbf{B}$ sont continus à la frontière avec l'extérieur. Par continuité, on impose que la composante toroïdale du champ est nulle, et que la composante poloïdale et sa dérivée sont continues. Cela nous fournit des conditions suffisantes pour conclure. Pour cela, il faut remarquer que la dérivabilité du champ magnétique nous permet d'écrire $(B_p)_l^m \sim \frac{1}{r^{(l+1)}}$. Dans la limite d'un milieu extérieur isolant, les conditions aux limites magnétiques sont donc

$$\frac{\partial}{\partial r}(B_p)_l^m + \frac{(l+1)}{r}(B_p)_l^m = 0 , \quad (4.15)$$

$$(B_t)_l^m = 0 . \quad (4.16)$$

On notera que l'usage combiné du formalisme des harmoniques sphériques ainsi que d'un schéma aux différences finies pour la direction radiale permet une expression simple pour ces conditions aux limites, nous évitant entre autres de résoudre l'équation de Laplace dans le milieu extérieur isolant.

Un autre type de conditions aux limites, dont nous avons déjà souligné l'importance au chapitre précédent, est de considérer que la sphère extérieure est un milieu ferromagnétique, de perméabilité magnétique a priori infinie. Dans ce cas, les lignes de champ magnétique tendent à se raccorder perpendiculairement à la surface, signifiant que l'on annule les composantes selon θ et ϕ . Là encore, ces conditions aux limites, une fois transposées dans l'espace spectral s'expriment de manière très simple

$$\frac{\partial}{\partial r}(B_p)_l^m + \frac{1}{r}(B_p)_l^m = 0 , \quad (4.17)$$

$$(B_t)_l^m = 0 . \quad (4.18)$$

Afin de réaliser une étude dans une sphère pleine, réduire numériquement la taille effective de la graine à zéro ne suffit pas. Il faut au contraire supprimer totalement

cette graine du code numérique et trouver de nouvelles conditions aux limites au centre, afin de traiter correctement la singularité centrale introduite par ce système de coordonnées, mais qui n'existe pas physiquement. Ces conditions doivent être choisies avec soin afin d'assurer la régularité de la solution au centre. A cause de la présence d'un opérateur bi-harmonique dans l'équation d'évolution de la composante poloïdale du fluide, le plus haut degré pour la dérivée radiale est d'ordre 4. En plus des deux conditions imposées sur la sphère externe, il nous faut donc encore deux conditions sur V_P au centre (une seule suffisant pour V_T). Lorsque $r \rightarrow 0$, la régularité de $\mathbf{V}$ et $\nabla \times \mathbf{V}$ imposent $V_P = 0$ et $V_T = 0$. A partir du développement limité $V_P \sim r^\alpha$ en $r = 0$, on peut remarquer que la régularité de $\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}$ conduit à satisfaire

$$\alpha(\alpha + 1)r^{\alpha-2} - l(l + 1)r^{\alpha-2} \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

lorsque $r \rightarrow 0$. Cette dernière condition est satisfaite pour $\alpha = l$ ou $\alpha > 2$ ($\alpha = -(l + 1)$ impliquant une divergence au centre). En continuant ce raisonnement aux ordres supérieurs (condition de régularité analytique), on note que la condition $\alpha > 2$ est repoussée à $\alpha > 4$, puis $\alpha > 6$, etc. Ainsi, les scalaires poloïdal et toroïdal doivent se comporter près de l'origine comme

$$(V_P(r))_l^m \sim r^l, \quad (4.20)$$

où l est l'indice de l'harmonique sphérique considérée. Numériquement, on voit que la façon d'imposer ce qui précède va différer selon la valeur du degré l . Ainsi les conditions de régularité en $r = 0$ pour le champ de vitesse s'expriment de la manière suivante

$$V_P(r = 0) = 0, \quad V_T(r = 0) = 0, \quad \frac{\partial V_P(r = 0)}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } l > 1 \quad (4.21)$$

$$V_P(r = 0) = 0, \quad V_T(r = 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 V_P(r = 0)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{pour } l = 1 \quad (4.22)$$

Ces conditions aux limites nous ont permis de décrire tout écoulement général passant à travers le centre de la sphère. L'équation d'induction, plus simple, n'implique qu'une dérivée d'ordre 2 au plus haut degré. Deux conditions seulement sont donc nécessaires pour le champ magnétique pour chaque composante (poloïdale et toroïdale). Les conditions de régularité au centre s'écrivent

$$(B_P)_l^m(r = 0) = 0, \quad (4.23)$$

$$(B_T)_l^m(r = 0) = 0. \quad (4.24)$$

Par ailleurs, le code *PaRoDy* était écrit à l'origine pour étudier des mouvements convectifs (équation thermique) en rotation (force de Coriolis). Ces termes ont été supprimés dans notre étude. Cette présentation simplifiée du code *PaRoDy* permettra donc au lecteur d'avoir une idée générale du type de calculs effectués ici, ainsi que des modifications originales apportées au code durant ce travail de thèse.

4.3 Simulations numériques en régime laminaire

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude numérique de la génération d'un champ magnétique par un écoulement de type von Kármán au sein d'une géométrie sphérique. Les simulations numériques du chapitre précédent et les observations expérimentales de VKS montrent que les fluctuations turbulentes jouent un rôle capital dans cette instabilité dynamo. Le niveau de turbulence est contrôlé par le nombre de Reynolds, et on peut distinguer deux régimes différents selon le degré de turbulence de la simulation : un régime 'laminaire', où l'évolution des champs magnétique et cinétique n'est quasiment pas bruitée, et un régime dit 'turbulent', où les non-linéarités de l'équation de Navier-Stokes font apparaître un comportement chaotique dans le système, ce qui présente l'avantage d'être plus proche des systèmes réels.

Dans les dynamos naturelles en géométrie sphérique, comme les planètes ou les étoiles, le système est très souvent en rotation rapide. Cette caractéristique implique assez naturellement de considérer des systèmes axisymétriques lors de l'élaboration de modèles simples. C'est ainsi que les premiers modèles simplifiés de dynamo proposés furent des modèles utilisant des écoulements axisymétriques, comme les dynamos de Dudley et James. A cause du théorème de Cowling, on ne peut espérer une telle simplification pour le champ magnétique : le théorème de Cowling indique en effet qu'un champ purement axisymétrique ne peut être maintenu par effet dynamo. Toutefois, un champ magnétique avec une partie axisymétrique dominante peut être engendré lorsque des fluctuations non-axisymétriques sont superposées à un champ de vitesse en moyenne axisymétrique. L'expérience VKS est un exemple de système où ce genre de mécanisme semble être à l'oeuvre. Les deux disques coaxiaux de l'expérience engendrent en contra-rotation un champ de vitesse de von Kármán extrêmement turbulent. Malgré cet aspect turbulent, ce champ de vitesse, lorsqu'il est moyenné dans le temps, est axisymétrique. Le champ magnétique engendré est dominé par un dipole axial $m = 0$. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, ceci peut être expliqué en invoquant les fluctuations turbulentes créant un effet α dû à la nature hélicitaire de l'écoulement éjecté près des pales. Dans la première partie de ce chapitre nous mettrons en évidence un mécanisme simple qui permet de créer un champ magnétique principalement axisymétrique à partir d'un forçage axisymétrique.

Nous avons déjà présenté en introduction les équations de la magnétohydrodynamique, sous forme dimensionnée. Il est généralement plus commode d'utiliser des variables adimensionnées, en faisant apparaître les temps et les échelles caractéristiques du problème. Les équations sans dimensions que nous avons utilisé sont

donc

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + Pm \Delta \mathbf{v} + Rm_0^2 \mathbf{F} + Rm_0^2 (\mathbf{J} \times \mathbf{B}), \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B}. \quad (4.26)$$

Dans le code, toute longueur est normalisée par le rayon a de la sphère. De la même manière, le temps caractéristique est un temps de diffusion magnétique tel que $\tau = \mu_0 \sigma a^2$. Dans l'expérience VKS ou l'expérience de Madison, le sodium liquide est mis en mouvement à l'aide de disques ou d'hélices communiquant un pic de vitesse V_d à l'écoulement, relatif à la vitesse du fluide en bord de disque. On utilise cette vitesse pour adimensionner le champ magnétique par $B_0 = \sqrt{\mu_0 \rho} V_d$ et le terme de force volumique par $F_0 = \rho V_d^2 / a$. Nous avons choisis d'implémenter un terme de forçage volumique dans l'équation de Navier-Stokes pour reproduire numériquement l'effet des disques. Ce forçage axisymétrique est censé créer un écoulement de von Kármán, tout au moins en régime laminaire. Il s'agit d'un forçage introduit dans un article de Bayliss et al [6] dans le contexte d'une étude numérique de l'expérience dynamo de Madison. Il est de la forme

$$F_\phi = s^2 \sin(\pi s b), \quad (4.27)$$

$$F_z = \varepsilon \sin(\pi s c), \quad (4.28)$$

en utilisant les coordonnées polaires (s, ϕ, z) . Le signe de ce forçage, ici pour les z positifs, est bien entendu de signe opposé pour les z négatifs afin de recréer la situation de contra-rotation de l'expérience. F_ϕ engendre les cellules d'écoulement toroïdal en contra-rotation tandis que F_z assure une recirculation poloïdale. L'écoulement laminaire engendré est axisymétrique. Le forçage n'est appliqué que dans une région restreinte du domaine, pour $0.25a < |z| < 0.65a$, $s < s_0$. Dans les simulations considérées ici, $s_0 = 0.4$, $b^{-1} = 2s_0$ et $c^{-1} = s_0$. L'auto-excitation du champ magnétique est contrôlée par le nombre de Reynolds magnétique $Rm_0 = \mu_0 \sigma a V_d$, tandis que la turbulence hydrodynamique est contrôlée par le nombre de Reynolds $Re_0 = a V_d / \nu$. On introduit également le nombre de Prandtl magnétique, $Pm = \nu / \eta$, représentant le rapport entre les diffusivités cinétique et magnétique. Avec cette adimensionnement, la vitesse dans le code numérique est de l'ordre de Rm_0 , et on effectue la renormalisation $\mathbf{v} = \mathbf{v} / Rm_0$. On peut alors définir, comme dans [6], des nombres de Reynolds mesurés tels que $Rm = Rm_0 \max(\mathbf{v})$ et $Re = Re_0 \max(\mathbf{v})$. Dans les simulations numériques présentée dans cette thèse, comme dans la plupart des simulations MHD en général, Rm est le seul paramètre dont la valeur soit du même ordre de grandeur que dans la réalité. Il est au contraire impossible d'atteindre les niveaux de turbulence correspondant aux Re très élevés des expériences dynamos, ni d'introduire les séparations d'échelles créées par les faibles valeur de Pm dans les métaux liquides.

Ce forçage a été introduit précédemment pour décrire le forçage mécanique due aux hélices contra-rotatives dans l'expérience de Madison. L'écoulement de von

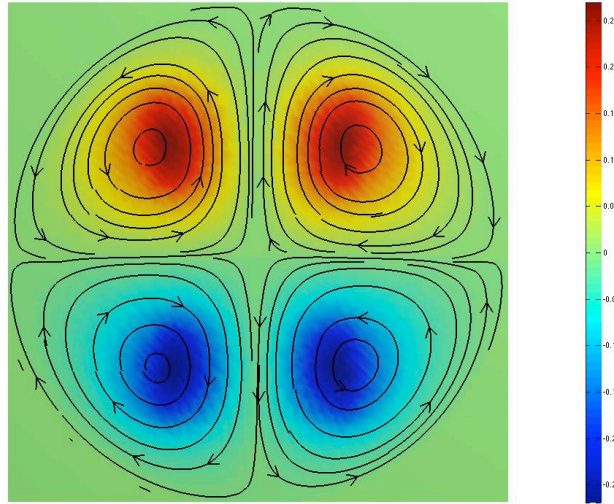


FIG. 4.1: Écoulement créé par le forçage volumique 4.28. Les contours sont les lignes de champ de la vitesse poloïdale tandis que le code de couleur représente la composante toroïdale. Le champ étant axisymétrique, on montre une coupe en $\theta = 0$. Cette image est issue d'une simulation hydrodynamique effectuée à $Re = 70$.

Kármán crée dans la sphère est proche de celui réalisé dans l'expérience du Wisconsin. Il est également relativement similaire à celui de l'expérience VKS, si on oublie les effets de bords. En fait, l'écoulement laminaire crée par un tel forçage est assez général, et est depuis longtemps connu comme étant un écoulement dynamo. Dans l'étude numérique de Dudley et James en 1986, un écoulement $s_2^0 + t_2^0$ similaire à celui créé par le forçage 4.28 est étudié dans le contexte de simulations cinématiques laminares. Les auteurs observent la génération d'un dipole équatorial pour des Rm relativement faibles. La figure 4.1 montre un exemple typique d'écoulement créé par le forçage 4.28. Dans cet exemple l'écoulement est laminaire et axisymétrique.

Dans l'article de Dudley et James, les auteurs définissent également des Rm négatifs, afin de décrire un type particulier d'écoulement. Il s'agit de la situation où le sens de l'écoulement poloïdal est inversé par rapport à ce que l'on vient de décrire. Nous utiliserons une convention similaire en introduisant un nombre de Reynolds négatif, correspondant à inverser le signe de F_z dans le forçage 4.28. C'est l'écoulement qui serait produit en inversant la courbure des pales des hélices dans l'expérience de Madison, ou en rapprochant deux disques troués de sorte que ceux-ci se trouvent quasiment dans le plan médian de l'expérience. Nous verrons que cette configuration présente un certain intérêt.

4.3.1 Dynamos laminaires

L'étude de Dudley et James sur les écoulements laminaires de type $s_2^0 + t_2^0$ ont prédit un champ magnétique de symétrie azimutale $m = 1$. C'est également ce que nous avons pu observer au chapitre précédent, où la prise en compte du champ moyen de von Kármán uniquement conduit toujours à la génération d'un dipole équatorial. Dans notre étude, nous allons voir que la dynamique non-linéaire du système complique la situation.

On observe qu'un champ magnétique est engendré lorsque le forçage, contrôlé par la valeur de Rm , devient suffisamment fort. Dans la région laminaire, on observe un nombre de Reynolds magnétique critique de l'ordre de $Rm \sim 100$, valeur qui dépend du nombre de Reynolds Re de la simulation. La figure 4.2 montre l'évolution typique des différents modes magnétiques et cinétiques au cours du temps pour $Rm = 180$, $Re = 120$. Sur cette figure, on représente l'énergie totale (poloïdale et toroïdale) intégrée sur le volume de la sphère de quelques modes correspondant à différentes symétries azimutales.

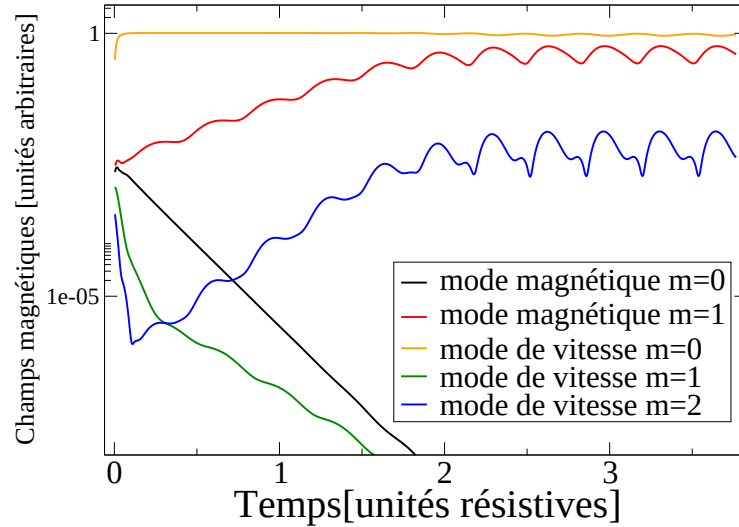


FIG. 4.2: Évolution temporelle typique d'une simulation en régime laminaire, pour $Rm = 180$ et $Re = 120$. On montre l'évolution de l'énergie totale associée à différents modes azimutaux. En rouge, on voit la croissance du dipole équatorial tandis que le champ moyen issu du forçage, en orange, diminue légèrement lors de la saturation. En noir : composante $m = 0$ du champ magnétique. En bleu : composante $m = 2$ de l'écoulement qui apparaît lorsque le dipole équatorial sature.

Au début de la simulation, le champ de vitesse est complètement dominé par

l'écoulement axisymétrique, semblable à celui de la figure 4.1. Cet écoulement, comme prédit par Dudley et James, engendre un champ magnétique fortement non-axisymétrique, de degré azimutal $m = 1$. Ce champ correspond à un dipole équatorial. Une représentation graphique de ce champ magnétique est donné dans la figure 4.3.

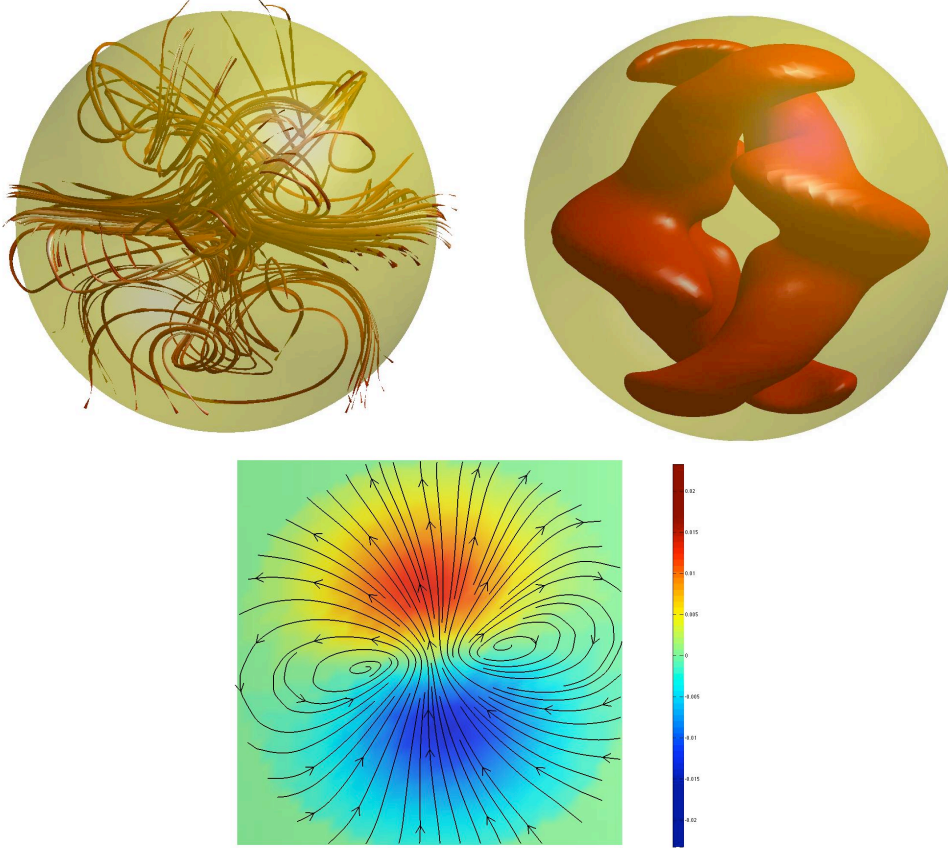


FIG. 4.3: Structure du dipole équatorial engendré par l'écoulement laminaire, pour $Rm = 180$ et $Re = 120$. En haut, à gauche : Lignes de champ magnétique. A droite : isovaleur de l'énergie magnétique (25% de l'énergie maximale). On reconnaît la forme 'banane' caractéristique, relativement similaire au dipole équatorial observé dans les modèles cylindriques. En bas : coupe en $\theta = \pi/2$, dans le plan équatorial. Les contours indiquent les lignes de champ projetées dans le plan et la couleur indique l'intensité du champ magnétique radial.

En général, on observe que le dipole équatorial n'est pas fixé dans une phase angulaire donnée. Selon la région de l'espace des paramètres, le dipole peut explorer aléatoirement différentes phases, ou tourner à vitesse constante dans le plan équatorial. Aux nombres de Reynolds très faibles, ce champ magnétique $m = 1$ bifurque toutefois de manière stationnaire. Sur la figure 4.2, on peut également voir que lorsque ce dipole équatorial sature, il modifie l'écoulement initial en créant une composante de vitesse $m = 2$. Enfin, on note que les autres modes dans la simulation relaxent vers zéro. En particulier, la composante axisymétrique du champ magnétique n'est pas excitée, contrairement aux mesures expérimentales.

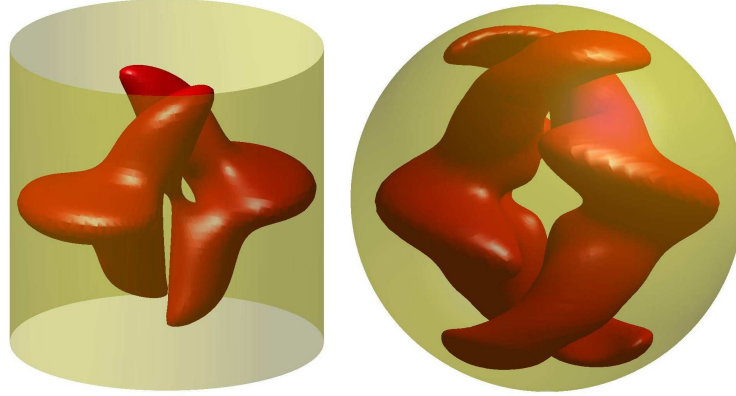


FIG. 4.4: Comparaison du dipole équatorial obtenu dans la simulation sphérique et dans la simulation du code cylindrique. Dans les deux cas, l'isovaleur du champ magnétique (25% de l'énergie max) est très similaire, et typique d'une dynamo engendré par un écoulement $s_2^0 + t_2^0$.

Il est assez surprenant que le dipole équatorial tourne au cours d'une simulation donnée. Si l'on considère les symétries du problème, en particulier l'invariance par rotation autour de l'axe z , on s'attend plutôt à ce que l'angle du dipole varie d'une simulation à une autre. Lorsque le dipole tourne dans un sens plutôt que dans l'autre, cela correspond à une brisure de la symétrie horaire/anti-horaire pour le sens de rotation. Nous verrons par la suite que ceci peut s'expliquer en invoquant l'effet de la force de Laplace, qui agit sur la phase du dipole. Dans certaines simulations, le dipole équatorial subit des renversements périodiques de 180° pour une phase fixée qui varie selon les simulations.

Notons également que cette structure équatoriale est similaire au champ magnétique observé au chapitre précédent, lorsque seul le champ de vitesse moyen est considéré. La figure 4.4 permet d'apprécier la similarité entre les deux champs magnétiques. Cette similarité suggère que si la configuration de l'écoulement est primordiale en ce qui concerne la dynamo, la géométrie du domaine pourrait au contraire n'avoir que peu d'influence sur la structure et la dynamique générale du champ magnétique. Il s'agit d'une observation importante pour justifier notre comparaison entre les résultats numériques de ce chapitre et les observations expérimentales issues de l'expérience VKS.

4.3.2 Dynamique non-linéaire

On voit donc que l'écoulement de von Kármán laminaire n'est pas capable d'engendrer un champ magnétique avec une forte composante axisymétrique, comme cela semble être le cas dans l'expérience VKS. Cette conclusion a déjà été formulée au chapitre précédent, mais la situation est plus complexe ici. En effet, on utilise

une description complète des équations de la MHD, incluant la force de Laplace. L'espace des paramètres est également plus vaste puisque l'on peut à la fois varier Rm et Re . On peut par exemple se demander comment varie le nombre de Reynolds magnétique critique Rm_c de l'instabilité en fonction du nombre de Reynolds Re . La figure 4.5 montre que plusieurs types de structures magnétiques peuvent être engendrés, selon la région de l'espace des paramètres.

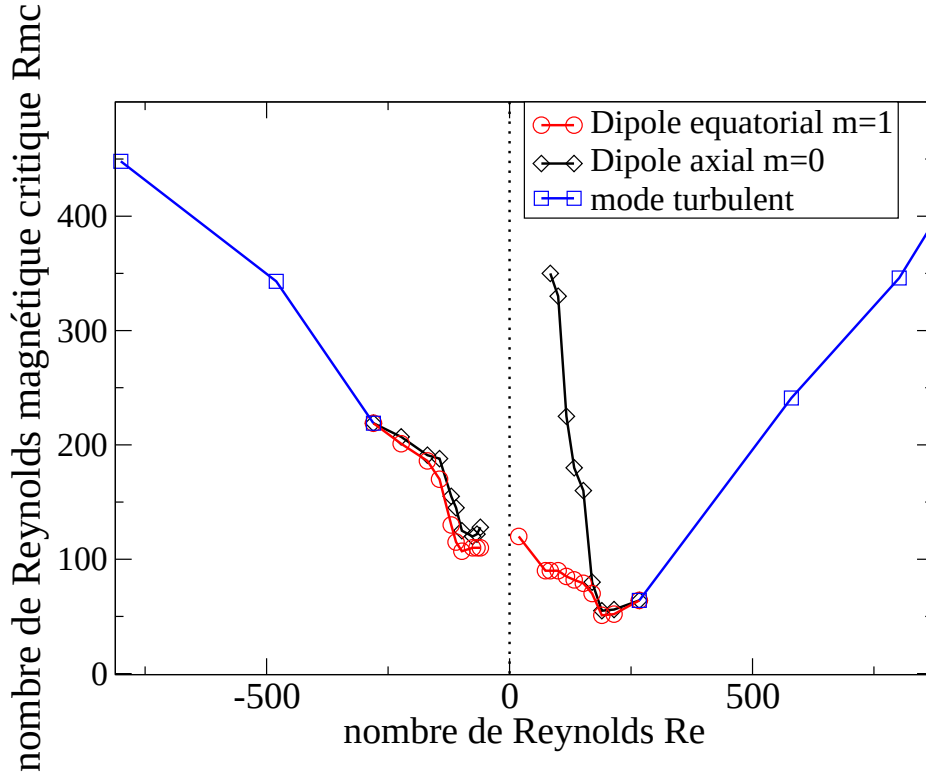


FIG. 4.5: Courbe de stabilité Rm_c en fonction de Re . En rouge : Évolution du seuil du dipôle équatorial $m = 1$, engendré en régime laminaire. En bleu : seuil d'instabilité de la structure correspondant à un mode dynamo turbulent, relativement axisymétrique. En noir : Seuil du dipôle axial fortement axisymétrique $m = 0$.

Pour les valeurs suffisamment petites de Re (positif ou négatif), l'écoulement est laminaire et axisymétrique, comme on peut le voir sur la figure 4.1. Dans ce cas, un champ magnétique constitué essentiellement d'un dipôle équatorial est engendré (courbe en rouge). Ainsi, l'ensemble du système brise bien l'axisymétrie, en accord avec le théorème de Cowling. La valeur du seuil de cette dynamo $m = 1$ varie avec le nombre de Reynolds. Dans le cas $Re > 0$, le seuil diminue avec Re . Dans le cas $Re < 0$, le seuil a tendance à augmenter lorsque l'on accroît $|Re|$. Au delà d'une certaine valeur, pour $|Re| > \sim 250$, on observe que le dipôle équatorial disparaît au profit d'un mode turbulent axisymétrique (courbe bleue). Ceci est relié à une transition dans le champ de vitesse vers un régime turbulent. L'étude de ce régime, qui semble a priori proche des observations expérimentales, fera l'objet de la prochaine section de ce chapitre. On note enfin sur la figure 4.5, la courbe noire décrivant

l'évolution du seuil d'un mode axisymétrique $m = 0$. Ce mode est engendré aux mêmes valeurs de Re pour lesquelles est obtenu le dipole équatorial, mais pour des nombres de Reynolds magnétiques plus grands. Dans le cas $Re > 0$, la distance entre les deux seuils dynamos $m = 0$ et $m = 1$ est assez importante mais varie fortement avec Re . Pour $Re < 0$, les deux seuils sont extrêmement proches.

L'apparition d'un mode axisymétrique $m = 0$ dans ces simulations présente évidemment un intérêt pour la compréhension de la dynamo VKS, puisqu'il s'agit d'une structure similaire aux observations expérimentales. Un intérêt supplémentaire vient toutefois du fait que ce mode axisymétrique semble être engendré dans un régime a priori laminaire, où l'on s'attend à ce que le champ de vitesse soit axisymétrique. Effectivement, on ne peut ici invoquer les fluctuations turbulentes pour expliquer la génération d'un champ magnétique qui semble contredire le théorème de Cowling. Le mécanisme par lequel ce mode $m = 0$ est produit mérite donc une étude approfondie. Nous allons voir qu'il met en jeu un mécanisme simple ne faisant pas appel à une description de la turbulence du champ de vitesse.

Ce champ magnétique est en fait engendré à travers une bifurcation secondaire à partir du dipole équatorial, et peut se produire à de très bas nombres de Reynolds. Le diagramme de bifurcation de la figure 4.6 nous aide à comprendre le mécanisme de cette bifurcation. On observe tout d'abord la bifurcation supercritique du dipole équatorial, pour $Rm_c = 88$, en rouge sur la figure. Pour cette valeur de $Re = +122$, cette bifurcation se produit à partir d'un écoulement laminaire, dominé par le mode de vitesse $m = 0$ (courbe orange). La saturation non-linéaire du dipole équatorial crée alors un effet en retour sur la vitesse, via la force de Laplace. Premièrement, on peut voir que la croissance de cette dynamo $m = 1$ inhibe fortement l'écoulement primaire (forte décroissance du mode de vitesse $m = 0$). Le champ magnétique non-axisymétrique va créer une composante non-axisymétrique dans le champ de vitesse. On voit qu'à mesure que la valeur saturée du dipole équatorial croît, une composante non-axisymétrique dans le champ de vitesse (courbe bleue) est engendrée. Cette composante est un mode $m = 2$. Comme nous le verrons par la suite, ce mode azimutal est imposé par l'aspect quadratique en champ magnétique de la force de Laplace. À mesure que l'on s'éloigne du seuil de la dynamo on voit que la saturation du dipole équatorial brise de plus en plus l'axisymétrie du champ de vitesse. Lorsque la composante $m = 2$ est suffisamment importante, cela provoque alors une bifurcation secondaire : pour $Rm_c = 205$, l'écoulement devient suffisamment non-axisymétrique pour exciter le mode magnétique axisymétrique (courbe noire). On observe que ce mode magnétique s'annule dans une certaine gamme du nombre de Reynolds magnétique ($370 < Rm < 435$). Il est intéressant de noter que lorsque le dipole axial bifurque, il entraîne une forte diminution de la composante $m = 2$ du champ de vitesse et du dipole équatorial. Cela met en évidence une forte anti-corrélation entre les deux modes magnétiques, montrant que ces deux champs s'inhibent l'un l'autre à travers les couplages non-linéaires qui résultent de la force de Laplace. La figure 4.7 montre l'évolution temporelle typique des modes magné-

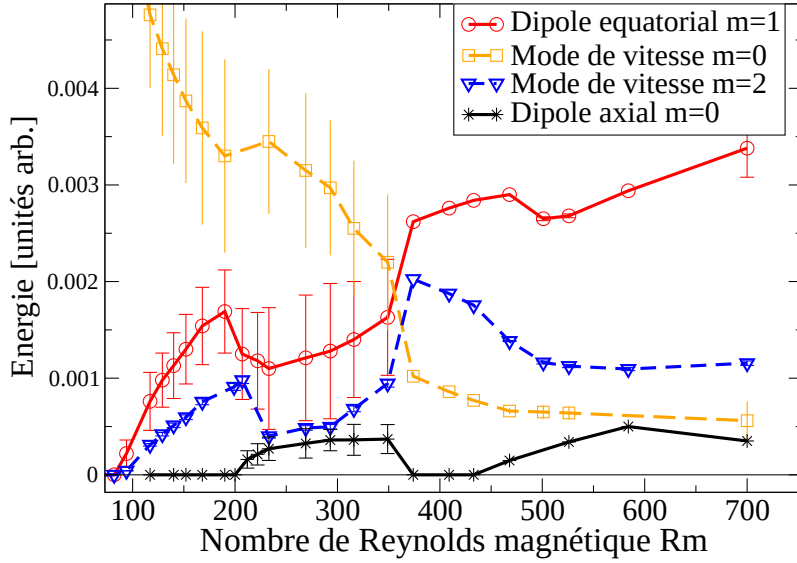


FIG. 4.6: Diagramme de bifurcation des différents modes magnétiques lorsque l'on varie Rm pour $Re = 122$. Les barres d'erreurs indiquent l'amplitude des oscillations. Tous les autres modes magnétiques sont faibles comparés à ceux-là.

tiques et cinétiques, pour $Rm = 292$ et $Re = 120$. La différence avec la simulation de la figure 4.2 est assez claire. Le début de la simulation est marqué par la croissance monotone du dipôle équatorial, dont la phase est fixée à un angle donné. La rétroaction du dipôle sur l'écoulement crée le mode de vitesse $m = 2$ et la croissance de ce mode de vitesse a une conséquence bien visible sur la figure 4.7. On note que l'amplitude du mode de vitesse $m = 2$ est suffisamment forte pour exciter le mode magnétique axisymétrique $m = 0$. Ce dipôle axial croît alors jusqu'à inhiber légèrement le dipôle équatorial et le système sature dans un état oscillant, présentant une composante axisymétrique non-nulle. On montre sur la figure 4.8 l'évolution de la période d'oscillation de la phase de dipôle équatorial en fonction de Rm .

Pour $Rm > 260$, les oscillations deviennent anharmoniques et il est difficile de définir précisément la période. Cette observation a une conséquence intéressante en ce qui concerne l'analogie avec l'expérience VKS. Alors que le champ magnétique $m = 1$ tourne dans le plan équatorial et s'annule donc par moyenne temporelle, le dipôle axisymétrique garde en moyenne une intensité non-nulle au cours de la simulation. Sous l'effet d'un moyennage temporel, cela signifie que le dipôle équatorial disparaît et le champ magnétique restant est un dipôle purement axisymétrique. Sur la figure 4.8, on voit ainsi qu'il suffit de moyennner sur un dixième de temps résistifs pour obtenir un dipôle axisymétrique, similaire au champ magnétique obtenu dans l'expérience VKS. Lorsque l'on continue à augmenter Rm , les oscillations deviennent anharmoniques puis disparaissent, et le dipôle équatorial se contente d'explorer chao-

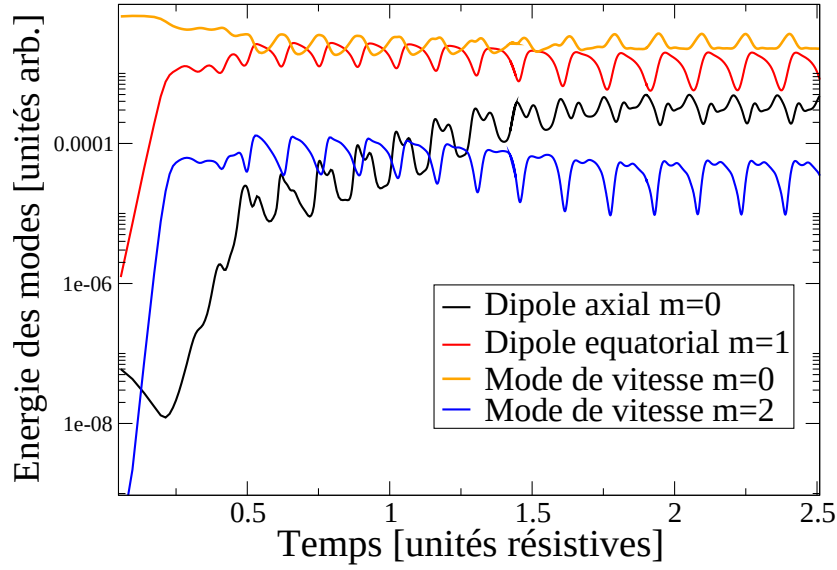


FIG. 4.7: Évolution temporelle des différents modes impliqués dans la simulation, pour $Rm = 292$ et $Re = 120$.

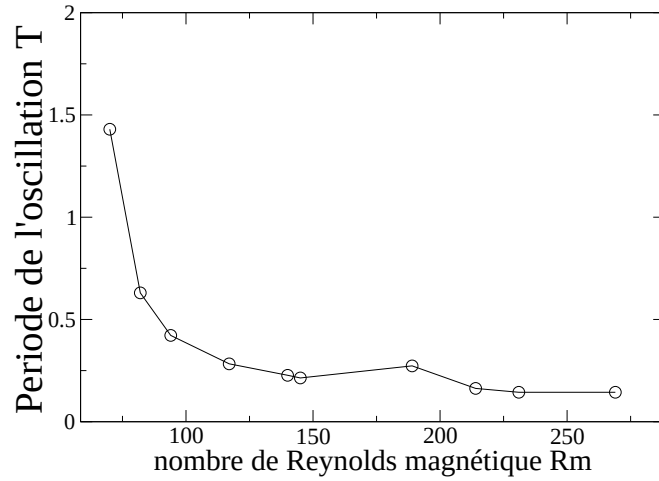


FIG. 4.8: Évolution de la période d'oscillation du dipole équatorial en fonction de Rm pour $Re = 120$. On note la divergence de la période près de la bifurcation dynamo.

tiquement les différentes phases possibles. Ainsi, même si l'énergie magnétique est fortement distribué sur le mode $m = 1$, la structure associée est principalement un dipole axial fluctuant sous l'effet du dipole équatorial.

Le lecteur attentif aura noté sur la figure 4.5 que les seuils des modes magnétiques $m = 0$ et $m = 1$ sont nettement plus proches en Rm dans le cas $Re < 0$, c'est-à-dire pour les écoulements où le fluide est éjecté par les disques près de l'axe au lieu d'y être pompé. Dans ce cas, le dipole équatorial est proche de la stabilité marginale lorsque la bifurcation secondaire du mode axisymétrique se produit. Les interactions non-linéaires des deux modes mènent ainsi à une dynamique complexe au cours du temps, dont on montre un exemple typique sur la figure 4.9.

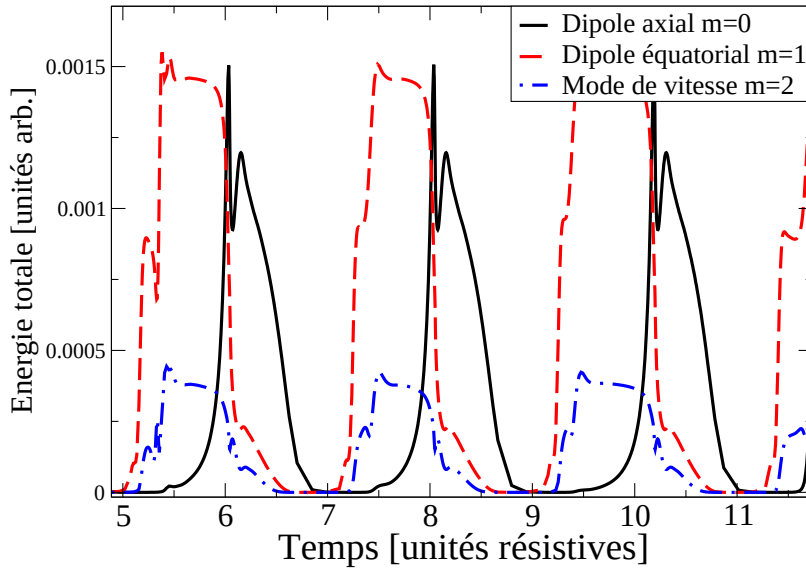


FIG. 4.9: Evolution temporelle des modes magnétiques et cinétiques (énergie totale), pour $Re = -76$ et $Rm = 170$.

Sur cette figure, on voit que le dipole équatorial (en rouge) bifurque en premier à partir d'un champ de vitesse axisymétrique. Comme nous l'avons vu dans le cas $Re > 0$, la saturation de ce mode magnétique $m = 1$ crée une composante non-axisymétrique dans la vitesse (en bleu), qui engendre alors le dipole axial (en noir). Comme précédemment, on observe une compétition entre les deux dipôles. Toutefois, dans le cas présent, l'interaction non-linéaire est suffisamment forte entre les deux dipôles pour inhiber complètement le dipole équatorial, qui retombe à zéro. Par conséquent, la composante $m = 2$ de la force de Laplace s'annule et l'écoulement redevient parfaitement axisymétrique. Il s'ensuit alors une période de temps pendant laquelle le champ magnétique de cette dynamo est complètement axisymétrique, mais décroît lentement jusqu'à zéro. Le processus se répète alors, quasi-périodiquement, créant des oscillations de relaxation. On remarque qu'il existe dans ces simulations une partie du cycle pendant laquelle le champ magnétique et la vitesse sont complètement axisymétriques, ce qui peut sembler en apparence contraire

au théorème de Cowling. Ce champ magnétique est composé d'une forte composante azimutale associée à un champ vertical près de l'axe de rotation (voir la figure 4.10).

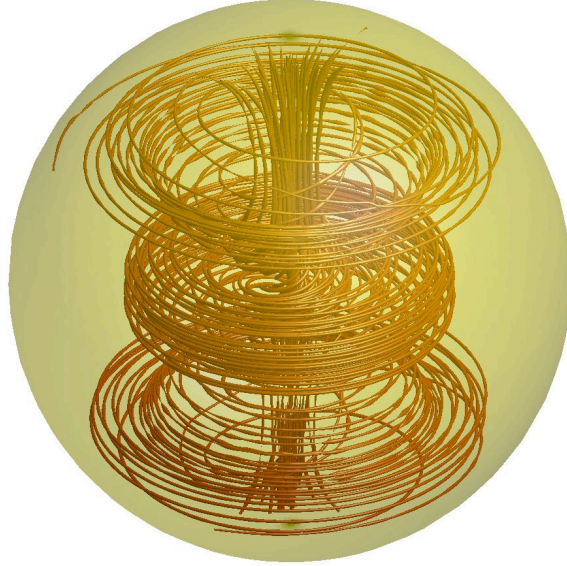


FIG. 4.10: Lignes de champ magnétique du dipole axial observé dans les simulations, pour $Re = -76$ et $Rm = 170$, après une vingtaine de temps résistifs. On notera la forte axisymétrie du champ magnétique.

Bien qu'il y ait peu de chances que cette dynamique soit sélectionnée dans l'expérience, la structure magnétique présente une similarité frappante avec le champ observé dans VKS. La dynamique décrite ici est une illustration des limites du théorème de Cowling dans le cas d'un système non-linéaire. En effet, quelque soit la durée de la simulation numérique, le système entretient ainsi périodiquement un champ magnétique complètement axisymétrique. C'est également un exemple intéressant d'instabilité dans laquelle le champ moyen et les fluctuations dépendantes du temps mènent à une dynamique complexe basé sur l'interaction d'un faible nombre de modes.

Ces oscillations de relaxation sont présentes uniquement dans le cas $Re < 0$, et se produisent seulement à proximité du seuil de la bifurcation secondaire du mode $m = 0$. Lorsque ce cycle apparaît ou disparaît, le système bifurque toujours vers un système stationnaire. Un diagramme de bifurcation du champ magnétique pour $Re = -76$ est présenté à la figure 4.11.

Sur cette figure, les traits en pointillés indiquent la valeur maximale des différents modes dans le régime de relaxation, tandis que les traits pleins représentent la valeur saturée des modes stationnaires. Pour les grandes valeurs de Rm , on observe une bistabilité avec la coexistence de deux solutions différentes, que nous avons dénotées $M1$ et $M2$. Selon les conditions initiales, le système relaxe vers l'une ou l'autre de ces deux solutions. La solution $M1$ est repérée par des cercles sur la figure 4.11, et on voit qu'elle implique un champ magnétique principalement équatorial,

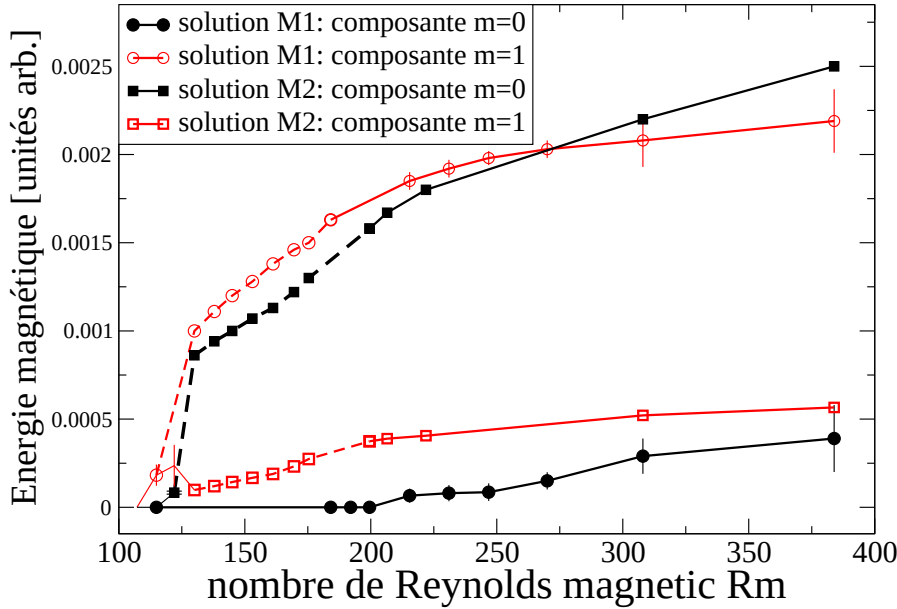


FIG. 4.11: Diagramme de bifurcation des différents modes magnétiques lorsque l'on varie Rm , pour un nombre de Reynolds fixe $Re = -76$. Les barres d'erreurs indiquent l'amplitude des oscillations, et les lignes en pointillés la valeur maximale des modes durant le cycle de relaxation. Tous les autres modes magnétiques sont faibles comparés à ceux-ci.

avec une faible composante $m = 0$. La solution $M2$ au contraire possède une très forte composante axisymétrique et une petite partie équatoriale : cette deuxième solution correspond à un dipole axial incliné d'un angle d'environ 20° , et la phase du dipole équatorial est fixe. On notera que pour la première solution, la phase du mode $m = 1$ tourne à vitesse constante et là encore, le champ magnétique est un dipole axial après un moyennage de quelques dixièmes de temps résistifs. Lorsque l'on diminue Rm , on voit qu'il existe un nombre de Reynolds magnétique critique $Rm_c = 200$ pour lequel le système bifurque vers le régime des oscillations de relaxation de la figure 4.9. Le point intéressant est qu'on peut remarquer qu'au point de transition, l'amplitude maximale de ces oscillations coïncide parfaitement avec l'amplitude des solutions stationnaires. On voit assez nettement sur la figure 4.9 que le système passe beaucoup de temps près de la solution $M1$, lorsque le mode $m = 0$ est nul. On peut également voir sur cette figure que lorsque le dipole axial est à son maximum, la croissance du dipole équatorial semble ralentir vers une valeur intermédiaire plus faible, correspondant à la solution $M2$. Le chapitre précédent a montré que tandis qu'un dipole équatorial est créé par le champ de vitesse moyen, un dipole axial est créé par les fluctuations. On voit dans cette section que ces deux modes magnétiques ont tendance à entrer en compétition via les termes non-linéaires, ce qui entraîne une dynamique complexe.

Ces différentes observations permettent de bien comprendre le mécanisme qui mène aux oscillations de relaxation du système : il s'agit d'une connexion entre deux solutions stationnaires, l'une constituée d'un dipole principalement équatorial et l'autre d'un dipole fortement axial, créée par la force de Laplace. Cette connexion semble s'effectuer à travers le point origine O , où les deux composantes sont nulles. On peut donc interpréter cette dynamique comme une connexion hétérocline entre les trois points fixes O , $M1$ et $M2$. Cette interprétation est renforcée par la divergence de la période du cycle lorsqu'il apparaît ou disparaît (figure 4.12, à droite). On montre également sur cette figure le cycle non-linéaire dans l'espace des phase (en bas).

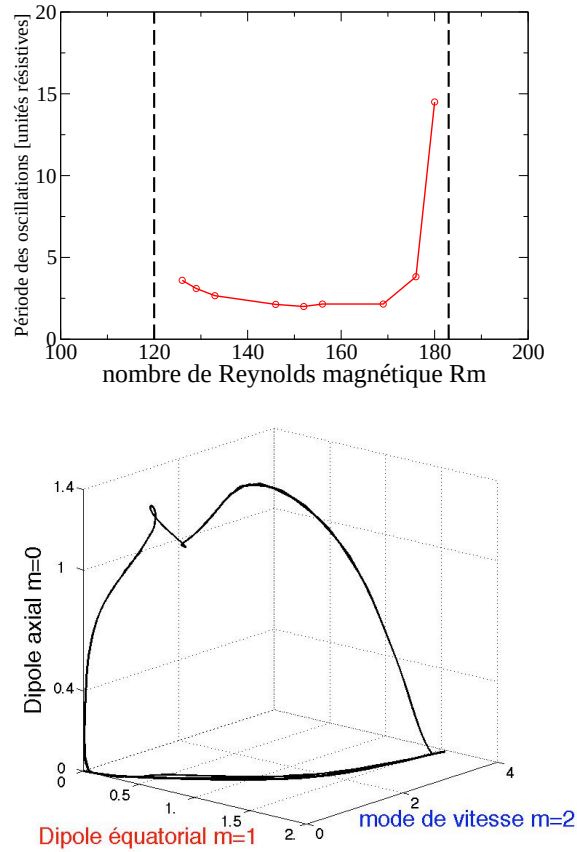


FIG. 4.12: En haut : évolution de la période des oscillations non-linéaires en fonction de Rm pour $Re = -76$. On note la divergence claire de la période près de la disparition du cycle (ligne en pointillé). En bas : cycles dans l'espace des phases pour $Rm = 150$ et $Re = -76$.

Les résultats présentés ici sont issus d'un régime relativement laminaire, et donc assez loin de configurations expérimentales comme l'expérience VKS ou l'expérience de Madison. Toutefois, nous avons vu que le système, malgré les restrictions impo-

sées par le théorème de Cowling, engendre un dipole axial fortement axisymétrique. Cette structure magnétique est donc très proche de celle observée expérimentalement, mais pour laquelle il n'existe pas à ce jour une explication claire et précise. Il est difficile de faire des conclusions sur le mécanisme de génération du champ dans ces simulations, mais on peut tout de même faire quelques remarques. Il a été proposé par Pétrélis, Mordant et Fauve, que le champ expérimental pourrait être dû à une dynamo $\alpha - \omega$ créée par l'effet conjugué du cisaillement de la rotation différentielle et de l'écoulement hélicitaire près des disques. Ce mécanisme a été illustré au chapitre précédent de manière assez claire. Dans les simulations non-linéaires, on utilise un forçage axisymétrique, et l'effet des pales n'est pas pris en compte. On n'introduit donc pas l'hélicité correspondante, comme dans le cas du code cylindrique. Ceci étant dit, on peut remarquer que l'écoulement de von Kármán tel qu'il est produit ici, en régime laminaire, possède également une hélicité non-nulle. Si l'écoulement près des disques est plutôt favorable à une dynamo $\alpha - \omega$, on peut remarquer que la couche de cisaillement du plan médian possède l'hélicité de signe opposé, et va donc être plutôt défavorable à la dynamo. Renverser le signe du nombre de Reynolds permet alors d'inverser le signe de cette hélicité, et le fort cisaillement du plan médian devient alors une source d'effet α . Cela pourrait permettre d'expliquer pourquoi le seuil du mode $m = 0$ est nettement plus bas dans ce cas.

4.3.3 Modélisation dynamique de basse dimensionalité

Même si les simulations présentées à la section précédente sont réalisées dans un régime laminaire, on pourrait s'attendre à ce que la dynamique assez riche observée implique des mécanismes complexes, difficiles à comprendre. Au contraire, nous avons vus qu'il est très facile de comprendre les résultats en ne considérant que deux modes magnétiques, et un mode de vitesse dû à la force de Laplace. La forte inhibition entre les deux modes magnétiques fait évidemment appel à des interactions non-linéaires, et implique probablement d'autres modes de vitesses, comme par exemple le mode de vitesse $m = 1$.

Cette dynamique décrit donc très simplement la compétition entre un dipole axial et un dipole équatorial au sein d'un système proche de l'axisymétrie. Il s'agit là d'une situation très commune en astrophysique. Effectivement, l'ensemble des objets naturels présentant un champ magnétique (planètes et étoiles) se trouve en rotation rapide. Ceci implique en première approximation des champs de vitesse proche de l'axisymétrie et explique l'importance du théorème de Cowling. De plus, la plupart des planètes du système solaire présente un champ magnétique principalement constitué d'une combinaison entre dipole équatorial et dipole axial, le rapport entre les deux modes variant selon l'objet. On voit ici l'importance d'avoir une description simple des mécanismes présentés dans ce chapitre. Pour cela, nous

allons construire un modèle d'équations d'amplitudes nous permettant de décrire nos simulations directes de manière simple et idéalisée. Pour cela on écrit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = A(t) \mathbf{D}_{eq}(\mathbf{r}) + c.c. + B(t) \mathbf{D}_{ax}(\mathbf{r}) + \dots, \quad (4.29)$$

où $\mathbf{D}_{eq}(\mathbf{r})$ (respectivement $\mathbf{D}_{ax}(\mathbf{r})$) est le mode propre associé au dipole équatorial (respectivement axial). A est une amplitude complexe, sa phase décrivant l'angle que fait le dipole dans le plan équatorial, tandis que $c.c.$ indique le complexe conjugué de l'expression qui précède. B , qui décrit l'amplitude d'un mode axisymétrique, est une amplitude réelle. Dans la suite, on s'intéresse à l'évolution temporelle de ces modes, en oubliant leur éventuelle structure spatiale. Comme nous l'avons décrit précédemment, on sait que la saturation du dipole équatorial $m = 1$ va engendrer un écoulement non-axisymétrique à travers la force de Laplace. Cette dernière, de la forme $F_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$, possède une dépendance quadratique en champ magnétique. Il est donc naturel de considérer une amplitude complexe $V(t)$ correspondant à un mode $m = 2$. On cherche la description la plus simple possible des phénomènes observés dans les simulation numériques. Nous nous restreignons donc à écrire un système de trois équations pour les trois amplitudes A , B et V . En théorie, il serait possible d'obtenir les différents termes de ce système à partir des équations de la MHD, mais il s'agit là d'une approche très complexe. On préfère utiliser les symétries du problème pour restreindre les termes possibles à partir d'un développement en série. Le problème repose sur deux symétries fondamentales : la symétrie d'invariance par rotation autour de l'axe z , et l'invariance de l'équation d'induction par renversement du champ magnétique. La première symétrie impose l'invariance du système d'équation sous les transformations $A \rightarrow Ae^{i\chi}$, $V \rightarrow Ve^{2i\chi}$, tandis que la deuxième symétrie implique l'invariance sous $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$. Si l'on se restreint aux termes d'ordre trois (ce qui se justifie par la proximité du seuil), et que l'on décrit les interactions non-linéaires entre modes magnétiques par des termes cubiques, on obtient le système

$$\dot{A} = \mu A - V\bar{A} - \alpha_1 |A|^2 A - \alpha_2 |V|^2 A - \alpha_3 B^2 A, \quad (4.30)$$

$$\dot{V} = -\nu V + A^2 - \beta_1 |A|^2 V - \beta_2 |V|^2 V - \beta_3 B^2 V, \quad (4.31)$$

$$\dot{B} = -\lambda B - \gamma_1 |A|^2 B + \gamma_2 |V|^2 B - \gamma_3 B^3. \quad (4.32)$$

où μ est proportionnel à l'écart au seuil de la dynamo. L'effet du champ moyen est pris en compte dans ce paramètre, évidemment positif puisque l'on se place au-dessus du seuil d'instabilité. Au contraire, le champ de vitesse est axisymétrique au-dessous du seuil dynamo, ce qui implique $\nu > 0$ afin d'obtenir un amortissement du mode de vitesse $m = 2$ en l'absence de champ magnétique. Les coefficients des termes quadratiques peuvent être pris égaux à l'unité par un choix approprié d'échelle pour les trois amplitudes. On reconnaît dans le terme A^2 le forçage de vitesse non-axisymétrique due à la force de Laplace créée par le dipole équatorial. Le terme $V\bar{A}$, contraint par les symétries, est très important puisqu'il représente la brisure de l'invariance par rotation pour le dipole équatorial dès qu'un écoulement non-axisymétrique est excité.

Ce système d'équations pour $B = 0$, lorsque l'on ne considère que les amplitudes A et V , est la forme normale de la résonance $1 : 2$ et a été étudié en détails : Proctor et Jones ont étudié la dynamique se produisant dans un problème de convection thermique lorsque deux modes de rouleaux horizontaux avec des nombres d'ondes dans le rapport $1 : 2$ sont sélectionnés [71]. Plusieurs comportements sont observés, comme des ondes propagatrices ou stationnaires, ou encore des connexions hétéroclines entre différentes solutions. Ce modèle a indépendamment été étudié par Armbruster et al [2]. De plus, la résonance $1 : 2$ a déjà été proposée en 2003 par Nore et Tuckerman dans le contexte de l'écoulement de von Karman [61]. Dans cette étude toutefois, le modèle est appliqué au problème purement hydrodynamique, et l'interprétation physique y est totalement différente. Dans notre cas, le modèle réduit à deux modes en interaction décrit relativement bien la dynamique du dipole équatorial, tant que le champ axial n'est pas engendré. Il est ainsi possible de comprendre la bifurcation secondaire qui mène à la rotation du dipole équatorial. En effet, dans ce modèle, on voit que la vitesse de phase de l'amplitude A peut facilement devenir non-nulle dès que le mode V est suffisamment important. Ceci correspond au dipole équatorial tournant à vitesse constante dans le plan équatorial. Cette bifurcation est également observée dans les simulations numériques non-linéaires.

On considère maintenant le système lorsque l'amplitude du dipole axial B est non-nulle. On choisit de prendre $\lambda > 0$ et $\gamma_3 > 0$, ce qui nous assure que ce dipole axial ne peut être engendré seul, en accord avec le théorème de Cowling. Le terme $|V|^2 B$ représente alors la possibilité d'amplifier ce mode magnétique $m = 0$ dès que le champ de vitesse brise l'axisymétrie, à l'aide du mode de vitesse $m = 2$, et à condition que $\gamma_2 > 0$. On notera également les termes $|A|^2 B$ dans l'équation pour B , et $B^2 A$ dans l'équation pour A , qui représentent l'inhibition mutuelle des deux modes magnétiques. Notons ici que pour être tout à fait rigoureux, il nous faudrait décrire ces interactions à l'aide des modes de vitesse appropriés, comme la vitesse $m = 1$ créée par la force de Laplace associé à l'interaction du dipole axial et du dipole équatorial. Dans la perspective de conserver un modèle simple, on préfère ne conserver que trois modes. Nous verrons que cela est suffisant pour décrire le comportement observé dans les simulations numériques. Ainsi, bien que le système d'équations d'amplitudes (4.30-4.31-4.32) ne soit qu'une représentation très simplifiée du modèle numérique, il reproduit relativement bien la phénoménologie observée, pour les deux signes de Re : lorsque l'on augmente μ , il est possible d'observer soit les oscillations de relaxation obtenues pour $Re < 0$, soit la bifurcation secondaire d'un dipole axial se produisant pour $Re > 0$. Il est possible de passer d'un cas de figure à l'autre en changeant uniquement le paramètre γ_2 . Cela va dans le sens de la discussion de la fin de la section précédente : un signe négatif de Re abaisse le seuil du dipole axial (par exemple en favorisant l'effet α), correspondant ainsi à une grande valeur du paramètre γ_2 .

Les différentes bifurcations se produisant dans le système sont illustrées sur la figure 4.13, et nous aident à mieux comprendre les caractéristiques qualitatives observées dans les simulations numériques. Pour $\mu > 0$, l'origine devient instable et

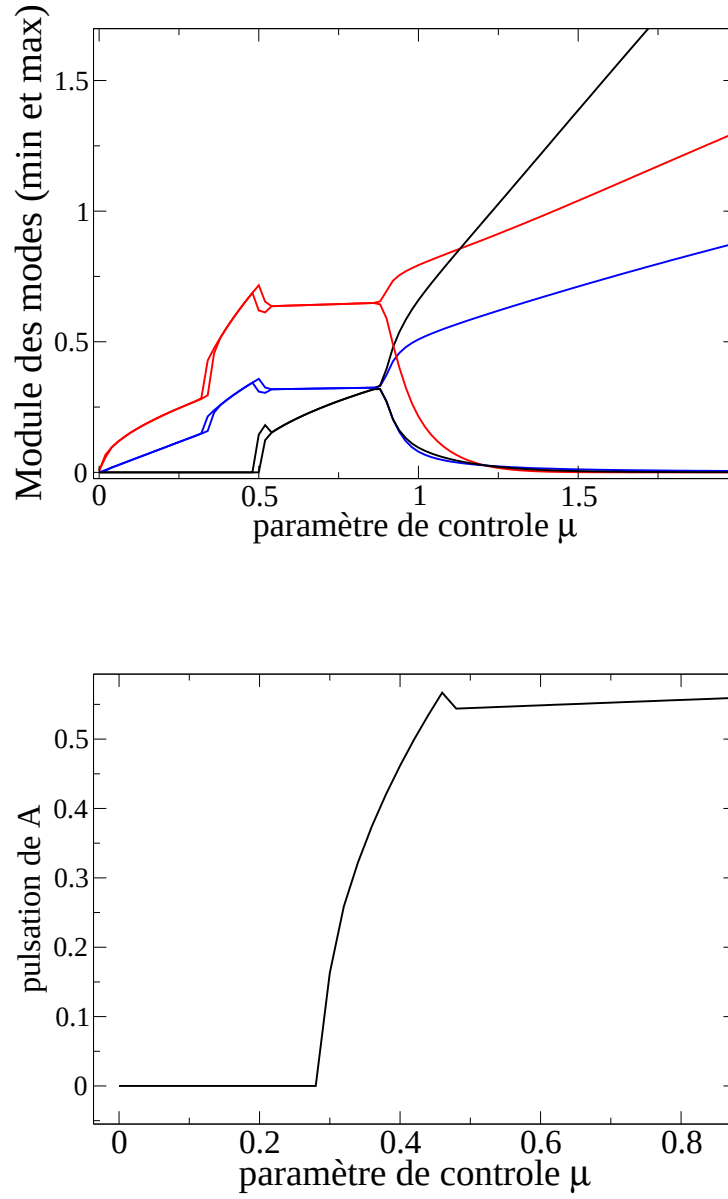


FIG. 4.13: Diagramme de bifurcation du système d'équations d'amplitude (4.30-4.31-4.32) lorsque l'on varie μ , avec $\alpha_1 = 0.15, \alpha_3 = 4, \nu = 0.5, \beta_2 = 0.4, \lambda = 1., \gamma_2 = 2.5, \gamma_3 = 0.5$, tous les autres coefficients valant zéro. On indique à la fois les valeurs maximales et minimales des modes en régime saturé. En bas : Évolution de la vitesse de rotation de la phase de A .

on observe une bifurcation supercritique stationnaire du mode A , immédiatement associée à un mode V non-nul. On dénote ce mode pur (au sens d'un champ magnétique purement équatorial) par $M_A = (A_0, V_0, B = 0)$. La phase du système est alors bloquée, et l'orientation varie aléatoirement selon les conditions initiales choisies. Cela correspond à un dipole équatorial fixe. Pour $\mu = 0.28$, il se produit une

bifurcation où les phases de A et V se mettent à tourner. Le mode A devient donc oscillant, ce qui correspond à un dipole transverse tournant à vitesse constante dans le plan équatorial. On peut noter sur la figure 4.13 (en bas) que la période de cette oscillation diverge au point de bifurcation. Cette bifurcation résulte de la brisure de la symétrie par rotation, due au terme $V\bar{A}$ du modèle. Si l'on continue d'augmenter μ , une bifurcation fourche secondaire apparaît, associée avec un mode B non-nul. Ce mode mixte, dénoté par $M = (A_1, V_1, B_1)$, correspond à un dipole présentant une composante axisymétrique. Cette bifurcation provoque une saturation brutale de la pulsation de A et V , mais également de l'amplitude de ces modes. Si l'on s'intéresse aux modules des modes, on voit que M est une solution stationnaire, le dipole axial étant fixe. Enfin, pour $\mu = 0.88$, une orbite périodique apparaît dans l'espace des phases, et le système tourne autour de M . Un tel comportement est observé dans les simulations directes réalisées pour $Re > 0$, par exemple sur la figure 4.7. On indique sur la figure 4.13 les valeurs minimales et maximales atteintes durant ce cycle, ce qui explique la fourche observée. On voit alors qu'en augmentant μ , les valeurs minimales du cycle tendent vers zéro. L'orbite périodique tend alors vers le cycle limite illustré à la figure 4.14. Ce comportement de relaxation implique ainsi l'origine du système, le mode purement équatorial M_A et une région dans laquelle le dipole axial $m = 0$ domine complètement.

Ce comportement semble relativement robuste dans l'espace des paramètres du modèle, en particulier en ce qui concerne les valeurs des coefficients des termes linéaires μ , ν et λ . Toutefois, il faut se souvenir qu'il s'agit ici d'une description simplifiée, cherchant avant tout à illustrer les interactions non-linéaires entre un dipole équatorial et un dipole axial. En particulier, il n'est pas possible avec ce simple modèle de décrire la bistabilité des solutions $M1$ et $M2$ observée dans les simulations numériques complètes, aux grandes valeurs de Rm . Une description plus précise de basse dimensionnalité pourrait être obtenue en prenant en compte l'effet d'un mode de vitesse $m = 1$ dans le système, mais augmenterait considérablement la complexité du modèle ainsi que le nombre de paramètres libres du problème.

Le modèle présenté ici est donc une description de basse dimension de la compétition entre modes magnétiques qui peut exister au sein de systèmes proches de l'axisymétrie. La pertinence de notre système d'équations se justifie par une capacité à reproduire qualitativement les comportements du système complet, simulé avec le code PARODY. Il est donc intéressant de se demander dans quelle mesure ce système pourrait décrire des situations plus complexes et naturelles. La plupart des champs magnétiques planétaires présentent à la fois un dipole équatorial et un dipole axial. Notre modèle étant basé sur des arguments simples et généraux, il serait intéressant de le comparer à la dynamique observée dans les objets naturels, comme par exemple la variation séculaire du champ magnétique terrestre. Ce modèle ainsi que les simulations directes réalisées ont également illustré les limites du théorème de Cowling, dès que l'on considère un problème non-linéaire.

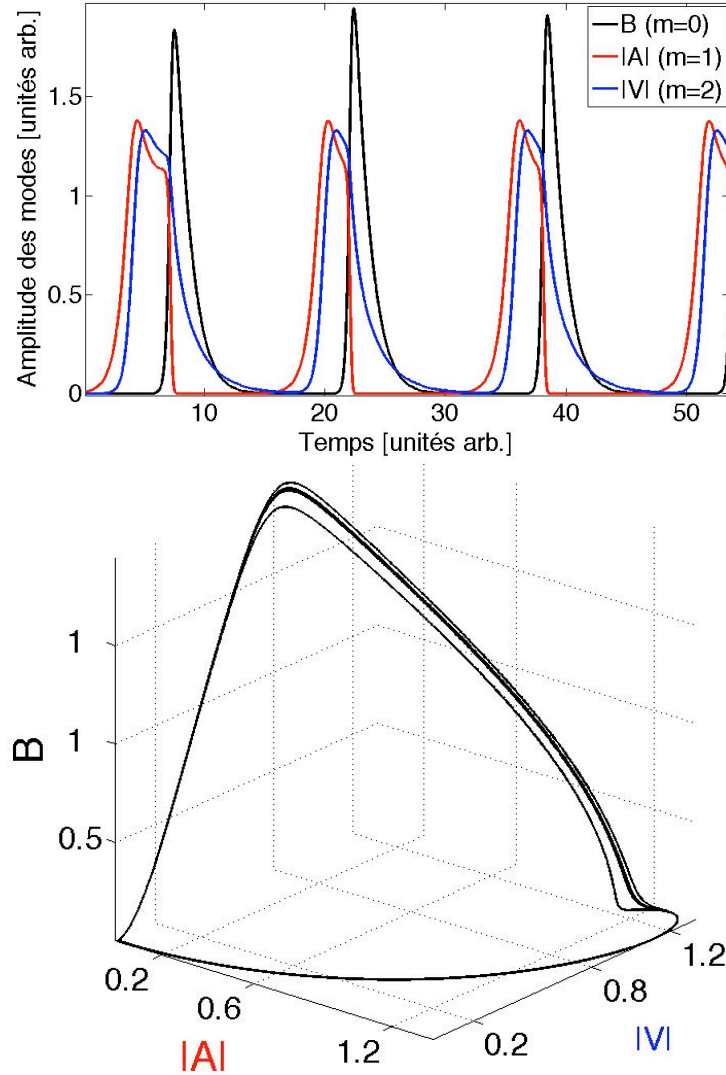


FIG. 4.14: Intégration numérique du système d'équation d'amplitude (4.30-4.31-4.32). En haut : évolution temporelle de l'amplitude des trois modes dans le cycle de relaxation ($\mu = 1.4, \alpha_1 = 0.15, \alpha_3 = 4, \nu = 0.5, \beta_2 = 0.4, \lambda = 1., \gamma_2 = 4., \gamma_3 = 0.5$, tous les autres coefficients valant zéro). En bas : cycle de relaxation vu dans l'espace des phases.

D'une manière générale, l'ensemble des calculs présentés dans cette partie permet de comprendre d'une manière simple les différentes interactions non-linéaires qui existent entre les modes magnétiques. Les régimes explorés sont laminaires, mais les résultats présentent d'intéressantes similitudes avec l'expérience VKS. On est toutefois très loin du régime turbulent observé dans les dynamos expérimentales ou naturelles, et il est primordial de réaliser une étude numérique dans un régime plus turbulent. Ceci est l'objet de la suite de ce chapitre.

4.4 Dynamos turbulentes

Un des aspects les plus intéressant de l'expérience est sa capacité à engendrer un champ magnétique en présence d'un écoulement fortement turbulent. Sur la figure 4.5 de la section précédente, on voit que la dynamique non-linéaire entre dipôle équatorial et dipôle axial semble disparaître au profit d'un nouveau mode magnétique. Cette transition se produit lorsque l'écoulement présente un plus grand degré de fluctuations, et il est donc primordial d'étudier ce régime turbulent.

4.4.1 Étude hydrodynamique

Afin de comprendre les dynamos obtenues à plus hauts nombres de Reynolds, nous nous intéressons d'abord au comportement hydrodynamique du système en l'absence de champ magnétique. La limitation des ressources de calcul rendent actuellement impossible la génération d'écoulements aussi turbulents que les écoulements réels à partir de simulations numériques 3D. En effet, la résolution numérique requise pour décrire de tels écoulements augmente dramatiquement avec le nombre d'onde de l'échelle dissipative. En pratique, les simulations réalisées durant cette thèse sont limitées à $Re < 4000$ par la puissance de calcul et l'espace de stockage mémoire disponible. Malgré cette restriction sévère par rapport aux expériences, les nombres de Reynolds atteints permettent d'observer une transition vers un régime turbulent.

La figure 4.15 illustre cette transition. On y montre l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale de la simulation pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Pour $Re = 100$, l'écoulement est laminaire. Pour $Re = 250$, certaines fluctuations sont clairement visibles autour de la valeur moyenne et pour $Re = 1000$, le champ est fortement chaotique. On observe ainsi une transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement de plus en plus fluctuant à mesure que l'on augmente Re . Cette transition peut être illustrée de manière plus quantitative. Sur la figure 4.16, on calcule la déviation standard du nombre de Reynolds mesuré en fonction de Re_0 .

On voit que le champ de vitesse devient chaotique pour $Re \sim 200$. Au-delà de cette valeur, des instabilités hydrodynamiques sont engendrées et les non-linéarités de l'équation de Navier-Stokes font très vite apparaître une évolution chaotique. Malgré le faible niveau de turbulence associé, nous verrons que cet écoulement est suffisamment fluctuant pour modifier l'instabilité dynamo. La figure 4.17 montre la densité spectrale d'énergie cinétique en harmoniques sphériques issue d'une simulation hydrodynamique à $Re = 330$, en fonction du degré l des polynômes de Legendre et de l'ordre azimutal m . L'écoulement présente des pics assez nets sur les

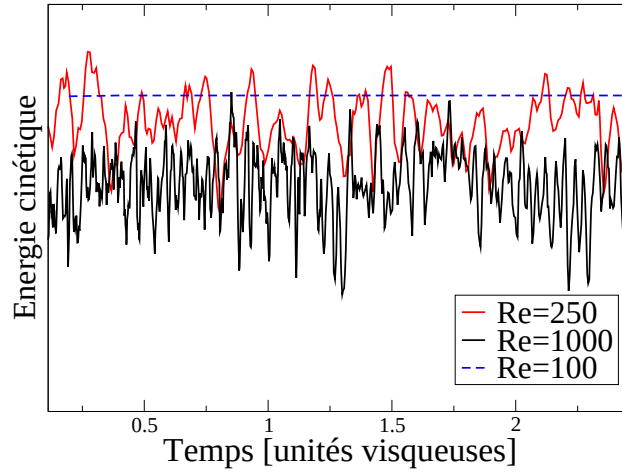


FIG. 4.15: Évolution du niveau de turbulence en fonction du nombre de Reynolds. On montre l'évolution temporelle de l'énergie cinétique pour des simulations à $Re = 100$ (courbe bleue), $Re = 250$ (rouge) et $Re = 1000$ (noir), illustrant la transition vers un régime turbulent.

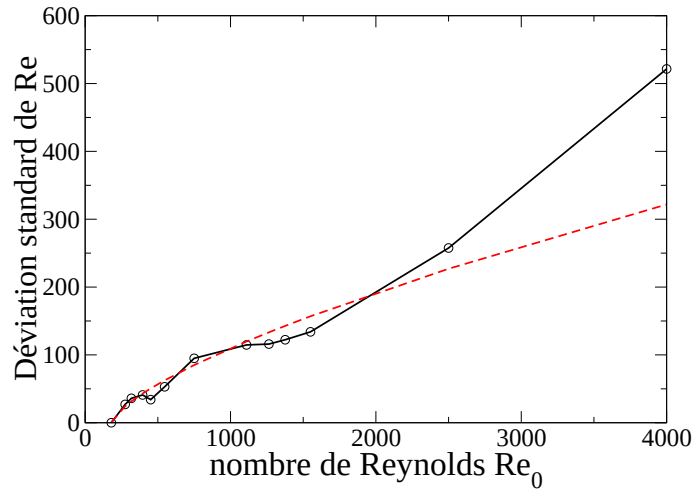


FIG. 4.16: Déviation standard de Re en fonction de Re_0 . On observe une transition pour $Re \sim 180$, où des fluctuations apparaissent dans l'écoulement. La courbe en pointillé est un ajustement en $(Re - Re_c)^\alpha$, avec $Re_c = 177$ et $\alpha = 0.7$.

composantes $l = 2$ et $m = 0$. Cela traduit la prédominance de l'écoulement moyen $s_2^0 + t_2^0$ malgré les fluctuations. Avec des nombres de Reynolds si bas, et le peu d'harmoniques sphériques correspondantes, il est difficile d'identifier une quelconque loi d'échelle pour la cascade d'énergie.

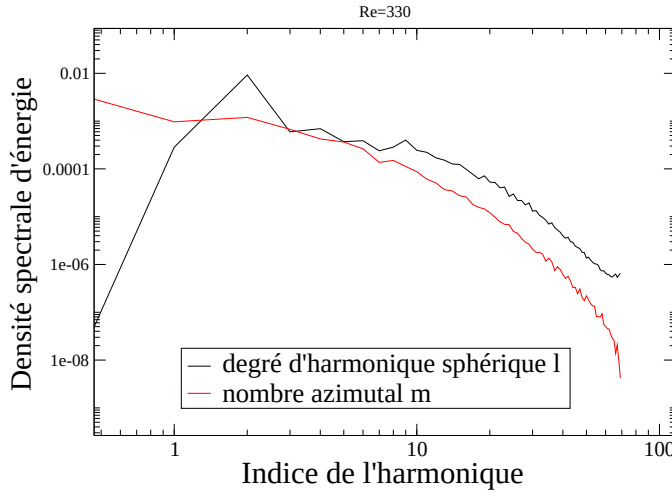


FIG. 4.17: Spectre des harmoniques sphériques d'une simulation à $Re = 330$. En noir : densité d'énergie spectrale en fonction du degré l . En rouge : spectre en fonction de l'ordre m . L'énergie est particulièrement forte sur la composante du champ moyen.

Les nombres de Reynolds atteints numériquement permettent cependant d'observer une transition vers un comportement plus chaotique du champ de vitesse. On peut donc espérer avoir une description plus proche de la réalité qu'avec les écoulements laminaires de la section précédente, ou les écoulements modèles du chapitre 3. Toutefois, cette modélisation est encore très loin des paramètres expérimentaux, où les nombres de Reynolds sont supérieurs à 10^6 . Il est donc impossible de décrire une turbulence pleinement développée similaire à celle des expériences dynamos ou du noyau terrestre. Les simulations réalisées pour $Re = 2500$ illustrent bien cette situation. La figure 4.18 montre l'évolution au cours du temps du champ de vitesse. À gauche, on montre l'évolution temporelle des modes de vitesse $m = 0$ (noir), $m = 1$ (rouge) et $m = 2$ (bleu). Les signaux sont très chaotiques, mais le mode axisymétrique de vitesse domine largement, les pics des modes non-axisymétriques restant au-dessous de la valeur moyenne du mode $m = 0$. Le caractère chaotique de l'écoulement est également visible en observant la structure spatiale de l'écoulement, comme à la figure 4.19.

Sur la figure 4.19, on reconnaît la structure de l'écoulement laminaire, et la composante axisymétrique domine encore l'écoulement. Toutefois, l'écoulement moyen est nettement bruitée par des structures de plus petites échelles. De plus, cette structure fluctue d'un instant à l'autre à cause des composantes non-axisymétriques qui perturbent l'écoulement moyen. Malgré les faibles valeurs des nombre de Reynolds, la distribution d'énergie dans l'espace spectral suggère une cascade d'énergie de Kolmogorov. Sur la figure 4.20, on voit qu'il existe à la fois une zone inertielle en $k^{-5/3}$ et une échelle de dissipation, situé approximativement en $Re^{3/4}$. Évidemment,

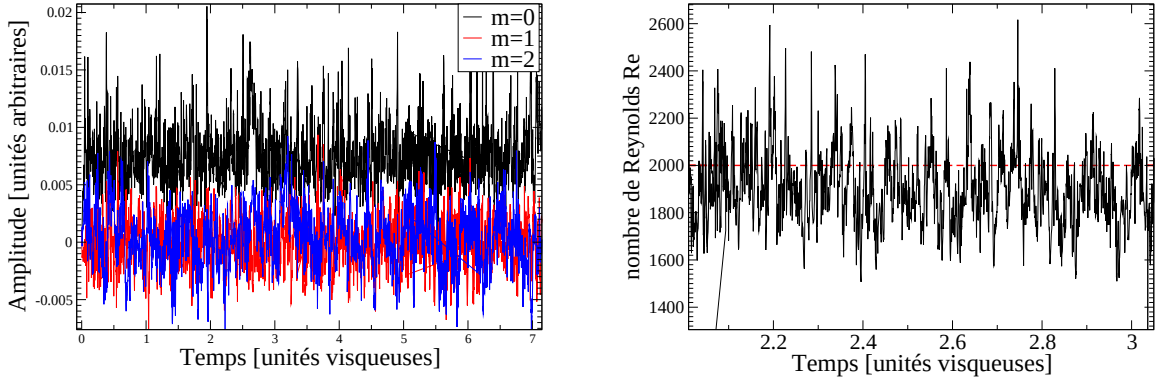


FIG. 4.18: Simulation hydrodynamique réalisée à $Re = 2000$. A gauche : évolution de l'amplitude des modes azimutaux de vitesse près de la sphère externe. A droite : mesure du Re effectif (courbe continue) comparé au Re_0 imposé dans les équations (courbe pointillé)

la cascade inertielle est relativement restreinte étant donné les limites numériques, mais s'accorde assez bien avec la loi théorique en $k^{-5/3}$.

Le régime faiblement 'turbulent' qu'il est possible d'atteindre dans ces simulations présente quelques propriétés intéressantes. Malgré la limitation imposée par cette approche numérique, on obtient un régime où le champ de vitesse subit d'importantes fluctuations par rapport à l'état moyen. Ce champ de vitesse chaotique présente également un spectre en accord avec ce que prédit la théorie de Kolmogorov. En revanche, l'échelle de dissipation maximale atteinte reste relativement proche de l'échelle d'injection de l'énergie du système. Il est donc difficile d'obtenir des temps d'intégration assez long pour observer une véritable zone inertielle. Il est important d'insister sur le fait que cette modélisation est très loin de la configuration expérimentale et qu'il n'est pas possible en l'état actuel des simulations de décrire les structures de petite échelle de l'écoulement réel. Nous allons voir que le niveau de fluctuation est néanmoins suffisant pour modifier la structure de l'instabilité dynamo.

4.4.2 Structure de la dynamo turbulente

La transition vers la turbulence hydrodynamique, pour $Re \sim 200$, s'accompagne d'un changement dans la structure et la dynamique du champ magnétique. Comme nous l'avons dit à la section précédente, l'écoulement laminaire génère deux types de structures à grande échelle : un dipôle équatorial et un dipôle axial. Dans ces simulations, le dipôle axisymétrique ne domine jamais vraiment totalement le dipôle transverse. Proche du seuil dynamo, ces modes sont de plus très peu fluctuants. De ce point de vue, le champ magnétique issu des simulations est relativement différé-

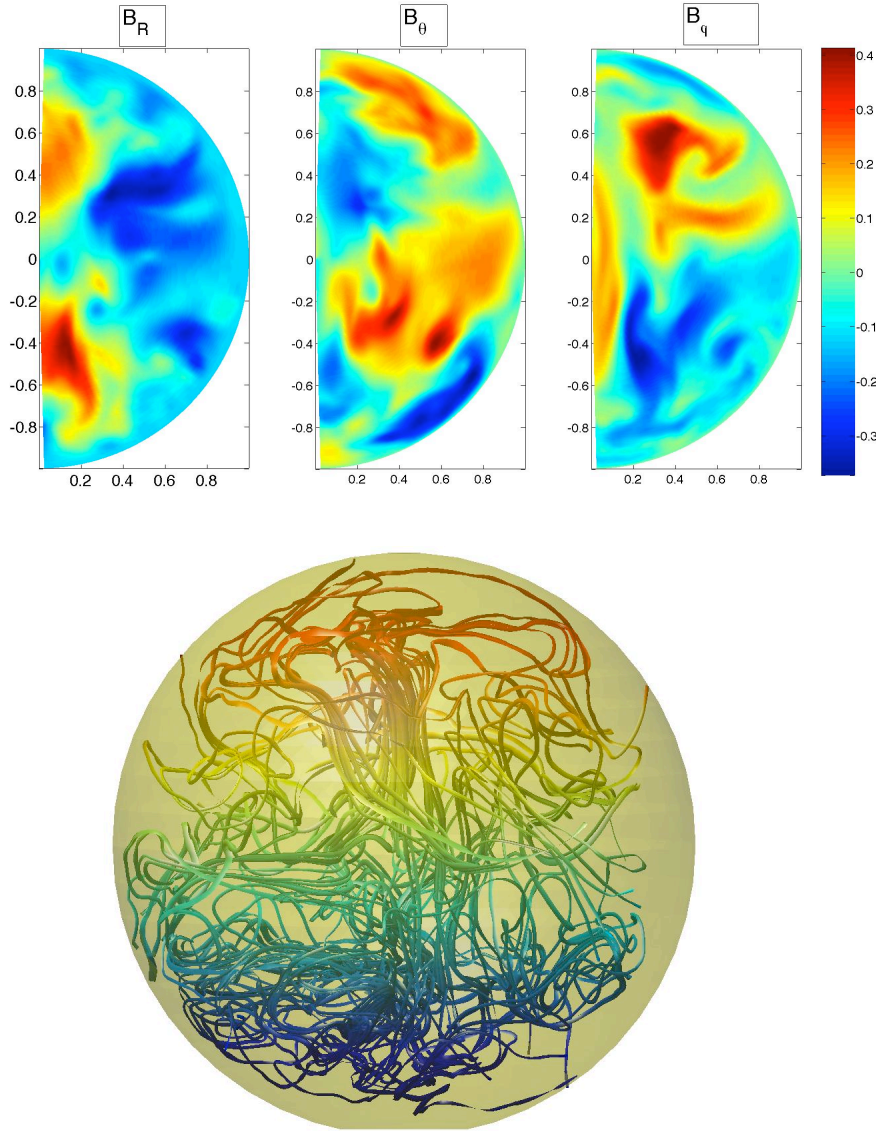


FIG. 4.19: Structure de l'écoulement pour $Re = 2500$. En haut : coupe dans un plan méridien montrant les trois composantes de vitesse. En bas : lignes de courants du champ de vitesse dans l'espace.

rent du dipole observé expérimentalement. En revanche, dans le régime turbulent, le champ magnétique semble plus proche du champ de l'expérience VKS. La transition entre les deux régimes magnétiques n'est pas très claire, et il est difficile de déterminer exactement pour quels Re celle-ci se produit. La figure 4.21 montre quelques simulations réalisées au-delà de $Re = 300$. On distingue les simulations menant à une amplification du champ par effet dynamo de celle où l'écoulement n'est pas capable d'engendrer un champ magnétique. On voit que l'effet des fluctuations a un effet clair sur le seuil de l'instabilité dynamo. Les fluctuations turbulentes semblent inhiber la génération du champ magnétique, ce qui se traduit par une augmentation du seuil critique Rm_c de la dynamo avec Re . Pour l'intervalle de nombres de Rey-

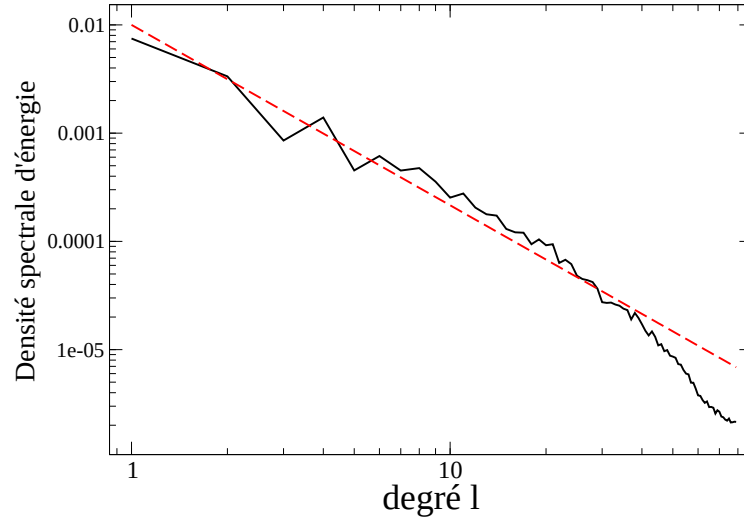


FIG. 4.20: Spectre d'énergie cinétique obtenu à partir d'une simulation réalisée pour $Re = 2000$. La ligne en pointillé rouge est un ajustement de la zone inertielle avec la loi de puissance $k^{-5/3}$.

nolds étudiés, c'est-à-dire pour $300 < Re < 4000$, il n'a pas été possible d'observer une saturation de cette augmentation du seuil. Pour $Re > 400$, il semble exister un nombre de Prandtl magnétique critique $Pm_c \sim 0.5$ au-dessous duquel un effet dynamo n'est pas possible. Dans les travaux de Scheckochihin et al [77], [35] et Ponty et al [70], cette augmentation du seuil pour les dynamos turbulentes est également observée. Dans ces travaux, les auteurs montrent qu'une saturation de l'effet à très haut Re semble se produire, éliminant l'hypothèse d'un nombre de Prandtl magnétique critique pour l'effet dynamo.

Pour $Pm > Pm_c$ et $Re > 200$, on observe la génération d'un champ magnétique à partir d'un écoulement turbulent. La structure exacte de ce mode magnétique turbulent change légèrement selon le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl magnétique. À la limite de la transition vers la turbulence, certains modes de vitesses, en particulier les composantes $m = 1$ et $m = 2$ de l'écoulement, deviennent instables en l'absence de champ magnétique. Nous avons déjà mis en avant à la section précédente le rôle important que joue le mode de vitesse $m = 2$ dans la génération du dipole axial. Toutefois, en régime laminaire, ce mode est uniquement excité en présence du dipole équatorial.

La figure 4.22 montre une simulation pour laquelle le mode de vitesse $m = 2$ est excité hydrodynamiquement. Sur cette figure, la simulation est réalisée pour $Re = 210$, très près de la transition vers la turbulence. On voit que le système gé-

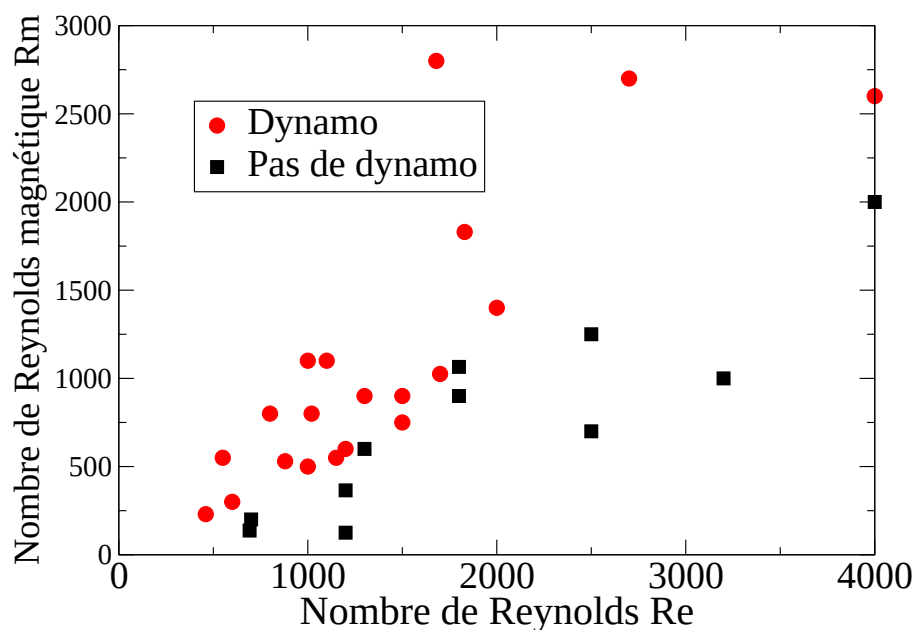


FIG. 4.21: Diagramme de phase $Rm-Re$. On montre quelques simulations réalisées dans le régime turbulent. Les ronds indiquent des simulations dynamos tandis que les carrés indiquent que le champ magnétique décroît.

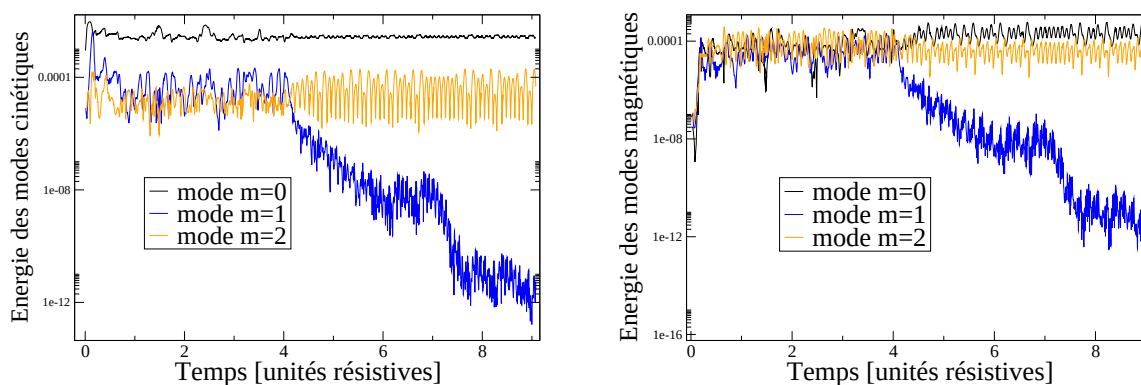


FIG. 4.22: Évolution temporelle des champs cinétique et magnétique pour $Re = 210$ et $Pm = 1$. À gauche : champ de vitesse. À droite : champ magnétique. On note la transition brutale se produisant vers $t \sim 4$ menant à un champ magnétique dépourvu de composante équatorial.

nère des champs cinétiques et magnétiques relativement complexes, avec un niveau de fluctuation non-nul. Le champ magnétique est très peu axisymétrique du fait de la contribution de nombreux autres modes, notamment un dipole équatorial. L'écou-

lement, bien que dominé par la composante axisymétrique, présente également des écarts à l'axisymétrie via les modes de vitesses $m = 1$ et $m = 2$. Cependant, après environ 4 temps résistifs, l'état du système change brutalement. La composante $m = 1$ de la vitesse et la composante équatorial du champ magnétique s'effondrent. L'écoulement n'est alors dominé que par les composantes $m = 0$ et $m = 2$, instables hydrodynamiquement. Le champ magnétique résultant est un dipole axial, associé à une composante $m = 2$. Dans ce régime faiblement turbulent, le mode de vitesse $m = 2$ semble être à l'origine du dipole axial. Puisque ce mode est linéairement instable, on voit que le dipole équatorial n'est plus requis comme dans le régime laminaire. Il en résulte un champ magnétique fluctuant mais très axisymétrique, où la contrainte du théorème de Cowling est assurée par la composante $m = 2$. Ce mode de vitesse $m = 2$ joue le même rôle que la perturbation $m = 8$ étudiées au chapitre précédent dans la génération du dipole axial. On notera toutefois que les perturbations émergent ici naturellement à partir des bifurcations hydrodynamiques plutôt que d'être imposées artificiellement.

Pour des nombres de Reynolds plus important, les mécanismes de la génération du champ deviennent moins clairs, à mesure qu'apparaissent des structures d'échelle plus réduite. Le dipole équatorial est en général de valeur moyenne nulle mais fluctue énormément, de sorte qu'une partie importante de l'énergie se trouve sur ce mode. L'écoulement présente également d'autres composantes non-axisymétriques en plus du mode de vitesse $m = 2$, et l'induction excite de nombreux modes non-axisymétriques dans le champ magnétique. D'une manière générale, ces modes magnétiques non-axisymétriques se contentent de fluctuer autour de zéro. Le champ magnétique obtenu reste donc un dipole axial, mais présentant un degré important de fluctuations. Un exemple typique est donné à la figure 4.23.

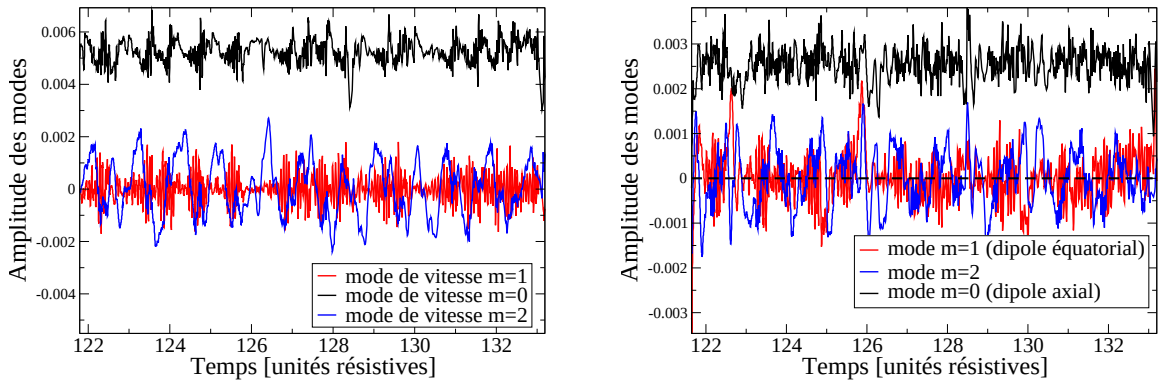


FIG. 4.23: Évolution temporelle de l'amplitude des champs cinétique et magnétique pour $Re = 300$ et $Pm = 0.6$, en $r = a/2$ (on montre l'amplitude associée aux harmoniques sphériques correspondantes). A gauche : champ de vitesse. A droite : champ magnétique. On note la génération d'un champ magnétique très fluctuant, dominé par un dipole axial.

La figure 4.24 montre la structure spatiale correspondant à la simulation pour $Re = 300$ et $Pm = 0.6$. Malgré les composantes non-axisymétriques présentes au sein du champ magnétique, le champ est dominé par un dipole axial, aligné avec l'axe de rotation des disques. On note également sur cette figure l'aspect fluctuant du champ magnétique.

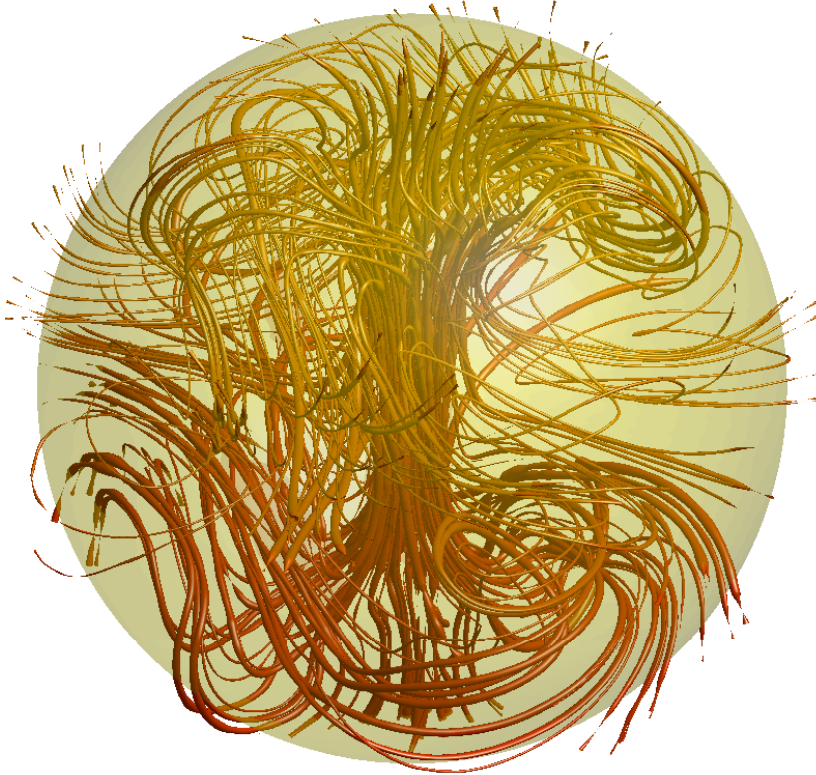


FIG. 4.24: Lignes de champs magnétiques dans une simulation typique, pour $Re = 300$ et $Pm = 0.6$. On note que le champ magnétique est assez fluctuant mais principalement axisymétrique. La structure est un dipole axial associé avec un fort champ toroïdal.

Dans les simulations réalisées pour $Re < 800$, le dipole axial engendré est stationnaire. Alors que le dipole équatorial fluctue autour de la valeur d'origine, le dipole axial ne subit pas de renversements. Cette observation est en accord avec l'expérience VKS. Nous verrons dans la prochaine section que des renversements se produisent pour ces Re uniquement lorsque l'on brise la symétrie R_π de l'écoulement. Pour $Re > 800$, la dynamique et la structure magnétique sont légèrement différentes. En effet, on observe des taux de fluctuations très importants et la structure axiale du champ est moins claire. En particulier, le dipole équatorial présente une amplitude plus importante. Dans ce cas, la polarité du dipole axial se renverse aléatoirement durant la simulation, même en contra-rotation exacte. La figure 4.25 montre un signal typique, pour $Re = 1800$ et $Pm = 1$.

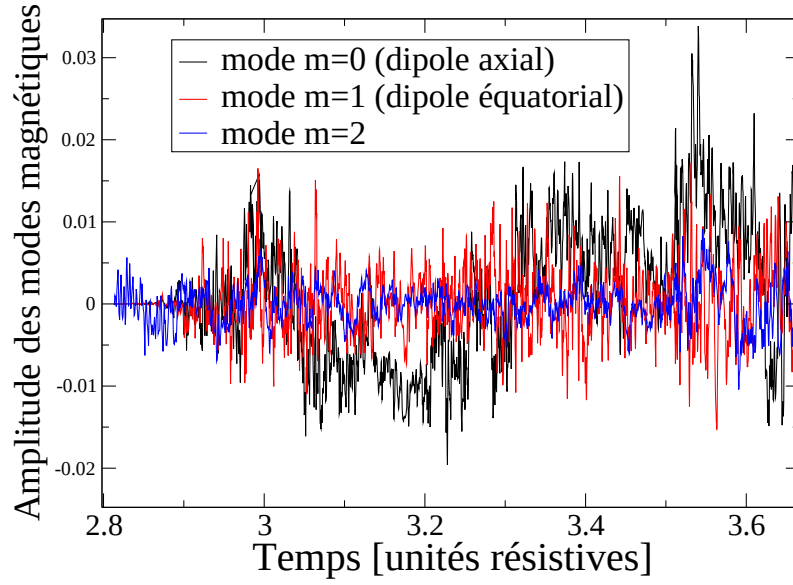


FIG. 4.25: Évolution temporelle de quelques modes magnétiques pour une simulation avec $Re = 1800$ et $Pm = 1$. On note l'aspect très fluctuant du champ et les renversements chaotiques de la polarité du dipole axial.

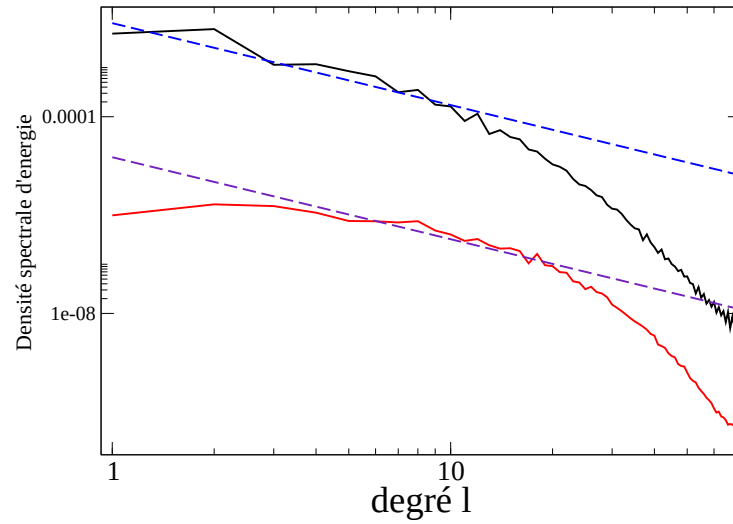


FIG. 4.26: Comparaison des spectre de l'énergie magnétique (en rouge) et de l'énergie cinétique(en noir) pour une simulation à $Re = 1800$. Les courbes en pointillés indiquent des ajustements en $k^{-5/3}$. La simulation est réalisée pour $Pm = 1$.

On voit également sur cette figure que la valeur moyenne du dipole axial durant une polarité donnée est relativement faible et du même ordre de grandeur que les fluctuations du dipole équatorial. Si l'on effectue une moyenne de l'ordre d'un dixième de temps résistif, ces fluctuations disparaissent et on retrouve une structure dipolaire identique à celle de la figure 4.24. Le niveau de fluctuations magnétiques diminue légèrement avec le nombre de Prandtl magnétique. Toutefois, à cause de l'augmentation du seuil dynamo avec la turbulence, il n'est pas possible d'obtenir des simulations à faible Pm . La figure 4.26 compare les spectres magnétique et cinétique pour une simulation à $Re = 1800$ et $Pm = 1$. On voit qu'il est difficile de conclure sur une loi d'échelle pour la cascade d'énergie du champ magnétique.

Ces simulations montrent que les fluctuations turbulentes modifient le processus dynamo. On voit l'apparition d'une dynamique et d'une structure très différentes lorsque le champ de vitesse bifurque vers un état turbulent. De plus, le seuil de l'instabilité dynamo est fortement affecté par les fluctuations. En effet, nos simulations suggèrent une augmentation du seuil en fonction de Re telle qu'il apparaît un nombre de Prandtl magnétique critique Pm_c pour la dynamo. Les dynamos les plus turbulentes obtenues, avec $Pm \sim 1$, sont par conséquent assez différentes du champ magnétique observé dans l'expérience VKS. Pour les nombres de Reynolds plus faibles, les fluctuations affectent moins la dynamo et les approches numériques et expérimentales présentent plus de similarités. En particulier, pour $200 < Re < 800$, il est possible d'obtenir des dynamos turbulentes à des Pm inférieurs à 1, ce qui est plus réaliste pour décrire la dynamique du champ. Dans la prochaine section, nous étudions ce régime afin de comprendre les mécanismes conduisant aux renversements du champ magnétique.

4.4.3 Dynamique de renversements

Comme nous l'avons vu précédemment, un des aspects les plus intéressants concernant les dynamos naturelles est leur capacité à effectuer des renversements chaotiques ou des oscillations périodiques du champ magnétique. Nous avons vu en introduction que le champ magnétique de la Terre est un dipole axial dont la polarité s'est très fréquemment renversée au cours de son histoire. De plus, ces renversements semblent apparaître de manière complètement aléatoire, et de ce fait impossibles à prédire. Il a été montré au chapitre 2 que cette caractéristique du champ magnétique se retrouve dans l'expérience VKS, au moins pour certains régimes de paramètres. Les simulations numériques effectuées au chapitre 3 nous ont permis de comprendre de manière simple l'apparition de ces régimes dépendants du temps à partir de solutions stationnaires. Toutefois, cette approche très simplifiée présente plusieurs défauts. Le champ de vitesse est complètement imposé et prescrit, la saturation du champ magnétique n'est pas prise en compte, et la linéarité de l'équation d'induction n'autorise qu'un comportement périodique du champ magnétique. L'approche numérique de ce chapitre est beaucoup plus complète et laisse espérer une descrip-

tion plus proche de la réalité, notamment grâce aux non-linéarités et à la turbulence du fluide.

D'un autre côté, la complexité d'un écoulement turbulent peut nous laisser craindre une complication des mécanismes à l'origine de la dynamique du champ magnétique. Il s'agit là d'une question fondamentale, qui se généralise à l'ensemble des instabilités en présence de bruit : la dynamique complexe d'un système fortement fluctuant (en présence d'un écoulement turbulent dans le cas de la dynamo) peut-il être décrit par des mécanismes simples reposant sur les outils classiques de la théorie des bifurcations ? Et si oui, pourquoi et dans quelles limites ? Le modèle de basse dimension proposé par Pétrélis et Fauve, esquissé au chapitre 2 et qui semble s'appliquer aux simulations du chapitre 3, repose justement sur l'hypothèse que les détails de l'écoulement turbulent jouent peu de rôle dans les renversements. Ceci permet d'envisager l'application de cette description non seulement à l'expérience VKS, mais également dans le cas de la dynamique du champ magnétique de la Terre, malgré les grandes différences entre ces deux systèmes.

Nous avons donc effectué des simulations numériques en cherchant à obtenir des renversements du champ magnétique. Expérimentalement, les régimes dépendants du temps sont obtenus lorsque la symétrie R_π de l'écoulement est brisée, c'est-à-dire lorsque une différence de rotation est introduite entre les deux disques. Numériquement, il suffit d'augmenter le forçage volumique associé à un disque. En pratique, on introduit donc la transformation $\mathbf{F} \rightarrow C\mathbf{F}$ dans l'expression 4.28, avec $C > 1$ uniquement dans le cas $z > 0$, tandis que le forçage est maintenu identique pour $z < 0$. On dispose ainsi d'un paramètre C contrôlant l'écart à la contra-rotation exacte.

Renversements pour $Pm=1$

L'introduction d'une dissymétrie dans le forçage est très efficace pour créer des renversements du champ magnétique. On montre l'évolution typique du champ magnétique à la figure 4.27. Pour cette simulation, on a choisi un nombre de Reynolds relativement faible $Re = 220$, mais pour lequel l'écoulement est déjà turbulent. Le nombre de Prandtl magnétique est $Pm = 1$, et la différence de rotation entre les deux disques est $C = 1.5$. Cette modification dans l'écoulement de von Karman $s_2^0 + t_2^0$ génère une forte composante $s_1^0 + t_1^0$, brisant la symétrie R_π .

L'amplitude du dipole axial dans cette simulation est représentée en noir. On voit que le champ magnétique est fortement fluctuant. L'introduction d'une différence de rotation entre les deux disques fait apparaître un régime de renversements du dipole axial. Sur la figure 4.27, de tels renversements se produisent par exemple pour $t = 100.6$, $t = 107.8$ et $t = 110.5$. On note le caractère chaotique de ces renver-

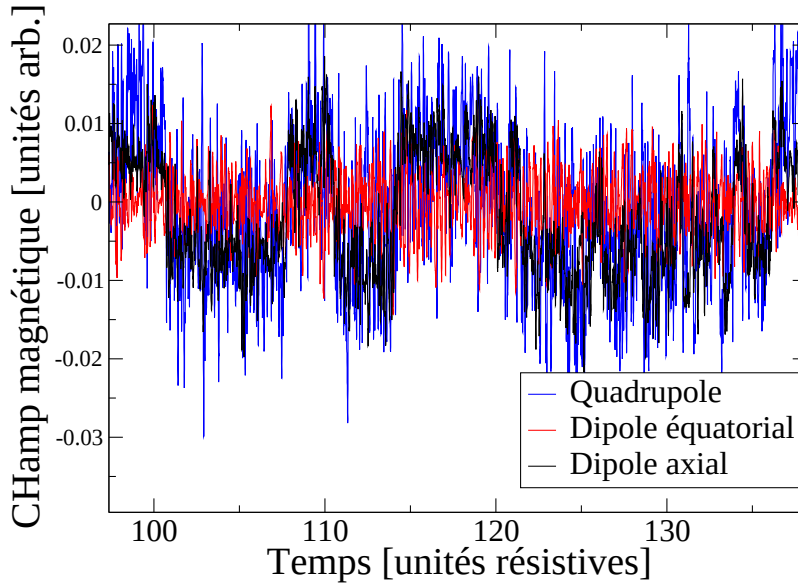


FIG. 4.27 : Évolution temporelle des modes magnétiques pour $Rm = 220$, $Pm = 1$ et $C = 1.5$. En noir : composante dipolaire $m = 0$. En rouge : partie équatorial du champ magnétique ($m = 1$). En bleu : quadrupole axial $m = 0$.

sements, et la durée d'un renversement est apparemment très courte devant le temps durant lequel le champ magnétique garde une polarité donnée. Tandis que le champ magnétique semble capable de garder une polarité donnée pendant une dizaine de temps résistifs, le renversement du dipole ne dure pas plus d'un temps résistif magnétique. On voit très nettement l'effet de la turbulence hydrodynamique dans ces simulations, provoquant un fort taux de fluctuations lorsque le dipole se trouve dans une polarité donnée. Le signal montre également qu'une partie non-négligeable de l'énergie magnétique est portée par la composante équatoriale $m = 1$. Toutefois, aucune structure cohérente ne peut être distinguée, et l'amplitude du dipole équatorial se contente de fluctuer autour de zéro. La phase de ce mode n'est d'ailleurs jamais fixe, et fluctue aléatoirement. Enfin, on observe d'intéressants renversements avortés du dipole axial, par exemple pour $t = 102.5$ et $t = 126$. Durant ces événements, parfois appelés excursions, l'intensité du champ magnétique commence à décroître très nettement et celui-ci semble vouloir se renverser, mais finalement croît à nouveau dans la direction initiale et garde la même polarité (voir la figure 4.28 en $t = 102.5$).

On retrouve dans cette simulation certaines caractéristiques également observées dans l'expérience VKS et pour le champ magnétique terrestre : dipole axial, renversements chaotiques, excursions, champ fortement fluctuant sont autant d'accords entre cette modélisation et les données observationnelles et expérimentales.

L'expérience VKS, pour laquelle de nombreuses données sont disponibles, permet de contraindre les différents modèles possibles concernant les renversements chaotiques du champ et de décider de la pertinence des mécanismes de renversement se produisant ici. Il s'agit d'une interaction très intéressante, beaucoup moins évidente lorsqu'il s'agit de comparer des simulations de géodynamo et les données d'observations géomagnétiques. Une comparaison directe de nos simulations avec l'expérience fait ainsi apparaître des différences nettes avec le champ magnétique observé expérimentalement.

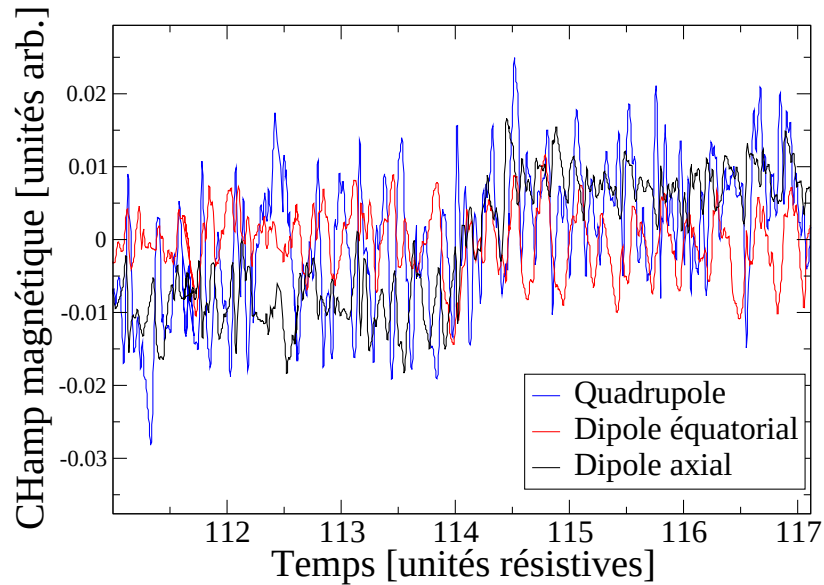


FIG. 4.28: Agrandissement de la figure 4.27 autour d'un renversement donné. On notera le caractère très fluctuant des modes magnétiques.

Le champ magnétique de l'expérience VKS possède une forte composante quadrupolaire lorsque les disques tournent à des vitesses différentes. En particulier, pendant un renversement, on observe un transfert vers un quadrupole axial lorsque le dipole s'annule. La figure 4.28 permet d'apprécier la différence entre l'expérience et nos simulations. Au contraire de VKS, la simulation présente d'importantes fluctuations du dipole équatorial. De plus, durant un renversement, il n'y a aucun transfert clair vers la partie quadrupolaire du champ magnétique. On semble assez loin du mécanisme de basse dimensionalité impliquant une bifurcation noeud-col entre dipole et quadrupole.

Renversements pour Pm différent de 1

Dans cette approche, on remarque que de nombreux paramètres sont loin de la réalité. Si le nombre de Reynolds magnétique utilisé ici a une valeur du même ordre de grandeur que dans l'expérience, ce n'est pas le cas du nombre de Reynolds Re ou du nombre du Prantl magnétique Pm . Dans ces simulations, on utilise des nombre de Reynolds tels que le système se trouve au-dessus du seuil hydrodynamique de turbulence. Les valeurs sont encore plusieurs ordres de grandeur au-dessous de la réalité, mais il est au moins possible d'obtenir un écoulement fluctuant et chaotique, à l'image de la vitesse réelle. Dans le cas du nombre de Prandtl magnétique, la situation est identique. Effectivement, dans les métaux liquide, le nombre de Prandtl magnétique est très petit, de l'ordre de 10^{-6} . Il existe au sein du système une forte séparation dans les échelles de temps relatives aux champs magnétiques et cinétiques. Pour $Pm = 1$, aucun découplage n'est introduit, et il est donc nécessaire d'avoir des simulations avec des valeurs plus petites. Il est en général très difficile numériquement d'obtenir des valeurs de Pm significativement différentes de l'unité, introduisant différentes échelles de temps dans le problème. Effectivement, cela requiert d'avoir un dt suffisamment petit pour décrire convenablement les échelles de temps rapides du champ de vitesse, mais il faut alors effectuer l'intégration numérique sur de longues périodes, afin de suivre les échelles de temps lentes du problème magnétique. De plus, nous avons mis en évidence une augmentation sévère du seuil lorsque le nombre de Reynolds est augmenté, rendant impossible l'observation de la dynamo à faible Pm (voir figure 4.5). Malgré cela, nous allons voir qu'un écart à $Pm = 1$, même faible, suffit à changer le comportement du champ durant les inversions.

On a réalisé des simulations identiques à la précédente, mais pour $Pm = 0.5$, introduisant une faible distinction entre les échelles de temps visqueuses et ohmiques. L'évolution temporelle des modes magnétiques pour $Pm = 0.5$, $C = 1.5$ et $Re = 330$ est représentée sur la figure 4.29.

Le signal temporel semble être différent de celui observé précédemment. On peut noter tout d'abord que le quadrupole présente un rapport fluctuations sur valeur moyenne plus petit durant la simulation, et se renverse nettement avec le dipole axial. Le dipole équatorial semble toujours fluctuer autour de zéro, mais avec un niveau de fluctuations plus faible. La transition entre les deux polarités du champ magnétique est également plus brutale, et la valeur moyenne du champ magnétique dans une polarité donnée est bien définie, malgré le haut niveau de fluctuations. On observe également quelques excursions assez nettes.

Ces simulations mettent une fois de plus en avant l'effet des fluctuations hydrodynamiques due à la turbulence de l'écoulement. Il existe une manière simple de relier l'apparition de renversements aux fluctuations turbulentes. Il est par exemple

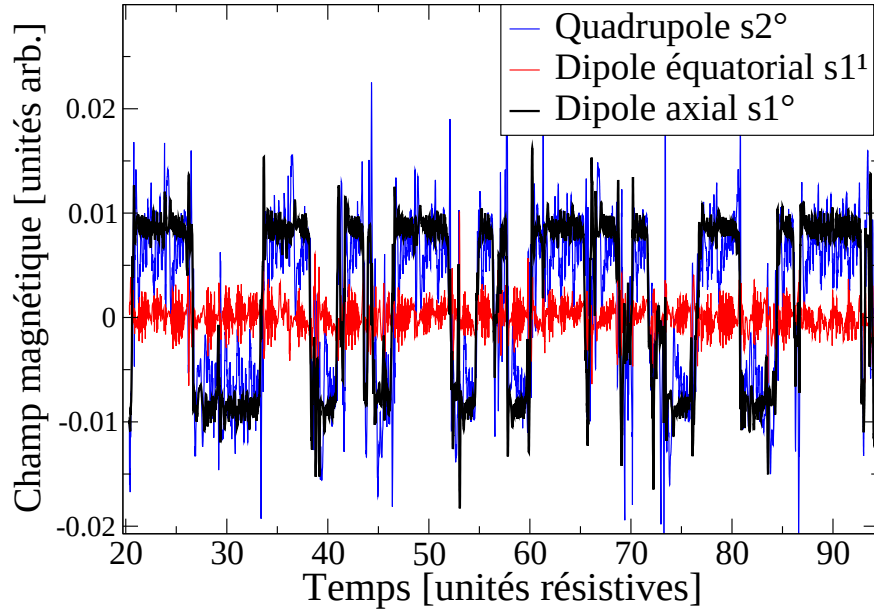


FIG. 4.29: Évolution temporelle du dipole axial magnétique (noir), du quadrupole axial (bleu) et du dipole équatorial (rouge). Simulation effectuées pour $Re = 330, Pm = 0.5$ et $C = 1.5$.

tendant d'imaginer que lorsque le champ magnétique est soumis à d'importantes fluctuations, celui-ci explore spontanément l'état opposé : un système soumis à un taux de fluctuations hydrodynamiques plus important provoquant des renversements spontanés du champ magnétique plus fréquents. En fait, il semble que ce ne soit pas le cas dans la modélisation numérique présentée ici. On accroît par exemple le nombre de Reynolds de la simulation présentée à la figure 4.29, passant de $Re = 330$ à $Re = 360$. Dans le même temps, on choisit également d'augmenter le paramètre C de $C = 1.5$ vers $C = 2$. Le résultat est montré à la figure 4.30. On voit sur cette figure que l'augmentation du nombre de Reynolds provoque un taux de fluctuations plus important, due à l'accroissement du niveau de turbulence hydrodynamique. Pour autant, le champ magnétique semble très stable dans une polarité donnée, et le taux de renversement dans cette simulation est plus faible. On a ici un exemple typique qui montre que le paramètre C contrôlant la brisure de la symétrie équatoriale R_π du problème joue un rôle plus important que l'amplitude des fluctuations du champ magnétique.

Pour cette valeur de $Pm = 0.5$, il est intéressant de comprendre dans quelle région de l'espace des paramètres les renversements se produisent. Nous avons vu qu'une étonnante particularité des renversements de l'expérience VKS est qu'ils apparaissent dans de petites poches de l'espace des paramètres. Dans les simulations

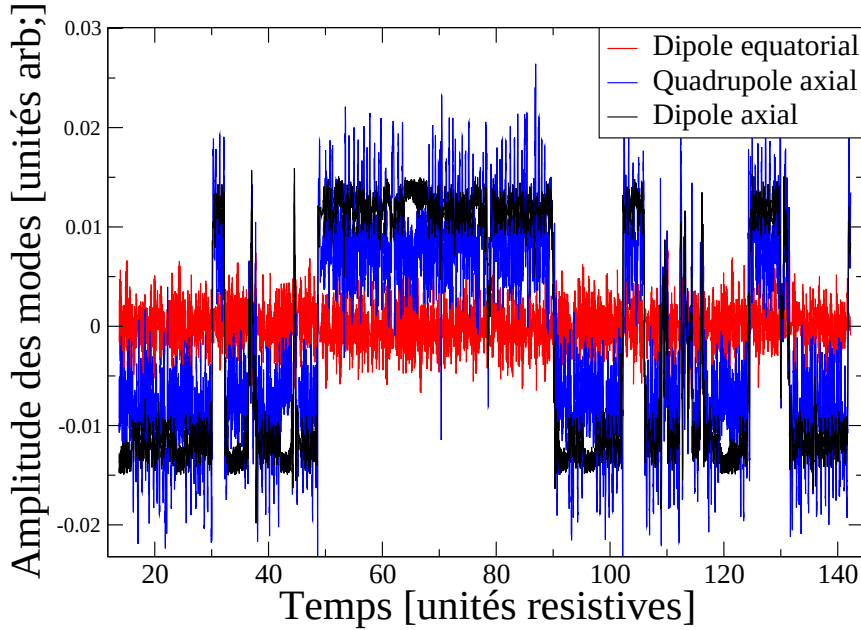


FIG. 4.30: Évolution temporelle du dipole axial magnétique (noir), du quadrupole axial (bleu) et du dipole équatorial (rouge). Simulation effectuées a $Re = 360, Pm = 0.5$ et $C = 2$.

numériques réalisées ici, les renversements du champ magnétique ne semblent se produire que pour $1.2 < C < 2.5$.

Rôle du nombre de Prandtl magnétique

Nous venons de voir qu'un changement dans la valeur du nombre de Prandtl magnétique, même léger, induit une modification claire de la dynamique du champ magnétique. Cet effet du nombre de Prandtl magnétique peut s'avérer crucial pour la compréhension des renversements du champ magnétique terrestre. En effet, la plupart des simulations effectuées en géodynamo utilisent des nombres de Prandtl magnétique de l'ordre de l'unité, ou légèrement plus petits. Pourtant, dans la réalité, $Pm \sim 10^{-6}$, ce qui a d'importantes conséquences : on est en présence d'un système où le champ magnétique est un million de fois plus diffusif que le champ de vitesse. D'un point de vue dynamique, même si le champ de vitesse est à l'origine de la génération du champ magnétique, il semble donc assez naturel que le dipole axial interagisse avec des modes magnétiques plutôt qu'avec des modes de vitesse, infiniment plus fluctuant et rapidement variables. De plus, le système se trouve en général relativement proche du seuil d'instabilité dynamo, ce qui signifie qu'il y a peu de modes magnétiques excités. Dans ces conditions, on s'attend à ce que la

dynamique du champ magnétique soit de basse dimensionalité, n'impliquant qu'un nombre limité de modes magnétiques. La figure 4.31 tente d'illustrer de manière plus quantitative ce phénomène. Sur cette figure, on utilise des simulations numériques dans lesquelles on observe des renversements chaotiques du champ magnétique, dominé par le dipole axial. On calcule alors la corrélation temporelle r_{xy} de ce dipole avec différents modes magnétiques et cinétiques. On utilise pour cela la formule de corrélation suivante pour deux modes x et y

$$r_{xy} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}} \sigma_{xy} , \quad (4.33)$$

où σ_{xy} est la covariance des deux variables définies par

$$\sigma_{xy} = \langle (x - \langle x \rangle) (y - \langle y \rangle) \rangle , \quad (4.34)$$

avec $\langle x \rangle, \langle y \rangle$, les valeurs moyennes (moyennes temporelles) des variables x et y .

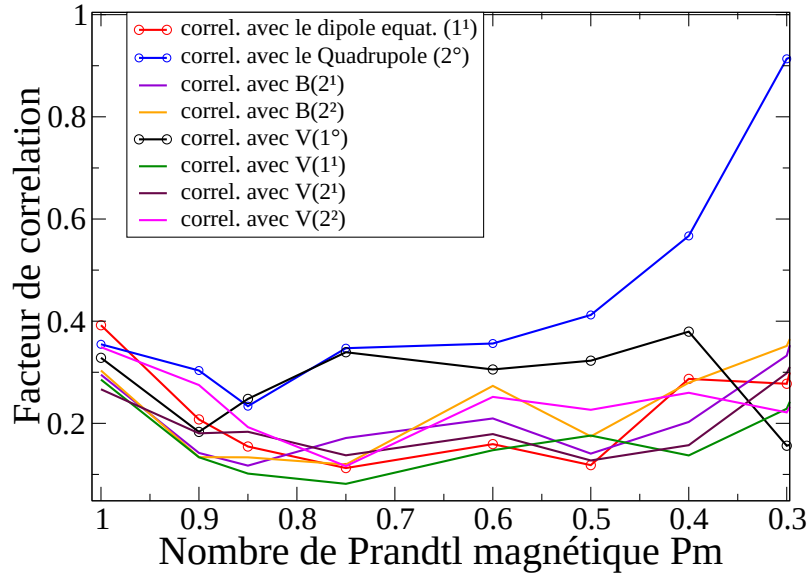


FIG. 4.31: Facteur de corrélation temporelle du dipole axial avec différents modes en fonction du nombre de Prandtl magnétique.

La figure 4.31 montre donc l'évolution du facteur de corrélation en fonction du nombre de Prandtl magnétique. On voit que pour $Pm = 1$, toutes les corrélations ont plus ou moins la même valeur et le dipole axial semble être corrélé aussi bien avec les modes magnétiques qu'avec les modes cinétiques. Ceci illustre probablement la nature complexe des renversements observés pour $Pm = 1$. A mesure que l'on diminue Pm , la plupart de ces corrélations diminuent légèrement puis restent à peu près constantes. Au contraire, on observe une augmentation continue de la corrélation avec le quadrupole axial. Ainsi, pour les simulations à plus petits Pm , on

observe une dynamique dominée par la corrélation entre le dipole et le quadrupole, et dans laquelle les modes de vitesse de petites échelles semblent moins impliquées. En diminuant le nombre de Prandtl magnétique, on observe une transition entre un régime complexe à haut Pm vers une dynamique de renversements n'impliquant qu'un nombre limité de modes. Cette observation est importante car elle suggère une approche simplifiée dans la compréhension des dynamos turbulentes : malgré la grande complexité des écoulements très chaotiques au sein du noyau terrestre ou dans l'expérience VKS, la dynamique du champ magnétique qui en résulte reste simple, car la faible valeur de Pm sélectionne une dynamique de basse dimensionalité. Dans la limite $Pm \rightarrow 0$, il est alors tout à fait justifié de considérer des modèles à deux modes magnétiques en présence de bruit, comme celui proposé par Pétrélis et Fauve. Nous allons voir qu'il existe une approche intermédiaire, où l'on prend en compte le champ de vitesse dans une description réduite, ce qui se justifie également pour des Pm inférieurs à 1.

Mécanisme des renversements magnétiques

La discussion qui précède met en avant l'émergence d'une dynamique plus simple pour les Pm légèrement plus petit que 1. Pour les simulations réalisées à $Pm = 0.5$, la structure et la forme de ces renversements sont particulièrement robustes. Sur la figure 4.32, on agrandit le signal autour d'un renversement typique. Lorsque le dipole axial s'annule lors d'un renversement, on voit que cela correspond presque toujours à un transfert vers le quadrupole, qui montre un pic d'activité. Les deux modes se renversent alors. Juste après ce renversement, le dipole atteint en général une valeur plus haute que la valeur moyenne sur laquelle il se stabilise lors d'une polarité donnée, effectuant un léger rebond.

Dans ce régime de paramètre, on note que le comportement dynamique du champ magnétique présente d'intéressantes similitudes avec les données expérimentales. Par exemple, les renversements de VKS sont systématiquement suivi d'un pic de champ magnétique plus fort que la position moyenne qui suit. De plus, il a été mis en évidence expérimentalement une compétition avec le quadrupole lors d'un renversement du champ. Ces résultats sont expliqués par le modèle d'excitabilité au voisinage d'une bifurcation noeud-col présenté aux chapitres 2 et 3. Il s'agit en quelque sorte de la version dynamique du comportement que nous avons pu observer dans les simulations cinématiques du chapitre 2 : dans ce chapitre, un transfert périodique entre dipole et quadrupole est observé lorsque la brisure de la symétrie R_π est telle que le système se trouve au-delà de la bifurcation noeud-col. Les simulations présentées ici illustrent comment des renversements chaotiques peuvent remplacer cette oscillation périodique dans une situation plus réaliste.

Lorsqu'un disque tourne plus vite que l'autre, le mode de vitesse caractérisée

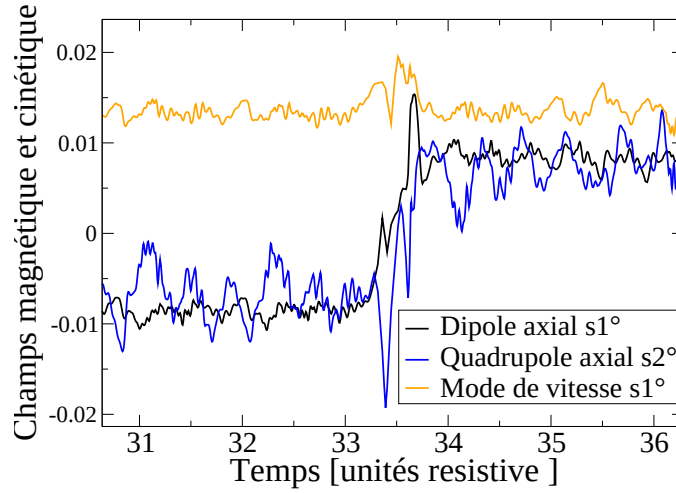


FIG. 4.32: Évolution temporelle du mode dipolaire magnétique (en noir), du mode quadrupolaire (bleu) et du mode de vitesse brisant la symétrie R_π . Simulation pour $Re = 330$, $Pm = 0.5$ et $C = 1.5$. On voit clairement le transfert vers le quadrupole durant le renversement.

par les coefficients d'harmoniques sphériques $l = 1, m = 0$ est fortement excité dans la simulation, brisant la symétrie R_π de l'écoulement $s_2^0 + t_2^0$ du au forçage 4.28. Au chapitre 2, le couplage entre dipole et quadrupole qui en résulte peut, sous certaines conditions, entraîner une bifurcation vers un régime oscillant. Cela peut nous permettre de proposer une explication pour le comportement observé dans les simulations non-linéaires : il est raisonnable d'imaginer que le système sature probablement au voisinage du point critique de bifurcation, mais légèrement au-dessous. A cause du caractère turbulent de l'écoulement, le système fluctue autour de la solution stable. De temps en temps, une fluctuation amène le système plus loin de la solution stable et se retrouve alors dans le voisinage de la solution instable, ce qui provoque l'apparition chaotique de renversements. Pendant de tels renversements, le système n'a d'autre choix que de se déplacer sur l'orbite connectant les deux états. Ceci explique ainsi la robustesse de la forme des renversements et le transfert typique entre dipole et quadrupole, suivi d'un rebond du dipole. On retrouve aussi une explication pour l'apparition de la poche de renversement. Cette région correspond à une zone où les fluctuations de vitesse sont comparables à la distance à la bifurcation noeud-col. Notons qu'il existe également des renversements dans ces simulations pour lesquels le champ n'effectue pas de transfert vers une structure quadrupolaire. Etant donné la grande valeur de Pm par rapport à la réalité, on ne s'attend pas à reproduire parfaitement le comportement de l'expérience. En particulier, il est possible que plusieurs mécanismes de renversements coexistent au sein d'une même simulation.

Sur la figure 4.32, on montre également l'évolution du mode de vitesse 1^0 . Il est effectivement intéressant d'observer l'évolution de ce mode puisqu'il s'agit de la composante de vitesse couplant dipole et quadrupole, et donc à l'origine de la dynamique de renversement. Dans l'expérience VKS, le champ de vitesse n'a pas été mesuré, et les simulations numériques permettent d'obtenir quelques indications sur son comportement. On note que chaque renversement dans la simulation est systématiquement associé à un pic d'activité sur ce mode de vitesse 1^0 . Évidemment, l'écoulement utilisé ici est turbulent, ce qui signifie que de nombreux modes de vitesses sont instables, et participent probablement aussi un peu à la dynamique du champ magnétique. Par exemple, on peut noter que le mode de vitesse $m = 1$ présente également une forte activité, et il existe parfois des pics importants lors des renversements. Toutefois, le mode 1^0 est le seul qui présente une valeur moyenne non-nulle importante, et dont le rôle peut être parfaitement intégré dans la dynamique du dipole et du quadrupole. De plus, c'est le seul autre mode avec le quadrupole qui présente une corrélation importante avec le dipole lorsque Pm est petit.

Une modélisation simple à trois modes.

Lorsque le nombre de Prandtl magnétique est suffisamment petit, le champ magnétique filtre en quelque sorte les fluctuations de vitesses de telle manière que la dynamique du système se réduit à une interaction de quelques modes de grande échelle. Cette réduction de la dimension de la dynamique offre la possibilité d'une description simplifiée du problème. Dans le modèle de Pétrélis-Fauve, la dynamique est comprise à l'aide d'un système n'impliquant que deux modes magnétiques. La brisure de symétrie y est représentée par les paramètres libres du système et l'effet de l'écoulement est pris en compte à travers un bruit arbitraire rajouté aux équations. Les simulations numériques de ce chapitre suggèrent au contraire que le mode de vitesse zonale couplant les deux modes magnétiques participe activement à la dynamique. On propose ainsi d'écrire le système dynamique le plus simple possible impliquant le dipole D , le quadrupole Q et le mode de vitesse zonale V qui brise la symétrie R_π .

Tout comme dans la section 4.3.3 de ce chapitre, on utilise des arguments de symétries afin de contraindre les termes du modèle. On utilise l'invariance de signe du champ magnétique, et la symétrie R_π : Sous cette symétrie, les modes subissent les transformations $D \rightarrow -D$, $Q \rightarrow +Q$ et $V \rightarrow -V$. En ne gardant que les termes à l'ordre quadratique au maximum, on obtient ainsi

$$\dot{D} = \mu D - VQ, \quad (4.35)$$

$$\dot{Q} = -\nu Q + VD, \quad (4.36)$$

$$\dot{V} = \Gamma - V + QD. \quad (4.37)$$

Le paramètre Γ est relié au forçage de vitesse qui brise la symétrie R_π , et est l'équivalent de $C - 1$ dans les simulations directes. Ce modèle simple a été étudié dans

différents contextes lorsque $\Gamma = 0$ par Hughes et Proctor en 1990 [31] (voir le chapitre suivant pour une présentation détaillée). Les signes des termes relatifs des coefficients quadratiques ont été choisis de sorte que le système ne diverge pas lorsque $\mu > 0$ et $\nu < 0$. Par ailleurs, les paramètres devant ces termes peuvent être mis à 1 par une mise à l'échelle appropriée des amplitudes. Un jeu d'équation similaire fut obtenu par Nozières à partir d'une troncation des équations de la MHD dès 1978 [63]. Toutefois, dans ce contexte, μ et ν étaient négatifs et il n'y avait pas d'amortissement de la vitesse, donnant une dynamique très différente.

On reconnaît finalement dans ce modèle de nombreuses similarités avec le modèle de Pétrélis-Fauve, le système reposant également sur un couplage entre dipole et quadrupole. Toutefois, dans le cas présent, dipole et quadrupole sont couplés via une troisième amplitude V plutôt qu'un paramètre libre. C'est une approche naturelle puisqu'il s'agit de la vitesse brisant la symétrie R_π . De la même manière, le terme quadratique dans l'équation pour V est assez bien justifié et s'apparente à l'effet de la force de Laplace. Il existe en revanche une différence fondamentale avec l'approche à deux modes : lorsque seul les deux modes magnétiques sont pris en compte, il est possible de décrire uniquement une transition vers des oscillations périodiques du champ, comme nous l'avons vu au chapitre deux. Si l'on veut décrire le chaos observé expérimentalement ou numériquement, il est alors nécessaire d'ajouter un bruit numérique aux équations pour prendre en compte le champ de vitesse, et notamment son aspect fluctuant. Dans ce modèle à 3 modes, la vitesse ainsi que la brisure de la symétrie sont au contraire toute deux décrites explicitement. De plus, la présence de 3 modes permet d'obtenir naturellement du chaos, sans recourir à un bruit numérique arbitraire.

Ce système possède une dynamique très riche selon les paramètres utilisés et il fera l'objet du chapitre suivant. Nous nous bornerons ici à ne montrer que quelques résultats relatifs à la modélisation des renversements chaotiques. Pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$, l'intégration numérique de ce modèle conduit par exemple à une séquence de renversements chaotiques des amplitudes D et Q (voir figure 4.33). On voit sur la figure 4.33 que ce modèle est capable de reproduire très simplement certaines des caractéristiques importantes des simulations numériques. Le champ se renverse de manière chaotique, et le temps d'un renversement est nettement plus petit que la durée de vie moyenne d'une polarité. De plus, lorsque l'on s'intéresse à un renversement en particulier, on voit que celui-ci correspond à un transfert entre quadrupole et dipole. On observe également le rebond caractéristique qui suit le basculement du champ. Ce modèle, tel qu'il est proposé ici, n'a pas vocation à reproduire parfaitement les simulations numériques observées, ni les données expérimentales. Les simulations turbulentes impliquent probablement d'autres modes, plus structurés, qui compliquent l'interprétation de la dynamique. De plus, le modèle proposé ici ne tient pas compte d'éventuelles non-linéarités cubiques qui pourraient améliorer la comparaison, ce que nous étudierions au prochain chapitre. Il est toutefois intéressant de noter que cette forme du modèle n'impliquant que les ingrédients

minimaux requis, engendre une dynamique de renversement chaotiques similaires à celle observée dans les simulations.

Contrairement au système de Lorenz, qui avec seulement trois équations couplées ne peut reproduire, même grossièrement, la dynamique des systèmes réels, le modèle réduit présenté ici semble capturer le comportement des dynamos turbulentes et les renversements du champ magnétique associés. Nous avons vu que cela est possible grâce aux faibles valeurs du nombre de Prandtl magnétique impliquées dans les systèmes dynamos. On peut alors se poser la question de la pertinence d'une telle description pur des objets naturels comme la Terre. Est-il possible de comprendre les résultats de la geodynamo à la lumière d'un modèle de si basse dimension, où le chaos est complètement déterministe. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'utilisation de seulement deux modes magnétiques se justifie aisément dans le cas où le système ne se trouve pas trop loin du seuil. De plus, on peut envisager d'oublier en première approximation l'effet précis du champ de vitesse de petite échelle dans la limite des petits Pm . Au contraire, la présence d'un mode de grande échelle tel que V agissant sur des échelles de temps comparables au champ magnétique semble moins évident. Le prochain chapitre propose une étude approfondie de ce modèle simple et nous verrons comment celui-ci se compare aux renversements géomagnétiques.

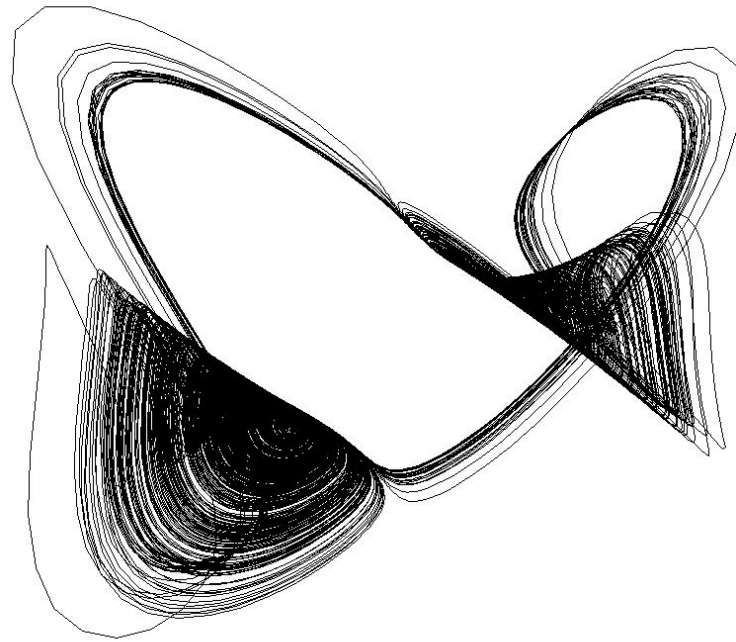
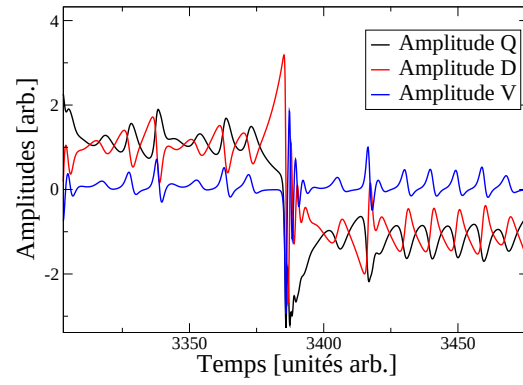
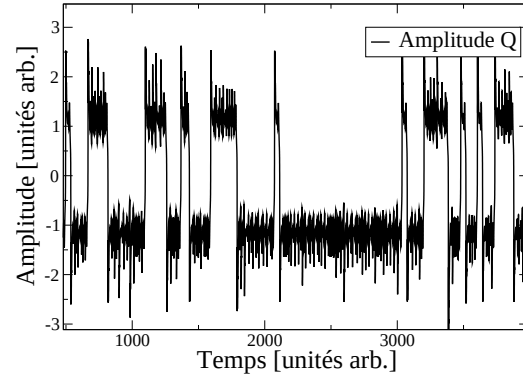


FIG. 4.33: Intégration numérique du modèle à trois modes pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. En haut : Évolution temporelle de l'amplitude Q . Au milieu : agrandissement autour d'un renversement donné. On notera le transfert entre dipole et quadrupole. En bas : trajectoire dans l'espace des phases.

Chapitre 5

Un modèle simple des renversements chaotiques.

Contents

5.1	Introduction	151
5.2	Points fixes et stabilité	153
5.3	Transition vers le chaos	155
5.4	Renversements chaotiques	159
5.4.1	Phénomène de crise et intermittence	159
5.4.2	Différents régimes dynamiques	165
5.5	Une modélisation des renversements de la géodynamo.	169
5.5.1	Compatibilité avec une dynamique déterministe.	172
5.5.2	Comparaison de la géodynamo avec un modèle de basse dimension.	177

5.1 Introduction

Les modèles simples que nous avons étudiés précédemment nous ont permis de mieux comprendre les comportements dynamiques observés dans les simulations numériques ainsi que dans l'expérience. La modélisation d'un phénomène à l'aide de quelques équations différentielles couplées est une méthode qui a été utilisée à de nombreuses occasions pour des problèmes physiques très différents. Il existe deux façons de procéder pour obtenir ces équations. Une première méthode consiste à tronquer le système en ne gardant que quelques modes. Une autre façon de faire est de se placer au voisinage d'un point de bifurcation où plusieurs modes deviennent simultanément instables. Il faut alors déterminer les équations qui gouvernent l'amplitude de ces modes. L'exemple le plus connu de la première méthode est le modèle de Lorenz, obtenu à partir du problème de la convection thermique. Ce modèle est

évidemment valide uniquement au seuil de la convection, où la troncature garde un sens. Les comportements dynamiques intéressants, comme des renversements chaotiques, ne sont observés qu'en dehors du domaine de validité du système dynamique. La seconde approche a été utilisée dans le cas de nombreuses instabilités hydrodynamiques. Cette méthode a également été appliquée à des problèmes plus variés, comme par exemple les réseaux de neurones ou justement l'effet dynamo.

Évidemment, l'obtention de tels modèles repose sur des troncatures sévères des équations primitives et il est souvent difficile de justifier cette approche. De plus, de tels systèmes ne reproduisent que très grossièrement les comportements des systèmes réels. Le problème de la dynamo au sein d'un écoulement turbulent présente de ce point de vue une particularité intéressante. La faible valeur du nombre de Prandtl magnétique et la proximité du seuil dynamo réduisent fortement les degrés de liberté du système, et peuvent conduire à une dynamique de basse dimensionalité. Nous avons ainsi proposé une description des renversements du champ magnétique à l'aide d'un système dynamique n'impliquant que trois modes en interactions. Ce modèle se distingue par la prise en compte explicite d'un mode de vitesse, en interaction avec les modes magnétiques dipolaire et quadrupolaire.

Dans ce chapitre, nous étudions en détail ce modèle simple. Les résultats préliminaires du chapitre précédent ont montré que ce modèle est capable de reproduire qualitativement les renversements chaotiques du champ magnétique obtenus dans les simulations. Il est donc primordial de bien comprendre les mécanismes à l'oeuvre dans ce modèle simple, comme l'apparition du chaos, la transition vers les renversements des modes ou encore les caractéristiques statistiques du système.

Le modèle, dans sa forme la plus simple, se présente sous la forme de trois équations couplées limitées aux non-linéarités quadratiques :

$$\dot{D} = \mu D - VQ \quad (5.1)$$

$$\dot{Q} = -\nu Q + VD \quad (5.2)$$

$$\dot{V} = \Gamma - V + QD \quad (5.3)$$

où les amplitudes D et Q peuvent être assimilées aux amplitudes du dipole et du quadrupole de champ magnétique. V s'interprète alors comme l'amplitude d'un certain mode de vitesse couplant les deux composantes de champ magnétique. Dans ce qui suit, les résultats sont évidemment indépendants d'une quelconque interprétation physique des différents termes. A la section 5.5, nous reviendrons sur l'interprétation physique de ce modèle dans le contexte de la géodynamo. On se limite pour l'instant aux ordres quadratiques et les deux paramètres μ et ν du système d'équation sont réels et positifs. Les signes relatifs des coefficients des termes non-linéaires sont tels que les solutions ne divergent pas pour ce choix des paramètres. L'amortissement de la vitesse est également important lorsqu'un seul des deux modes magnétiques est linéairement amorti. En calculant la divergence du champ de vecteurs, on voit que le système reste dissipatif tant que $\mu < 1 + \nu$: le flot est contractant. Ce système d'équation d'amplitude présente certaines similarités avec plusieurs systèmes dynamiques existant. Dans le contexte des renversements de la géodynamo, nous

avons déjà mentionné le système de Rikitake. Il s'agit du premier modèle de basse dimension cherchant à reproduire les renversements chaotiques des dynamos (1958), mais également de l'un des plus étudiés. Dans sa forme la plus simple, les équations de ce modèle sont assez proches de (5.1-5.2-5.3), à l'exception du terme d'amortissement de V qui n'est pas présent. De plus, les deux autres modes sont linéairement stables dans le modèle de Rikitake. Nozières, en 1978, a également proposé un modèle de trois équations couplées représentant la géodynamo. Ce modèle implique, comme le nôtre, deux modes magnétiques et un mode de vitesse, mais l'interprétation physique de ce modèle est différente. En effet, Nozières obtient son modèle à partir d'une troncation des équations de la MHD, et les deux modes magnétiques sont donc linéairement stables (en raison de la diffusion ohmique). Nous verrons que cette différence dans les équations conduit à des comportements radicalement différents. Enfin, le système dynamique (5.1-5.2-5.3) avec $\Gamma = 0$ est pertinent pour différents système hydrodynamiques, et a été étudié en détail dans une série d'articles par Proctor et Hughes [31],[32]. Ici encore, le paramètre Γ joue un rôle très important et change profondément la dynamique du système.

5.2 Points fixes et stabilité

On s'intéresse tout d'abord aux points fixes du système. Il existe un premier point fixe trivial que l'on note O pour lequel les amplitudes D et Q sont nulles

$$D_O = 0, \quad Q_O = 0, \quad V_O = \Gamma \quad (5.4)$$

La linéarisation des équations autour de ce point fixe donne les valeurs propres

$$\lambda_i = \frac{\mu - \nu}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\mu + \nu)^2 - 4\Gamma^2}, \quad i = 1, 2 \quad (5.5)$$

$$\lambda_3 = -1 \quad (5.6)$$

La figure 5.1 illustre les différents comportement du point fixe O en fonction des paramètres. Sur cette figure, on représente les différentes valeurs propres obtenues dans l'espace $(\mu, \delta = \mu + \nu)$, pour $\Gamma = 1$. La valeur propre triviale λ_3 indique une direction stable quelque soit les valeurs des paramètres, et vient de l'amortissement linéaire de l'amplitude V . Lorsque $\mu + \nu > 2\Gamma$, les valeurs propres sont toutes réelles. Lorsque $\mu + \nu < 2\Gamma$, les valeurs propres λ_1 et λ_2 deviennent complexes conjuguées et on observe une bifurcation de Hopf pour $\mu > \nu$. On voit donc qu'il existe un point de bifurcation de codimension 2 pour $\mu = \nu = \Gamma$. Nous verrons dans la suite que la stabilité du point fixe trivial O joue un rôle primordial dans le comportement du système dynamique.

Il existe également 4 autres points fixes non-triviaux $M_{\pm}$ et $N_{\pm}$. Deux de ces

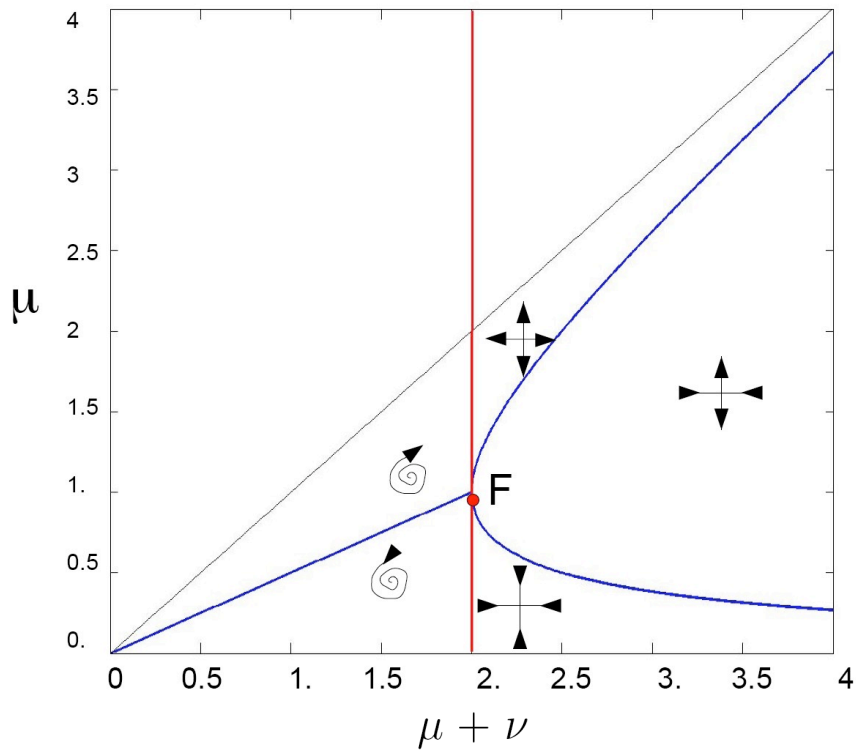


FIG. 5.1: Diagramme de stabilité du point trivial $D_O = Q_O = 0$ et $V_O = \Gamma$. F indique le point de bifurcation de codimension 2, et $\Gamma = 1$.

points fixes n'existe que pour $\sqrt{\mu\nu} - \Gamma > 0$

$$D_{M\pm} = \pm \sqrt{\nu - \Gamma \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}} \quad (5.7)$$

$$Q_{M\pm} = \pm \sqrt{\mu - \Gamma \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}} \quad (5.8)$$

$$V_{M\pm} = \sqrt{\mu\nu} \quad (5.9)$$

On trouve également deux autres points fixes

$$D_{N\pm} = \pm \sqrt{\nu + \Gamma \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}} \quad (5.10)$$

$$Q_{N\pm} = - \pm \sqrt{\mu + \Gamma \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}} \quad (5.11)$$

$$V_{N\pm} = -\sqrt{\mu\nu} \quad (5.12)$$

On note ainsi que malgré la présence du forçage Γ dans l'équation pour V , la composante V des 4 points fixes non-triviaux est indépendante de Γ . Autour des points fixes non-triviaux on a les relations de dispersion suivantes :

Pour les points $M_{\pm}$,

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \nu - \mu) + \lambda \left(\Gamma \frac{(\nu - \mu)}{\sqrt{\mu\nu}} \right) + 4\mu\nu - 4\Gamma\sqrt{\mu\nu} = 0. \quad (5.13)$$

Pour les points $N_{\pm}$,

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \nu - \mu) - \lambda \left(\Gamma \frac{(\nu - \mu)}{\sqrt{\mu\nu}} \right) + 4\mu\nu + 4\Gamma\sqrt{\mu\nu} = 0. \quad (5.14)$$

Pour $\Gamma = 0.9$, qui est le cas que l'on étudiera en détail par la suite, la linéarisation autour des points fixes non-triviaux donne une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexe conjuguées. La valeur propre réelle est toujours négative de sorte que les points fixes possèdent une direction stable. Les valeurs complexes conjuguées ont une partie réelle positive ou négative selon les paramètres μ et ν . Par exemple, lors des renversements vus à la fin du chapitre précédent, ces points sont instables en oscillant.

5.3 Transition vers le chaos

Il est intéressant de noter que même en l'absence d'un régime de renversements, le système présente un comportement chaotique tout en restant à proximité de l'un des points fixes. Dans cette section on étudie de quelle manière le système bifurque vers un état chaotique. On choisit de fixer les paramètres $\Gamma = 0.9$, $\nu = 0.1$ et μ est varié entre 0.15 et 0.1, ce qui permet d'étudier les principaux comportements du modèle.

La figure 5.2 montre le comportement du modèle pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. Il s'agit du régime de renversements chaotiques du champ vu à la fin du chapitre précédent. Afin de mieux comprendre les mécanismes menant à cette dynamique, il est nécessaire de réduire la dimension du problème. Cette réduction est obtenue en définissant une section de Poincaré dans l'espace des phases. Pour cela, on définit le plan contenant la droite passant par les deux points fixes N_+ et N_- et perpendiculaire avec le plan $V = 0$. L'intersection de ce plan avec le plan (D, Q) nous donne une droite graduée avec l'origine au point O. L'application du

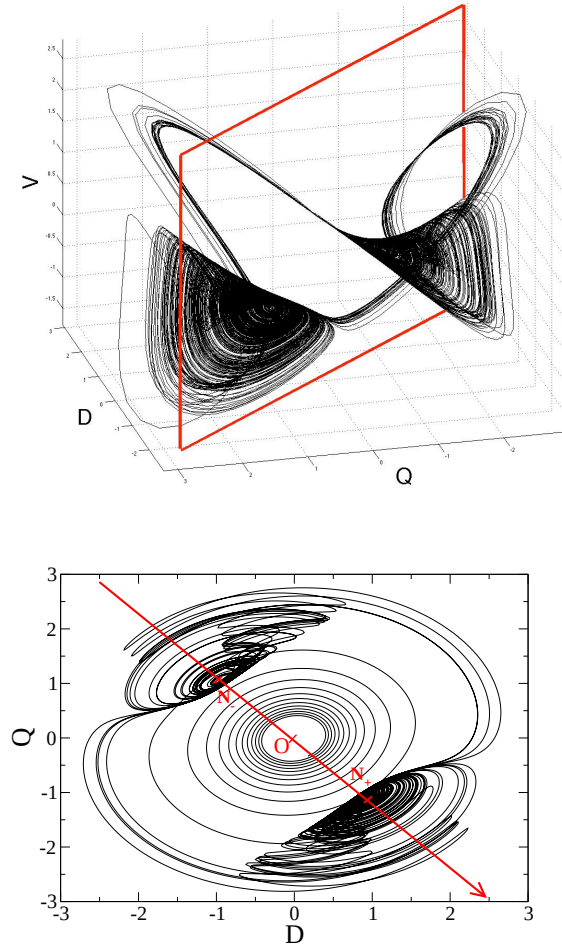


FIG. 5.2: Intégration numérique du modèle pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. On voit en rouge la section de Poincaré utilisé pour l'application du premier retour.

premier retour est définie par l'intersection de la trajectoire du système avec cette droite, x^{n+1} , en fonction de l'intersection précédente, x^n . La figure 5.3 montre le diagramme de bifurcation de x^n en fonction de μ . L'étude se limite pour l'instant uniquement à la région entourant le point fixe N_+ . Dans l'éventail des paramètres explorés ici, le système se trouve dans le cas où les valeurs propres λ_1 et λ_2 du point fixe O sont complexes conjuguées et avec une partie réelle positive. O est donc instable et oscillant. Lorsque $\mu > 0.2$, on observe une solution stationnaire correspondant au point fixe N_+ . Pour $0.138 < \mu < 0.2$, une orbite périodique stable apparaît autour de la solution N_+ . Pour ces paramètres, la linéarisation indique une valeur propre stable et deux valeurs propres complexes conjuguées à valeurs réelles positives. On notera qu'une telle orbite périodique correspond à un point fixe dans l'application de Poincaré. La figure 5.4 montre l'évolution de l'application du premier retour en fonction de μ (à gauche). On y montre également les trajectoires associées dans l'espace des phases D, Q (à droite). A partir de $\mu = 0.138$, on observe dans le diagramme de bifurcation 5.3 une série de bifurcations fourches correspondant

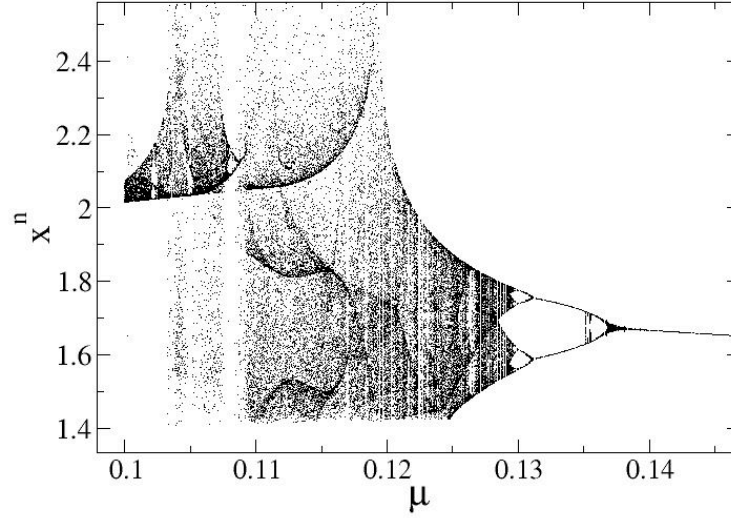


FIG. 5.3: Diagramme de bifurcation de x^n en fonction de μ à partir de l'application du premier retour. Lorsque μ décroît de 0.15 jusqu'à 0.1, on observe une transition vers le chaos par doublement de période.

à des doubléments de période successifs de l'orbite périodique entourant N_+ . Ces doubléments de période dans l'application du premier retour sont illustrés sur la figure 5.4. Sur l'application du premier retour, on y voit le point fixe obtenu pour $\mu = 0.14$ devenir le centre d'une orbite pour $\mu = 0.135$. Dans l'espace des phases (D, Q) , cela correspond au dédoublement de l'orbite périodique stable entourant M_+ . Pour $\mu = 0.13$, le doublement de période de l'orbite de l'application du premier retour obtenu pour $\mu = 0.135$ est clairement visible. Dans l'espace (D, Q) , on observe donc des trajectoires plus compliquées, constituées de quatre orbites périodiques enchevêtrées.

La description que l'on donne ici correspond en fait au scénario classique de route vers le chaos dit 'par doubléments de période'. Ce type de transition s'observe dans de nombreuses applications discrètes, comme l'application de Hénon ou encore l'application logistique. Dans tous les cas, on observe la transition suivante : à partir d'un point fixe, on observe que celui-ci se déstabilise au profit d'une orbite périodique lorsqu'un des paramètres est modifié. Cette orbite perd ensuite sa stabilité, et deux nouvelles orbites apparaissent avec une période deux fois plus grande. Il s'en suit une série de bifurcations similaires, avec à chaque fois la création de cycles de plus en plus nombreux de périodes plus longues. Le système atteint ainsi rapidement un état instable où il n'est plus possible de distinguer les différentes orbites : le système présente alors un comportement chaotique. La figure 5.5 illustre cette transition vers le chaos. On y montre l'évolution de l'exposant de Lyapunov λ du système avec μ . On note une transition nette vers $\mu \approx 0.13$, où λ tend rapidement vers une valeur

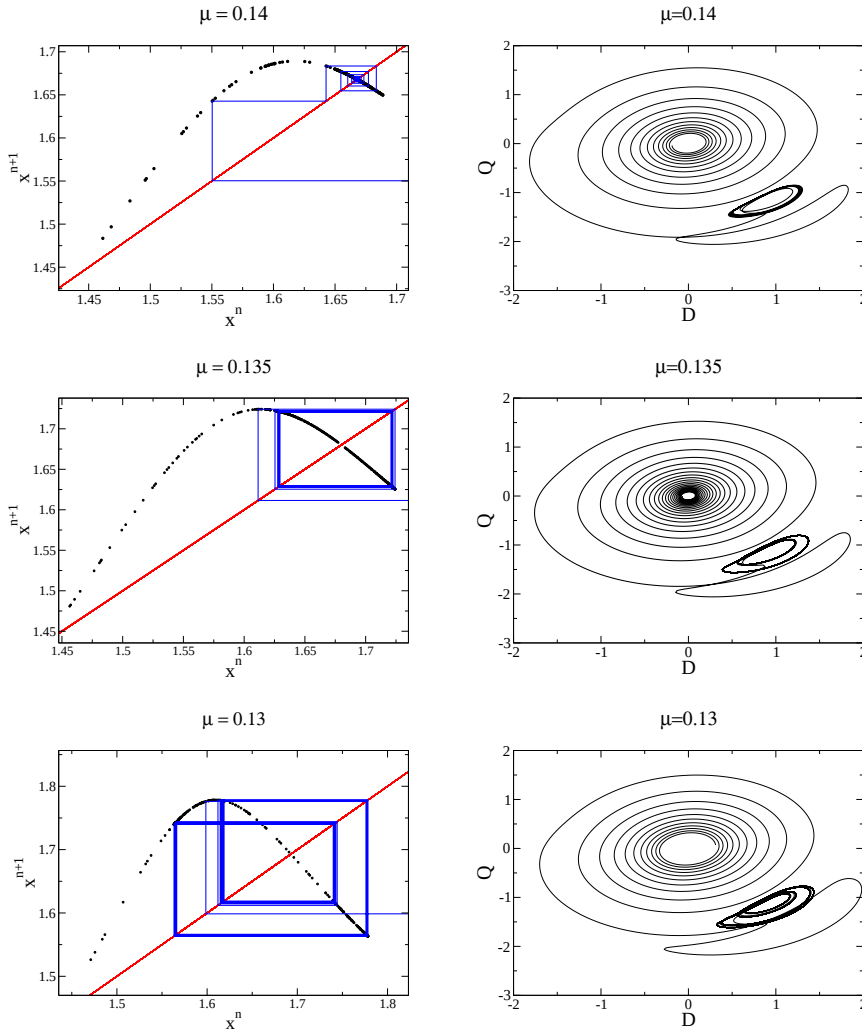


FIG. 5.4: Intégration numérique du modèle pour différentes valeurs de μ illustrant la transition vers le chaos (de haut en bas : $\mu = 0.14$, $\mu = 0.135$ et $\mu = 0.13$). A gauche : application de premier retour du système. A droite : espace des phase (D, Q) . On voit clairement le doublement de période entre $\mu = 0.135$ et $\mu = 0.13$

d'environ 0.1, caractérisant un comportement chaotique.

La figure 5.6 montre le système pour $\mu = 0.12$. On observe un attracteur chaotique confiné dans une région autour du point fixe N_+ . L'évolution temporelle des variables du système est complexe, irrégulière et très sensible aux conditions initiales (figure 5.6, en bas à gauche). Sur l'application du premier retour, il n'est plus possible de distinguer les orbites périodiques. Le système explore de façon chaotique l'intervalle $1.4 < x^n < 2.3$ (figure 5.6, en haut). Cet intervalle définit un domaine critique à l'intérieur duquel l'attracteur chaotique est borné dans l'espace D, Q, V (clairement visible sur la figure 5.6, en bas à droite). Il est intéressant de noter qu'un attracteur identique existe au voisinage du point fixe opposé N_- . Toutefois, on observe que ces deux attracteurs symétriques ne sont pas connectés entre eux à ce stade, de sorte

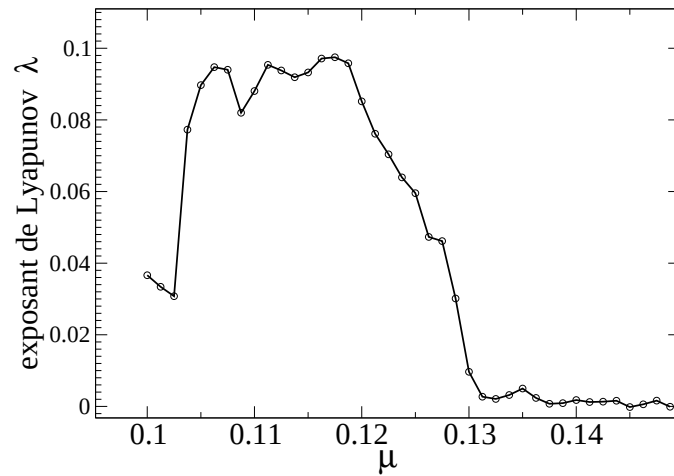


FIG. 5.5: Évolution de l'exposant de Lyapunov λ du système en fonction de μ . On voit que la série de bifurcations par doublements de période correspond à une augmentation de λ , traduisant la transition vers un état chaotique.

que le modèle engendre une dynamique chaotique sans renversements. Il s'agit là d'une différence importante avec d'autres modèles de renversements chaotiques. Par exemple, dans le système de Lorenz, une transition vers le chaos par doublement de période est également observée, mais uniquement dans un régime de renversement. De la même manière, dans le modèle de Rikitake, entre les renversements, les modes oscillent simplement avec une amplitude croissante.

5.4 Renversements chaotiques

5.4.1 Phénomène de crise et intermittence

Pour $\mu = 0.12$, on obtient donc un régime dans lequel les amplitudes D et Q fluctuent de manière chaotique sans se renverser. A partir de cet état, une très légère diminution de μ provoque une transition vers une dynamique de renversements chaotiques des amplitudes entre deux états moyens bien définis. La figure 5.7 montre l'évolution du modèle pour $\mu = 0.119$. On observe dans l'espace des phases que le comportement près d'un des points fixes reste identique à celui engendré juste avant les renversements. Toutefois, les deux attracteurs autour de chacun des deux points fixes sont maintenant connectés permettant des renversements chaotiques du système. Il est important de comprendre comment ces renversements se produisent.

En changeant un des paramètres du système (ici μ), on observe ainsi un chan-

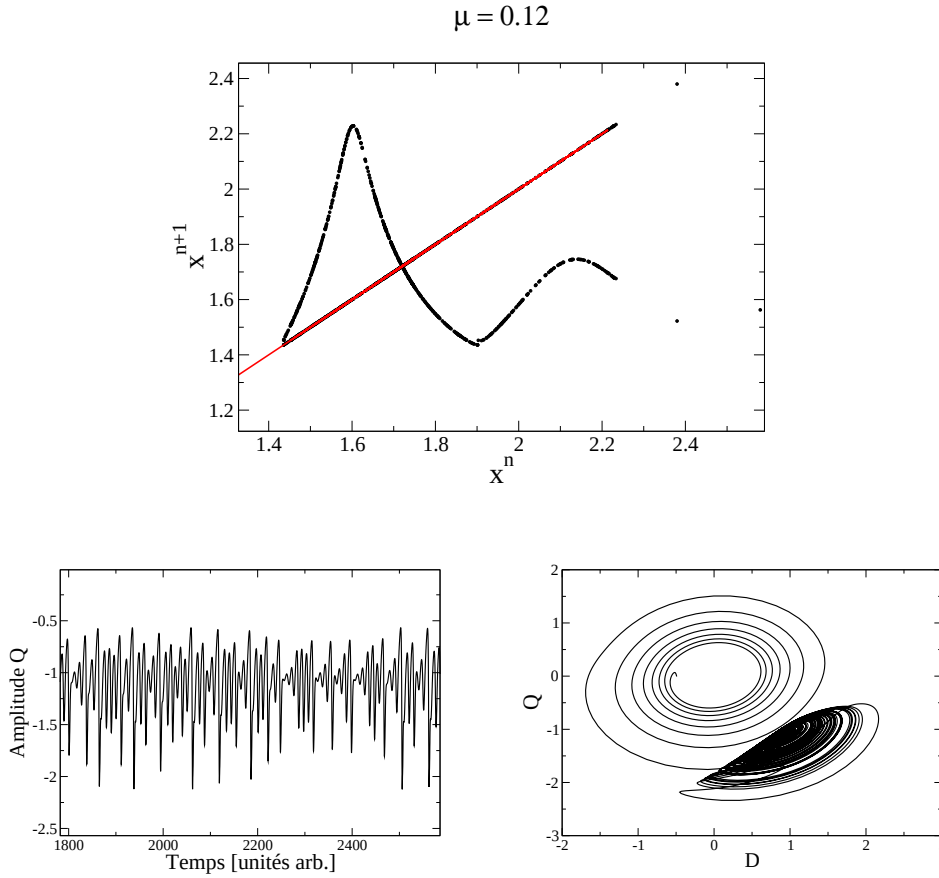


FIG. 5.6: Intégration numérique du modèle pour $\mu = 0.12$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. Pour ce jeu de paramètres, on observe une dynamique chaotique. En haut : Application discrète. En bas, à gauche : évolution temporelle de l'amplitude Q . En bas, à droite : évolution du système dans le plan de phase (D, Q) . Pour cette condition initiale, le système reste autour du point M_+ .

gement discontinu dans la structure de l'attracteur. Ce type de manifestation chaotique des systèmes dissipatifs est connu comme étant un phénomène dit 'de crise'. Ce genre de comportement a été découvert et étudié en détail par Grebogi, Ott et York en 1982 [28], [27], dans le contexte des systèmes à temps discrets. Typiquement, les changements associés à une crise sont de trois types : dans le premier cas, l'attracteur chaotique est soudainement détruit au passage du point critique de la crise. Dans le deuxième cas, la taille de l'attracteur subit une augmentation brutale. Enfin, dans le dernier cas, deux attracteurs ou plus collisionnent afin de ne former qu'un seul attracteur. Dans chacun de ces trois cas, le changement structurel est associé à une collision avec un attracteur instable (chaotique ou non), et il est possible de caractériser le phénomène à l'aide d'un temps typique, que l'on dénotera τ .

L'émergence des renversements chaotiques dans notre modèle semble appartenir à la troisième classe, c'est-à-dire à la réunion de deux attracteurs distincts. Appelons μ_c la valeur de μ critique pour laquelle vont apparaître les premiers renverse-

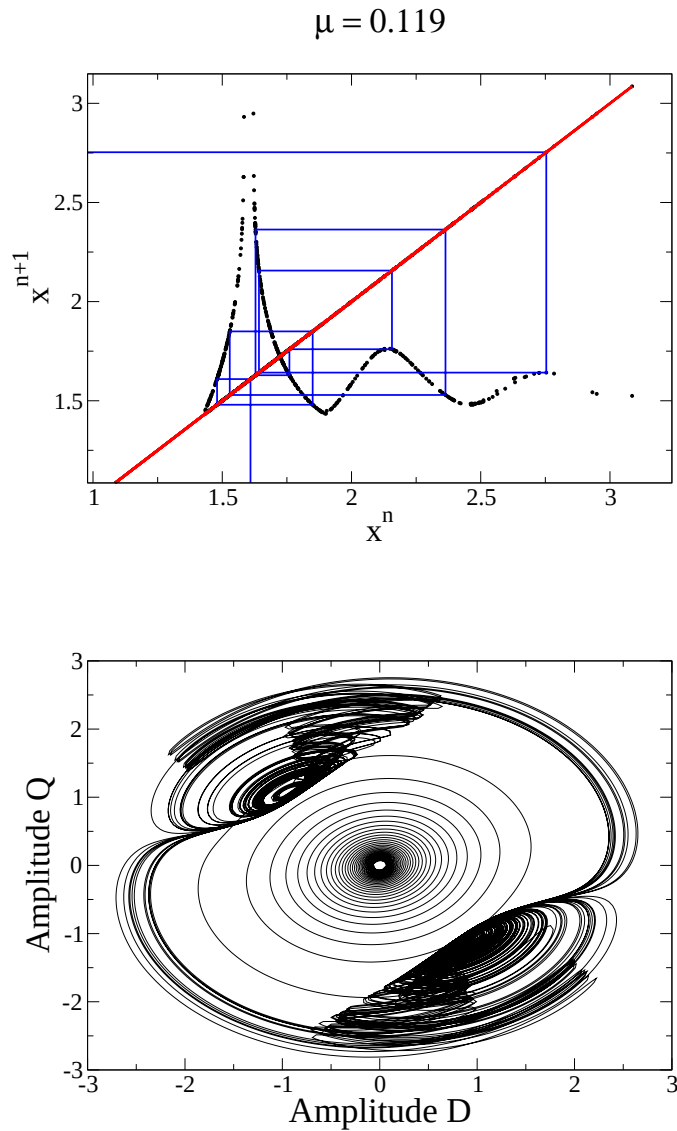


FIG. 5.7: Comportement du modèle pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. L'application discrète (en haut) montre une situation très similaire à celle vue pour $\mu = 0.12$, de sorte que le chaos y est identique. On note toutefois une petite ouverture permettant la connexion avec l'autre point fixe opposé.

ments. Lorsque $\mu < \mu_c$, les deux attracteurs près de chacun des points fixes opposés possèdent leur propre bassin d'attraction, séparés par un bassin limite. Selon les conditions initiales, les trajectoires tendent vers un des deux attracteurs, et y restent confinées. Dans certains cas, une variation de μ provoque un accroissement de la taille des attracteurs. Étant donné les symétries du système, lorsque $\mu = \mu_c$, les deux attracteurs touchent simultanément le bassin limite séparant les deux régions chaotiques, ce qui permet une connexion entre les deux attracteurs. Cette union des attracteurs correspond en fait à une collision pour $\mu = \mu_c$ avec des orbites périodiques instables sur le bassin limite, qui restent à déterminer. Pour $\mu > \mu_c$, on voit

donc que le système passe une longue période de temps au voisinage de l'un des attracteurs, puis quitte brutalement cette région pour explorer le voisinage de l'autre attracteur, et ainsi de suite. Ces transitions chaotiques entre les deux attracteurs vont donc pouvoir être caractérisées par τ , qui est dans ce cas le temps moyen entre deux renversements.

Le comportement temporel observé dans ce type de crise est souvent appelé *intermittence induite par crise* ('crisis-induced intermittency'). On peut effectivement décrire ce comportement comme des transitions épisodiques entre deux attracteurs chaotiques. Notons que ce type d'intermittence est toutefois assez différent de celles observées dans certains systèmes dynamiques, comme l'intermittence de Pomeau-Manneville. Dans ce cas, l'intermittence se produit entre un état chaotique et un état quasi-périodique, et non entre deux états chaotiques. Dans la plupart des cas présentant ce type de crise, il est possible de prédire le comportement du temps typique τ en fonction des paramètres. On observe en général une dépendance du type :

$$\tau \sim (\mu - \mu_c)^{-\gamma} \quad (5.15)$$

En réalisant des simulations numériques du modèle pour différents paramètres, il est possible de déterminer empiriquement la loi d'évolution de τ lorsque l'on varie μ . Les moyennes pour le calcul de τ sont réalisées sur un millier de renversements. La

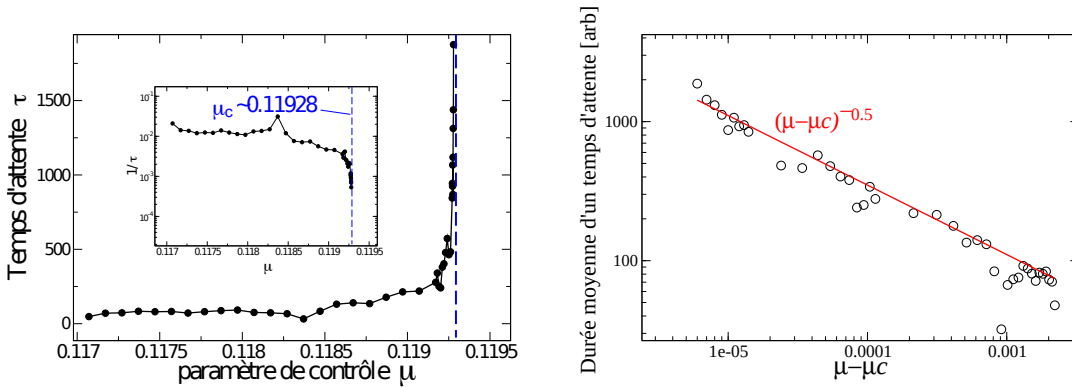


FIG. 5.8 : Évolution du temps caractéristique d'attente entre deux renversements à l'approche du point de bifurcation de la crise. A gauche : Évolution en fonction de μ , qui suggère $\mu_c = 0.11928$. L'encadré montre $1/\tau$ en fonction de μ . A droite : Évolution en échelle logarithmique de τ en fonction de $\mu - \mu_c$. On trouve numériquement un exposant $\gamma \sim 1/2$.

figure 5.8, à gauche, montre le temps d'attente moyen τ entre deux renversements en fonction de μ . On voit une divergence assez nette pour $\mu_c \sim 0.11928$. En pratique, il n'a pas été possible d'observer de renversement pour cette valeur après plus de 1.10^5 temps d'intégration, tandis qu'on observe des renversements pour $\mu = 0.119275$. On peut donc choisir cette valeur comme étant une bonne approximation du point critique de la crise.

La figure 5.8 montre comment évolue en échelle logarithmique le temps d'attente en fonction de la distance à ce point de transition. Le système semble se comporter selon la loi de puissance (5.15), et les simulations numériques suggèrent ainsi un exposant critique $\delta \simeq 1/2$. Il est évidemment difficile de conclure sur un exposant précis. L'erreur commise sur la détermination de μ_c peut par exemple changer significativement la loi de puissance observée.

Dans certains cas, il est possible d'obtenir l'exposant critique γ de manière théorique, en fonction des valeurs propres des orbites instables impliquées dans la crise. Dans le cas d'applications à temps discret, Grébogi et al ont proposé la relation suivante :

$$\gamma = \frac{1}{2} + (\ln|\alpha_1|)/\ln|\alpha_2| \quad (5.16)$$

où α_1 et α_2 sont respectivement les valeurs propres des variétés instables et stables des deux orbites périodiques considérées. Cette relation suppose en particulier que la crise étudiée est de type 'tangence hétérocline'. Cela signifie que la transition est produite lorsque la variété instable d'une orbite périodique instable (A) de l'attracteur devient tangente à la variété stable d'une seconde orbite périodique instable (B) (se trouvant à l'extérieur du bassin d'attraction pour $\mu < \mu_c$).

Dans le système considéré ici, la particularité vient du fait que l'orbite (B) appartient en fait au bassin d'attraction du second attracteur. En raison des symétries du modèle, une connexion identique est réalisée près du second attracteur. A partir du plan de Poincaré utilisé pour notre flot (voir figure 5.2), il est possible d'obtenir une application discrète sur laquelle peut être visualisée la collision menant à la crise. Tel qu'il est défini à la figure 5.2, le plan de Poincaré utilisé a comme ordonnée $Y = V$ et comme abscisse X la droite joignant les deux points fixes avec le point O ($D = Q = 0$) pour origine. La figure 5.9 montre les bassins d'attraction du système. Ces bassins sont obtenus numériquement en utilisant une grille (X_0, Y_0) de 500x500 conditions initiales. En pratique, selon l'attracteur vers lequel le système tend aux temps longs, on colore en blanc ou en noir la condition initiale correspondante. La figure 5.9(a) montre le système avant la crise, pour $\mu = 0.1194 > \mu_c$. On observe en rouge les points correspondants aux intersections des trajectoires des attracteurs avec le plan de Poincaré. On note que les deux attracteurs sont bien distincts. Les fonds blancs et noirs indiquent des bassins d'attraction symétriques, et tels que les deux attracteurs ne sont pas connectés. La figure 5.9(b) correspond à une valeur légèrement plus petite, $\mu = 0.1193 > \mu_c$. Il est clair qu'une diminution de μ entraîne une augmentation de la taille des bassins d'attractions, mais également une modification de la forme de ceux-ci. Enfin, pour $\mu = 0.11928 \approx \mu_c$, le premier attracteur chaotique entre en collision avec le bord limite du bassin correspondant au second attracteur. Un événement symétrique se produit évidemment entre le second attracteur et le bassin du premier. La collision se produit à la limite du bassin, et on parle dans ce cas de 'boundary crisis'. Un examen des trajectoires dans l'espace des phases lors des renversements montre que l'orbite impliquée dans la collision avec les attracteurs est une orbite périodique instable entourant le point trivial O . Ceci explique pourquoi les renversements chaotiques sont uniquement observés lorsque O

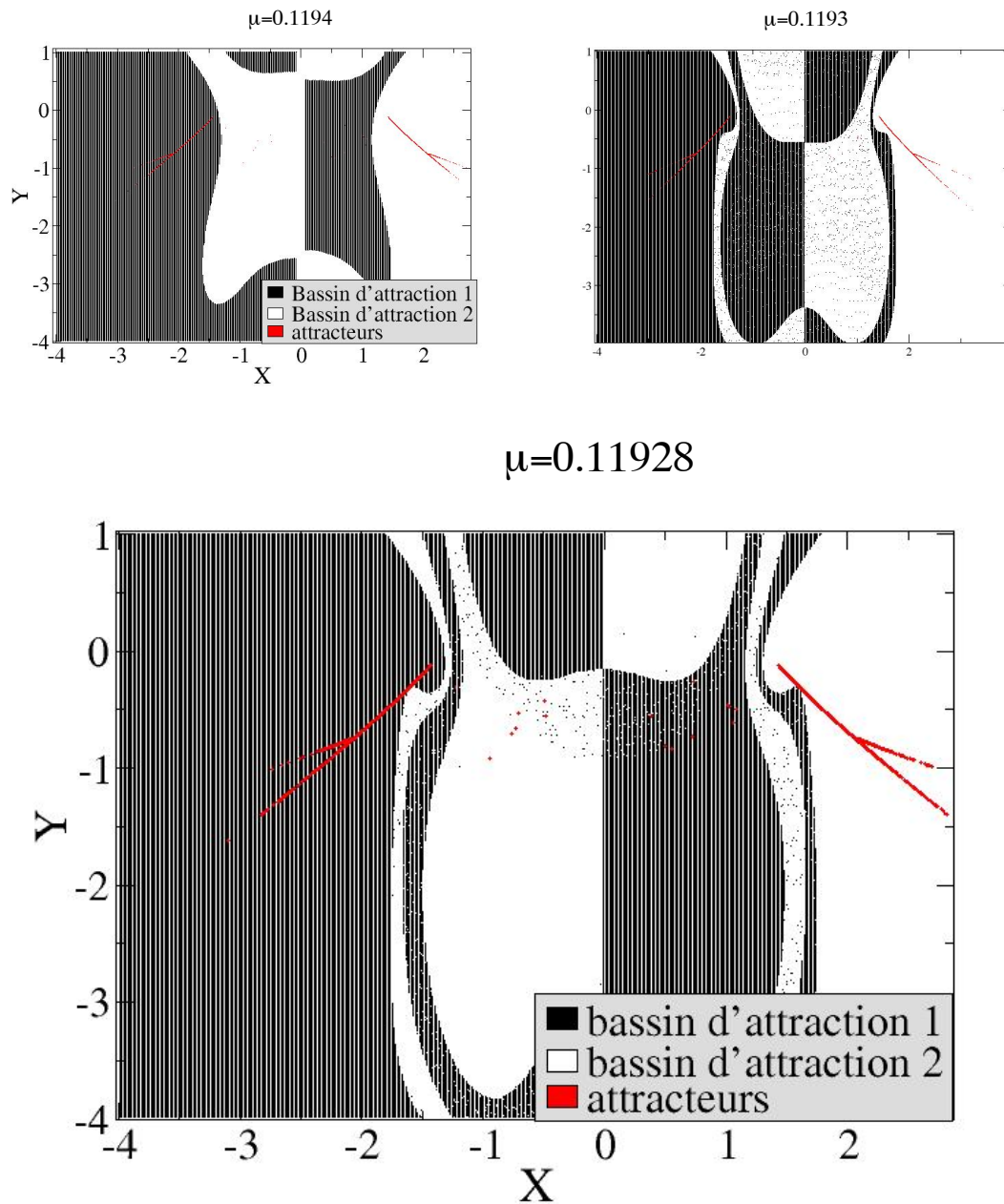


FIG. 5.9: Bassin d'attraction des deux attracteurs chaotiques projetés dans le plan de Poincaré. Les parties blanches et noires distinguent les deux bassins. On montre en rouge les attracteurs. En haut : le système se trouve avant la crise, pour $\mu = 0.1194$ (gauche) et $\mu = 0.1193$ (à droite). En bas : Pour $\mu = 0.11928 \approx \mu_c$, on observe une collision entre les attracteurs et le bord limite des bassins.

subit une bifurcation de Hopf.

Afin de caractériser la dynamique des renversements obtenus à partir de cette crise, il est intéressant de calculer l'exposant de Lyapunov. Celui-ci nous renseigne

sur le degré de chaos existant au sein du système. Il définit la vitesse avec laquelle deux trajectoires initialement très proches ont tendance à s'éloigner. L'extrême sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique produit en général une divergence exponentielle de la distance d entre deux trajectoires

$$d = d_0 e^{lt} \quad (5.17)$$

où d_0 est la distance initiale séparant les deux trajectoires et l définit notre exposant de Lyapunov. Notons qu'il existe des définitions plus rigoureuses de l'exposant de Lyapunov, mais que celle-ci illustre la méthode expérimentale utilisée ici. On calcule donc le plus grand exposant de Lyapunov du système. On prend en pratique $d_0 = 10^{-15}$. La figure 5.10 montre l'évolution de δ pour différentes conditions initiales.

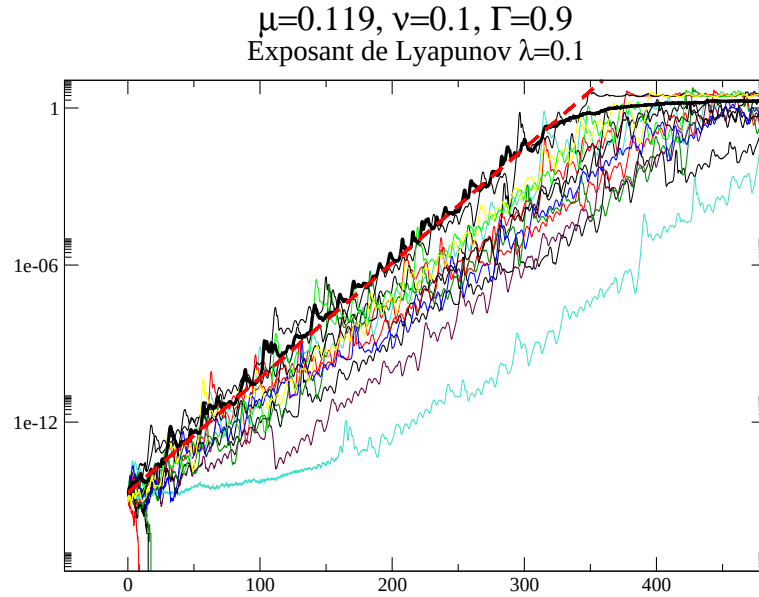


FIG. 5.10: Évolution au cours du temps de la distance entre deux trajectoires initialement distantes de 10^{-15} . l'exposant de Lyapunov est d'environ 0.1.

On voit ainsi que l'exposant semble être une fonction indépendante de l'espace, et caractérise ainsi l'attracteur chaotique. On observe également que cet exposant n'est pas modifié lors de l'apparition des renversements, puisque cette transition est associée à la fusion de deux attracteurs identiques. Quelque soit les conditions initiales, on obtient ainsi un exposant de Lyapunov $\lambda \simeq 0.1$.

5.4.2 Différents régimes dynamiques

Pour les valeurs des paramètres $\Gamma = 0.9$ et $\nu = 0.1$, décroître μ permet au système d'explorer trois types de comportement bien différents : un état stationnaire

puis un état oscillant et enfin un régime chaotique. Pour $\mu < \mu_c$, l'attracteur est

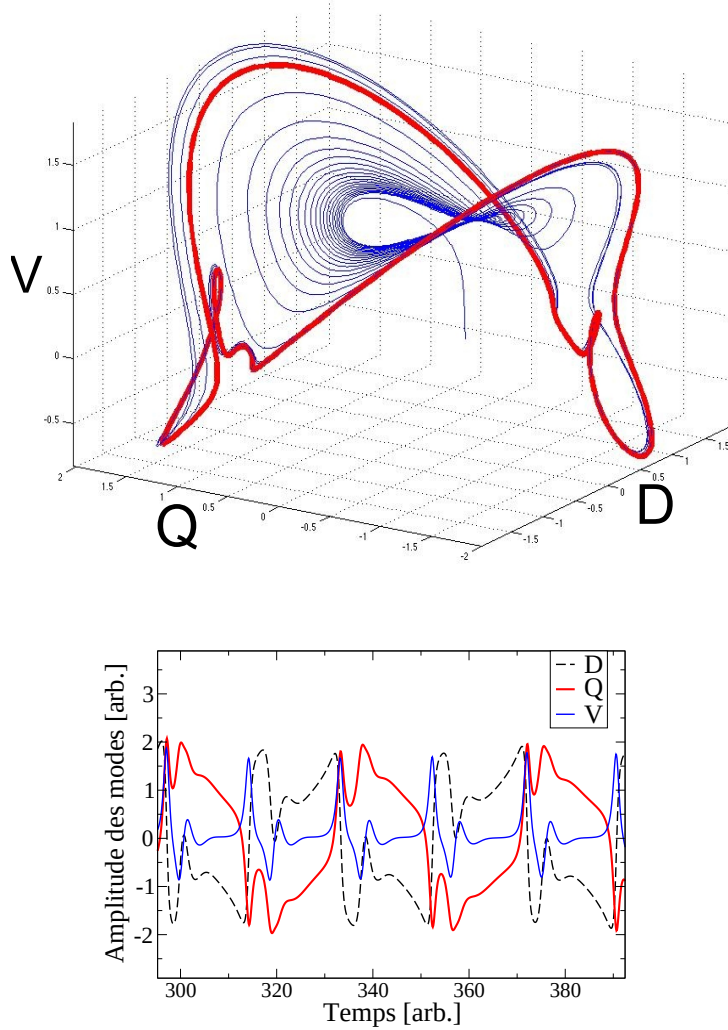


FIG. 5.11: En haut : Espace des phases pour $\mu = 0.101$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. L'évolution n'est plus chaotique pour ces valeurs. On observe une connexion périodique entre les deux points fixes. En bas : évolution temporelle des trois modes.

modifié et le système subit des renversements chaotiques. Lorsque l'on continue de diminuer μ , la durée moyenne des temps d'attente diminue. Le système atteint alors un régime quasi-périodique de renversements entre les deux états. La figure 5.11 montre l'évolution du système dans l'espace des phase et en fonction du temps pour $\mu = 0.101$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$.

Pour l'ensemble des régimes décrits jusqu'à maintenant, la linéarisation autour du point fixe O , correspondant à $D = Q = 0$ et $V = \sqrt{\mu\nu}$, donne une valeur propre réelle négative λ_1 et deux valeurs complexes conjuguées λ_2 et λ_3 à partie réelle positive, de sorte que le système (D, Q) croît en oscillant à partir de O . Lorsque $\mu = \nu$, on remarque que le point trivial O devient linéairement stable puisque la partie réelle de λ_2 et λ_3 s'annule. Cette bifurcation est en fait fortement sous-

critique : pour des conditions initiales choisies près de l'un des points fixes non-triviaux, le système ne se stabilise sur $D = Q = 0$ qu'à partir de $\mu < 0.063$. Pour cette valeur limite, l'intégration numérique fait apparaître l'orbite périodique instable impliquée dans les renversements, comme le montre la figure 5.12.

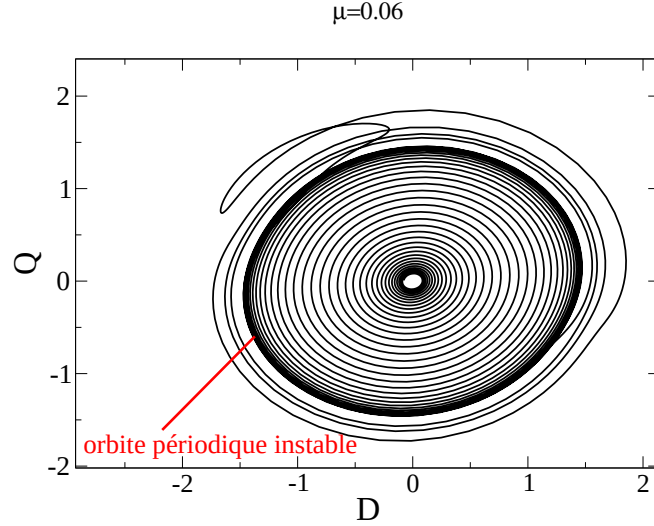


FIG. 5.12: Espace des phases pour $\mu = 0.06$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. Le système tend vers la solution stable O . La trajectoires fait apparaître une orbite périodique instable.

Durant ce régime de bistabilité, on observe une série de transitions dans le comportement du système à mesure que l'on diminue la valeur de μ . Chacun des deux

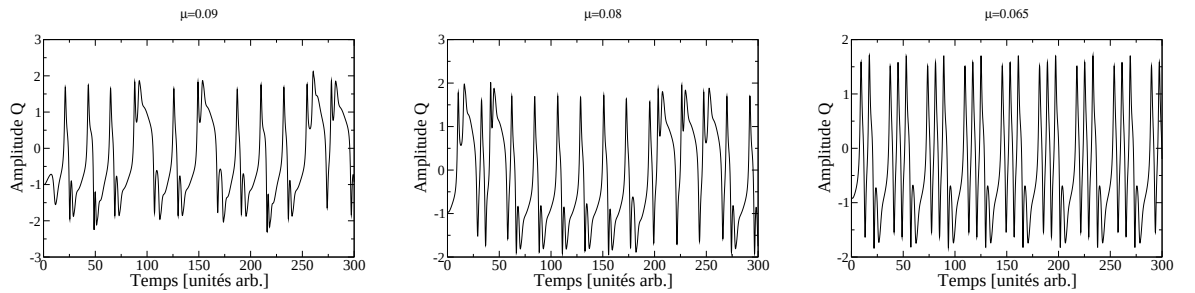


FIG. 5.13: Évolution temporelle de l'amplitude Q pour différentes valeurs de μ . De gauche à droite, on a $\mu = 0.09$, $\mu = 0.08$ et $\mu = 0.065$. On note le caractère asymétrique des renversements.

attracteurs au voisinage des points fixes se modifie. On observe que le système passe ainsi un temps long près de l'un des points fixes, puis explore rapidement l'état opposé. Durant la phase près du point fixe, le comportement peut être légèrement chaotique. Ces régimes correspondent ainsi à une intermittence plus classique, entre

un état chaotique et une orbite périodique. On notera que ce type de renversement modélise, pour certaines conditions initiales, un comportement très asymétrique entre les deux états, malgré la symétrie des équations.

Ce système dynamique à trois modes se caractérise par une grande richesse dans les comportements selon le jeu de paramètres utilisé. Par exemple, nous avons vu au début de ce chapitre que pour $\sqrt{\mu\nu} - \Gamma > 0$, il existe quatre points fixes non triviaux. Les deux solutions supplémentaires peuvent induire une dynamique différente de celle observée jusqu'à présent. La figure 5.14 montre l'évolution au cours du temps et dans l'espace des phases (D, Q) d'un tel régime, pour $\mu = \nu = 0.35$ et $\Gamma = 0.1$. Nous avons vu à la fin du chapitre deux que certains régimes de

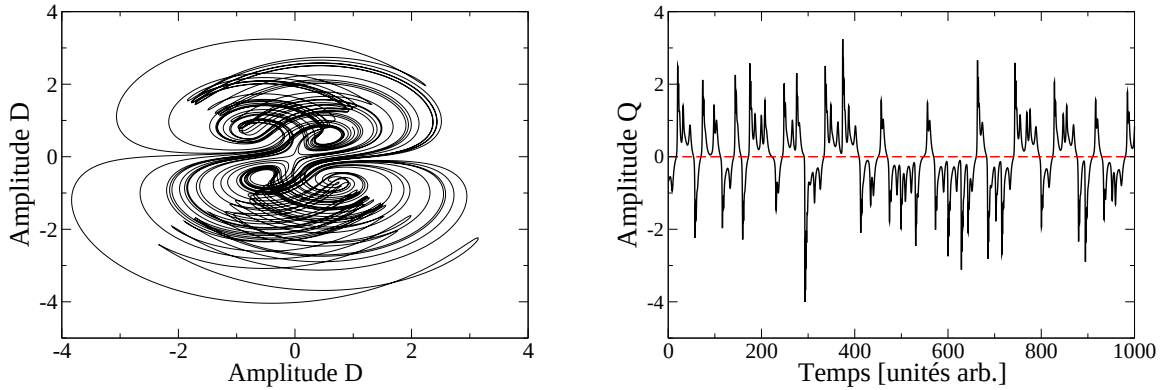


FIG. 5.14: Évolution du système pour $\mu = \nu = 0.35$, $\Gamma = 0.1$, lorsque les quatre points fixes non-triviaux sont présents. A gauche : évolution dans l'espace des phases (D, Q) . A droite : évolution au cours du temps de l'amplitude Q .

l'expérience VKS semblent impliquer quatre points fixes. Il est intéressant de noter que ce modèle simple est capable de reproduire grossièrement cette dynamique de renversements impliquant quatre solutions symétriques. Lorsque Γ est plus grand, on observe également un autre type de renversement très différent. La figure 5.15 montre l'évolution du système pour $\mu = 0.3$, $\nu = 0.2$ et $\Gamma = 5$. Dans ce régime, on observe une intermittence entre deux régimes différents. Pendant un certain temps, le système s'échappe lentement d'une orbite périodique instable entourant l'origine. Lorsque l'amplitude de l'oscillation devient assez grande, il se produit une collision avec l'un des deux points fixes non-triviaux, et après un transitoire près du point fixe, le système est réinjecté vers l'orbite périodique instable initiale. Notons qu'ici, le chaos se manifeste par un choix apparemment aléatoire du point fixe à la fin de chaque oscillation.

Dans l'ensemble des jeux de paramètres explorés pour cette forme simple du modèle, tous les types de renversement observés semblent appartenir à l'un de ceux décrits tout au long de cette section. L'étude réalisée dans cette section, bien que limitée à certaines valeurs des paramètres, fournit donc une description satisfaisante

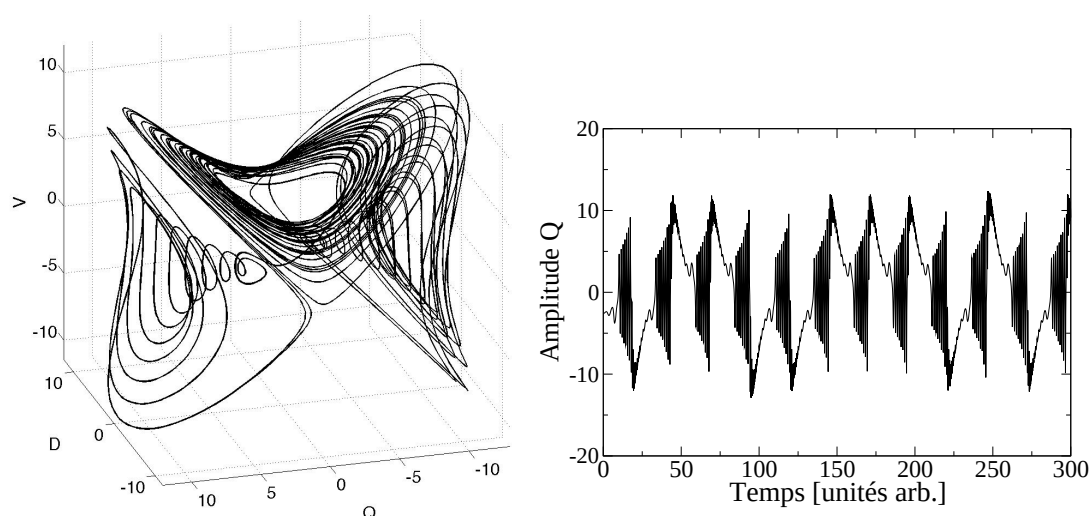


FIG. 5.15: Évolution du système pour $\mu = 0.3$, $\nu = 0.2$ et $\Gamma = 5$. A gauche : évolution dans l'espace des phases (D, Q) . A droite : évolution au cours du temps de l'amplitude Q .

des principaux comportements du modèle dans cette forme minimale. Il serait néanmoins intéressant de déterminer dans quelle mesure ces différentes caractéristiques observées sont robustes, par exemple sous l'effet d'un bruit multiplicatif ou additif, ou encore en prenant en compte des termes d'ordre supérieur dans les équations d'amplitude.

5.5 Une modélisation des renversements de la géodynamo.

A partir des mesures paléomagnétiques, on sait que la composante dipolaire du champ magnétique de la Terre a subi de nombreux renversements de sa polarité. Ces renversements semblent se produire de manière chaotique, et leur origine est encore mal comprise. Il existe de nombreuses études basées sur le développement de systèmes dynamiques simples afin de modéliser la dynamique de la géodynamo. Dans de tels modèles, les renversements de polarité sont produits par un chaos déterministe de basse dimension, et ne sont donc pas la conséquence d'un processus aléatoire. Le modèle de Rikitake est l'un des premiers modèles à avoir été proposé, et qui permet d'expliquer simplement les renversements chaotiques du champ [74]. Le modèle de Lorenz permet également d'obtenir, à partir de trois équations différentielles couplées, un comportement irrégulier de renversement [46]. Toutefois, dans le modèle de Rikitake, tout comme dans le modèle de Lorenz, il n'existe pas de séparation des échelles de temps entre les états quasi-stationnaires de polarité donnée et les inversions du champ. Une séparation d'échelle peut être obtenue si le système dynamique comporte un cycle hétérocline reliant les états de polarité opposées. Suivant cette idée, Melbourne, Proctor et Rucklidge, ont proposé en 2001 un modèle

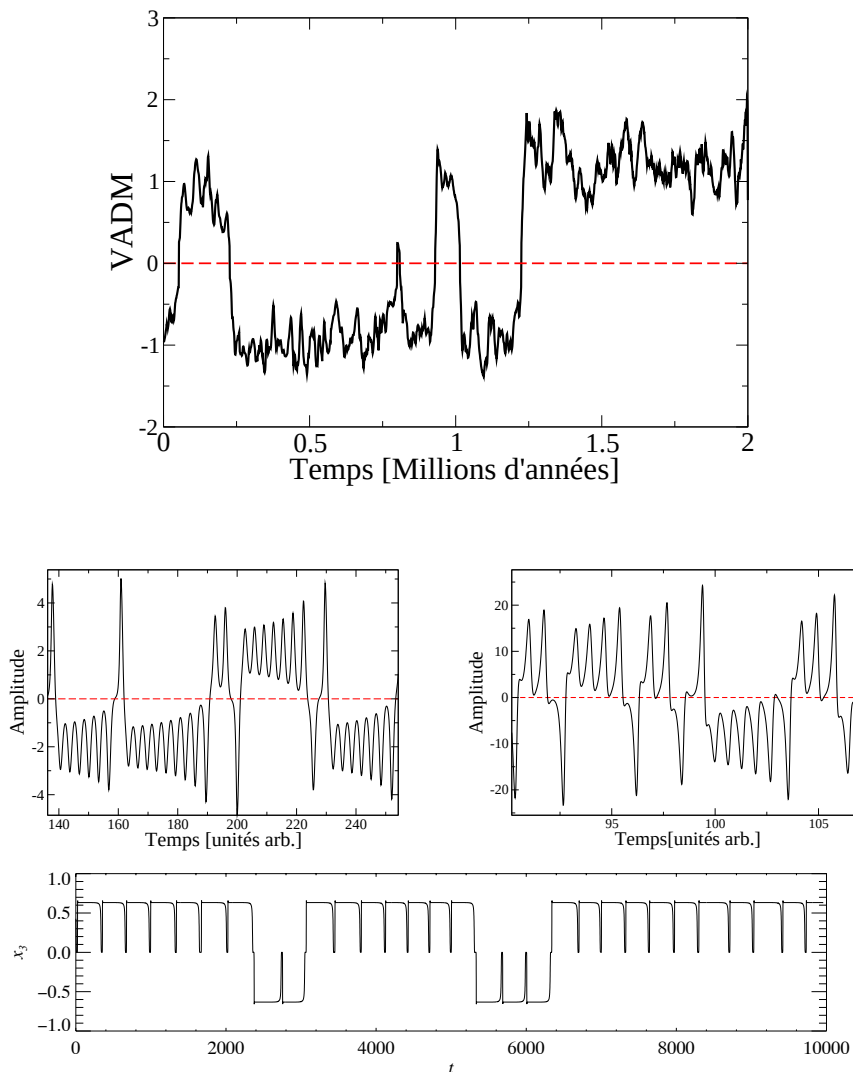


FIG. 5.16: Comparaison de l'évolution temporelle du champ magnétique terrestre [85] (en haut) avec des modèles de basse dimension (au milieu à gauche : Rikitake. A droite : Lorenz. En bas : le modèle de Melbourne et al.)

des renversements de la géodynamo. Celui-ci implique trois modes magnétiques, le dipole axial, le quadrupole et le dipole équatorial, les termes étant obtenus par des arguments de symétries. Le modèle de Nozières comporte deux modes magnétiques et un mode de vitesse et résulte plutôt d'une troncature des équations de la MHD [63].

Ces différents modèles fournissent une description satisfaisante du caractère chaotique des renversements du champ magnétique de la Terre. En revanche, la comparaison directe de ces modèles avec l'évolution du champ magnétique terrestre fait apparaître d'importantes différences, comme on peut le voir sur la figure 5.16.

Sur cette figure, on montre l'évolution de l'intensité du champ magnétique terrestre exprimée via le VADM (Virtual Axial Dipole Moment), au cours des deux derniers millions d'années, obtenue à partir des données *SINT2000* [85]. On la compare avec des séries temporelles obtenues à partir de simulations numériques de plusieurs modèles de renversement de basse dimension. En comparaison avec les oscillations nettement visibles du modèle de Rikitake par exemple, le comportement de la dynamo terrestre semble bien plus compliqué, en particulier durant une phase de polarité donnée. En raison de ces différences importantes, les modèles de chaos déterministe sont souvent jugés trop simples pour pouvoir représenter correctement les renversements géomagnétiques. Dans cette section, nous verrons que le modèle à trois modes que nous venons de décrire engendre un comportement plus compatible avec les données paléomagnétiques.

Afin de décrire la géodynamo comme résultant d'une dynamique de basse dimension, mais de manière plus fidèle, d'autres approches ont été suivies. Par exemple, nous avons discuté à plusieurs reprises durant cette thèse le modèle proposé par Pétrelis et Fauve, reposant sur une interaction entre dipole et quadrupole. En ajoutant un bruit multiplicatif afin de représenter l'effet de la turbulence, il est possible d'obtenir une explication simple des renversements de la géodynamo, tout en gardant une certaine similarité avec les données paléomagnétiques [67]. Suivant cette idée, les renversements géomagnétiques sont compris comme un système déterministe, mais couplé à des processus stochastiques. Cette interprétation est à la base d'un autre type de modèle simplifié, proposée par Narteau et al (voir par exemple [58] ou [59]). Dans ce modèle, le champ magnétique est plutôt décomposé en parties poléoïdale et toroïdale, et connecté à un écoulement turbulent abstrait constitué de cyclones de différentes tailles. D'autres modèles, contenant certains ingrédients similaires, ont été proposé par Hoyng et al [30].

Dans l'interprétation d'une dynamique de basse dimension des renversements géophysiques, on voit donc qu'il existe deux possibilités pour expliquer le caractère stochastique du champ observé : on peut invoquer une origine intrinsèque, associée à un chaos déterministe, ou une origine externe, associée à un bruit indépendant des amplitudes considérées. Notons que ces deux mécanismes ne s'excluent pas mutuellement. La modélisation de la géodynamo par un modèle purement déterministe, correspondant au premier cas, est souvent écartée en raison du caractère stochastique observé entre les renversements. Par exemple, il ne semble pas vraiment exister de comportement périodique dans une polarité donnée, comme c'est le cas pour le modèle de Rikitake. De plus, les prédictions statistiques obtenues à l'aide de ces modèles simples sont en général en désaccord avec les données paléomagnétiques (voir par exemple [39] pour une comparaison avec le modèle de Rikitake). Nous allons voir que le modèle présenté dans ce chapitre se distingue clairement des modèles déterministes proposés précédemment, et permet un accord plus satisfaisant avec les observations géomagnétiques. Le but de cette section n'est évidemment pas de proposer un nouveau modèle qui explique complètement les renversements géomagnétiques. On cherche plutôt à illustrer à travers ce modèle simple qu'une description des renversements du champ magnétique terrestre à l'aide d'un système dynamique

déterministe reste tout à fait possible.

5.5.1 Compatibilité avec une dynamique déterministe.

Bien que l'évolution du champ magnétique terrestre résulte d'équations déterministes, cela ne garantit pas qu'il soit possible de décrire la géodynamo comme un système de basse dimension associé à un chaos déterministe. Effectivement, les degrés de liberté sont nombreux et les mécanismes de génération du champ sont multiples et complexes. L'évolution du champ magnétique est couplée non-linéairement à de nombreux processus, et on s'attend donc à observer une dynamique stochastique de la dynamo. Néanmoins, nous avons insisté à plusieurs reprises sur les arguments en faveur d'une réduction de la dimension de la dynamique dans le cas des systèmes dynamo. La proximité du seuil de l'instabilité dynamo, mais surtout la séparation d'échelle de temps entre champ de vitesse et champ magnétique résultant des faibles valeurs du nombre de Prandtl magnétique, tendent à simplifier la dynamique observée. Nous allons voir qu'il existe dans certaines données paléomagnétiques une compatibilité avec un comportement de basse dimension du champ terrestre. Pour cela, on utilise une série d'observations réalisées à partir de données paléomagnétiques, connue sous le nom de 'SINT2000', et publiée en 2005 [85]. Cette série temporelle fournit une évolution détaillée du dipole magnétique au cours des deux derniers millions d'années, échantillonnée tous les 1000 ans, et qui comporte cinq renversements de la polarité du dipole axial. Cette série est en fait une reconstruction du champ à partir d'une dizaine d'échantillons différents obtenus à partir de sédiments. Par conséquent, il existe une incertitude non-négligeable sur les mesures, qui doit conduire à une certaine prudence quant aux conclusions sur les analyses statistiques réalisées avec ces données.

En général, l'étude d'un système dynamique nécessite de connaître l'évolution des différentes variables dynamiques constituant le modèle. En supposant que les renversements géophysiques résultent d'une dynamique de basse dimension, un problème technique surgit : en effet, nous disposons uniquement du mode dipolaire du champ magnétique, qui s'apparente à une seule variable du système dynamique que l'on cherche à étudier. Afin de reconstruire la dynamique du système, il est nécessaire de 'plonger' l'attracteur dans un espace de dimension plus grande. On utilise pour cela la méthode des délais, c'est-à-dire qu'à partir de la série temporelle $B(t)$, on calcule l'évolution de $B(t + \tau)$. Cette méthode permet ainsi de reconstruire une deuxième composante pour le système, et on obtient ainsi un espace des phases de dimension 2. Bien que cette reconstruction ne preserve pas la forme géométrique des structures, elle permet de conserver les propriétés statistiques de l'attracteur. Il est également possible d'obtenir un espace des phases de dimension plus grande, disons d_e , en étudiant l'ensemble des séries $(B(t), B(t + \tau), B(t + 2\tau), \dots, B(t + (d_e - 1)\tau))$, où d_e est appelée la dimension de plongement ('embedding dimension' en anglais), et τ est un délai choisi empiriquement. En pratique, $\tau = 15000 \text{ ans}$ est une valeur raisonnable. Ryan et Sarson, en 2008 [76], ont étudié ce problème et concluent à

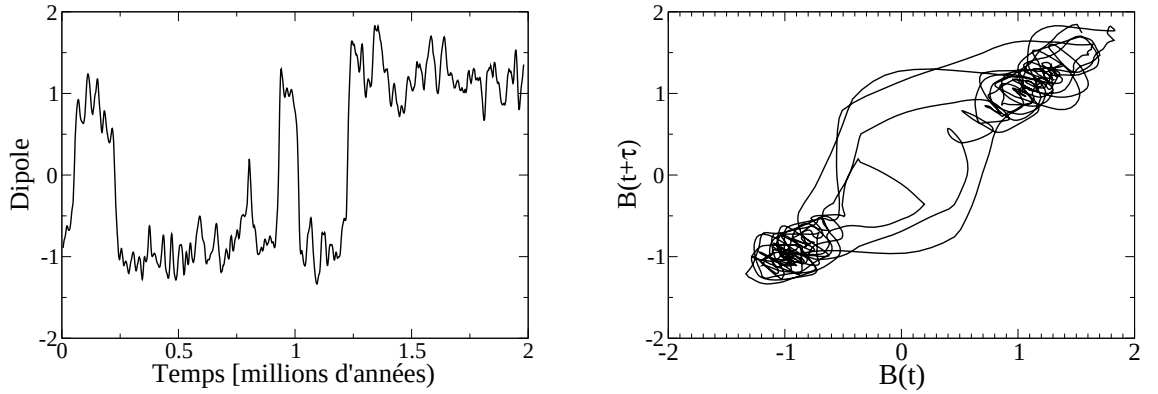


FIG. 5.17: Évolution de la série temporelle du dipole magnétique de la Terre moyennée en temps sur une fenêtre glissante de 5000 ans. A gauche : évolution au cours du temps. A droite : évolution dans l'espace des phases obtenu par la méthode des délais (avec un temps de retard $\tau = 15000$ ans).

la possibilité d'un chaos déterministe. A la différence de Ryan et Sarson, la série de SINT2000 a été légèrement moyennée en temps (moyenne glissante réalisée sur une fenêtre de 5000 ans), afin d'éliminer une partie du bruit externe inévitablement présent dans les enregistrements indirects du paléomagnétisme (voir la figure 5.17).

Afin d'étudier la dynamique de la géodynamo, une première étape consiste donc à estimer la dimension d_e de l'attracteur nécessaire à sa reconstruction. On suit la méthode utilisée par Ryan et Sarson, également exposée dans l'ouvrage de Paul Manneville intitulé 'Structures dissipatives, chaos et turbulence' [49]. Cette méthode consiste, à partir des points constituant l'espace des phases dans une dimension m , à calculer la distance entre chaque paire de points. On passe ensuite en dimension $m + 1$, et on calcule la distance entre les paires de points dans la direction ajoutée. Si cette seconde distance est trop grande par rapport à la première, cela signifie que les deux points ne sont pas de vrais voisins, mais que leur proximité est due à une dimension de plongement trop faible. Augmenter la dimension permet, par un changement de perspective, de faire apparaître la distance manquante entre les faux voisins. C'est ainsi qu'un cycle limite observé en deux dimensions produit en général des intersections qui disparaissent lorsqu'on l'observe en trois dimensions. Le nombre de faux voisins diminue avec l'augmentation de la dimension utilisée pour décrire l'attracteur. Une chute brutale de la proportion de faux voisins signifie que l'on a trouvé la bonne dimension de plongement de l'attracteur. La figure 5.18 montre l'évolution de cette proportion en fonction de la dimension calculée à partir des données SINT2000.

On trouve ici une dimension de plongement de l'ordre de $d_e = 8$, comparable à la valeur obtenue par Ryan et Sarson. Evidemment, la présence de bruit externe augmente la dimension de l'attracteur. De plus, notons que le théorème de Takens

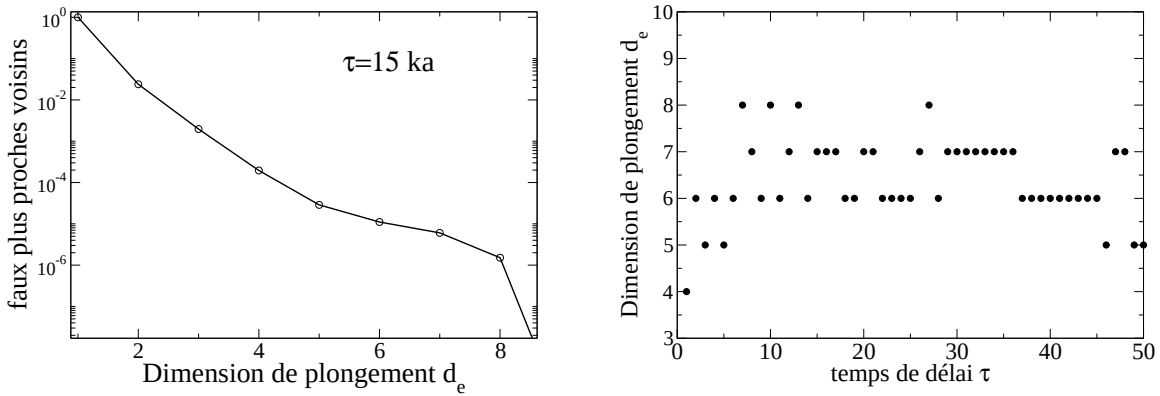


FIG. 5.18: A gauche : Evolution pour $\tau = 15000$ ans de la proportion de faux voisins en fonction de la dimension. La chute brutale de la courbe suggère une dimension de plongement $d_e = 8$. A droite : dimension de plongement d_e en fonction de τ .

stipule qu'un attracteur de dimension d_A est complètement décrit lorsqu'il est reconstruit dans un espace de dimension $d_e > 2d_A$. Cela suggère donc une dimension pour l'attracteur vraisemblablement entre 3 et 4. De plus, la figure 5.18, à gauche, permet de voir qu'en utilisant une dimension de prolongement $d_e = 3$, la proportion de faux voisins est déjà très faible, de l'ordre de 0.1%. La valeur prise pour τ a une certaine influence sur l'estimation de la dimension de plongement (voir figure 5.18). Par exemple, pour un délai $\tau = 5000$ ans, on trouve $d_e = 5$. Il est important de souligner ici que les méthodes utilisées dans cette section ne sont valides que lorsque l'attracteur a été pleinement exploré par le système, c'est-à-dire lorsque l'on dispose de suffisamment de points. Le nombre de points disponibles pour la série *SINT2000* est probablement trop faible pour pouvoir réellement conclure.

L'observation d'une dimension de plongement indique que les données paléomagnétiques sont compatible avec un système dynamique de basse dimension, n'impliquant a priori que quelques modes en interaction. Dans la suite, il est donc intéressant d'étudier les données géophysiques du point de vue d'un attracteur étrange, et de comparer cet attracteur aux résultats obtenus à l'aide du modèle simple d'équations d'amplitude (D, Q, V) . Sur la figure 5.19, on s'intéresse à une caractérisation plus précise de l'attracteur, comme par exemple sa dimension fractale. Plutôt que de tenter une estimation expérimentale de la dimension fractale d_A de l'attracteur basée sur la définition de d_A , on introduit la dimension de corrélation d_c . Celle-ci est en effet beaucoup plus facile à estimer en pratique. Pour cela, on compte simplement le nombre de paires de points $C(R)$ séparés par une distance R . En normalisant $C(R)$ par N^2 , où N est le nombre de points impliqués, on peut définir formellement la dimension de corrélation par

$$d_c = \lim_{(R \rightarrow 0)} \frac{\log(C(R))}{\log(R)} \quad (5.18)$$

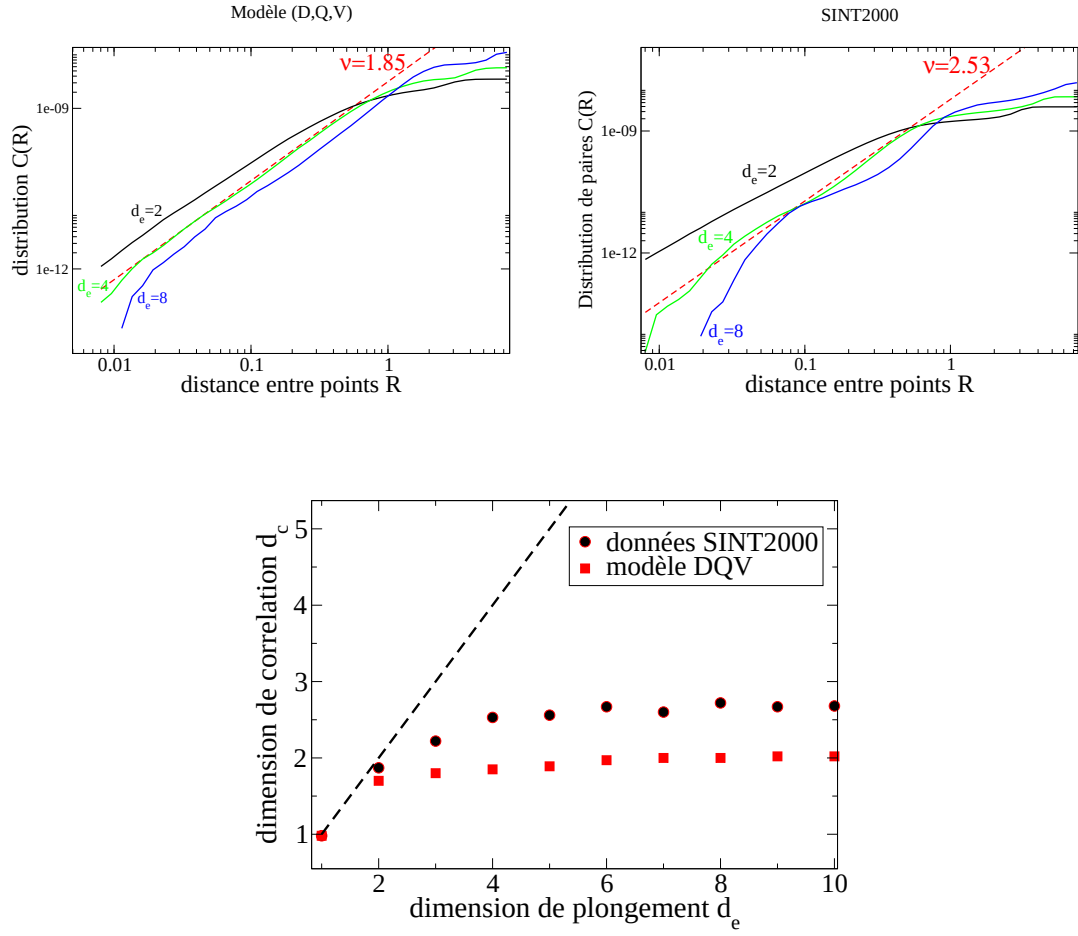


FIG. 5.19: En haut : évolution de la distribution $C(R)$ en fonction de la distance entre points R . On compare le modèle (à gauche) avec les données géophysiques (à droite). En bas : évolution de la dimension de corrélation en fonction de la dimension de plongement. Pour le modèle, on trouve une dimension de corrélation légèrement supérieure à 2, tandis que la valeur est plus haute dans le cas de la Terre ($d_c \sim 2.7$)

calculée pour une dimension de plongement suffisamment grande. La figure 5.19 illustre l'évolution de $C(R)$ en fonction de R , montrant un comportement en loi de puissance, dont l'exposant ν est la dimension de corrélation associée à la dimension de plongement d_e . Bien entendu, la dimension de plongement utilisée influence l'estimation de la dimension de corrélation. On montre à gauche le résultat obtenu par intégration numérique du modèle à trois modes, et à droite les données *SINT2000*. L'allure des courbes présente en général une saturation, traduisant la taille finie de l'attracteur. De plus, le début de la courbe présente des défauts dus au manque de résolution. En réalisant un ajustement numérique des courbes, on déduit l'exposant ν , qui peut être tracé en fonction de la dimension de plongement d_e . La figure 5.19, en bas, permet de déterminer la dimension de l'attracteur. Dans le cas du modèle comme pour les données paléomagnétiques, on observe que ν sature rapi-

dement vers une valeur indépendante de d_e , indiquant la dimension de corrélation d_c de l'attracteur. On trouve $d_c = 2.05$ pour le modèle, tandis que l'attracteur de SINT2000 semble posséder une dimension fractale plus importante $d_c \approx 2.7$. Il est particulièrement intéressant de noter que ν sature vers une valeur constante lorsque l'on augmente la dimension de plongement. En effet, si l'on considère un ensemble de points produits uniquement par un bruit blanc par exemple, on obtient la courbe $d_A = d_E$ (droite en pointillé). Un système dynamique de basse dimension en présence d'un bruit important aura donc tendance à ne pas saturer, en raison de l'effet du bruit. La saturation nette de la courbe confirme ainsi non-seulement la basse dimensionalité de la dynamique des renversements chaotiques du champ magnétique terrestre, mais suggère également une origine déterministe au chaos observé.

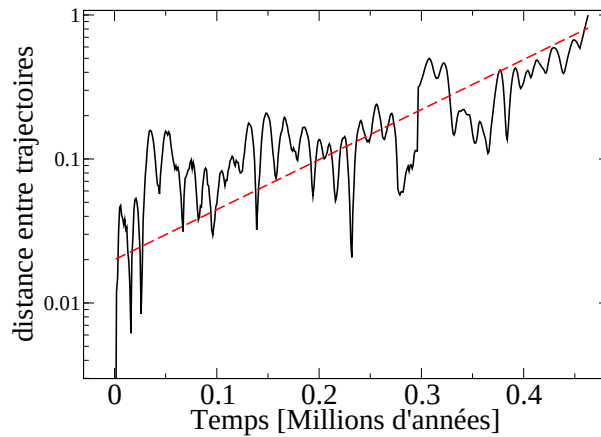


FIG. 5.20: Exposant de Lyapunov estimé en dimension de plongement 3.

L'attracteur chaotique obtenu à partir de *SINT2000* possède donc comme tout système chaotique, une certaine sensibilité aux conditions initiales. Cette propriété est évaluée en calculant expérimentalement le plus grand exposant de Lyapunov du système. La figure 5.20 illustre cet effet. On trouve $\lambda \simeq 0.1 Ma^{-1}$. Comme nous l'avons fait remarquer un peu plus haut, la détermination expérimentale de l'exposant de Lyapunov, telle qu'elle est réalisée ici, ne s'applique parfaitement que lorsqu'un grand nombre de points est disponible, et la valeur avancée ici n'est qu'une estimation grossière. Par conséquent, la présente étude ne fait que suggérer un chaos déterministe pour la géodynamo, sans qu'il soit possible de l'affirmer de manière définitive, ni de quantifier parfaitement les propriétés d'un tel attracteur.

5.5.2 Comparaison de la géodynamo avec un modèle de basse dimension.

La perspective de décrire la dynamique des renversements géomagnétiques dans le cadre d'un système de basse dimensionalité est évidemment très intéressante. En effet, cela fournit à la fois une vision simple du phénomène et peut permettre de faire des prévisions statistiques sur le comportement du champ. Pour cette raison, c'est une voie qui a été empruntée à de nombreuses reprises. En général, malgré leur comportement chaotique, les modèles de basse dimension tel que le modèle de Rikitake mènent à des comportements trop simples, incompatibles avec les données observationnelles. Kono, par exemple, a montré en 1987 que le modèle de Rikitake est incapable de reproduire la fonction de densité de probabilité des temps d'attente entre deux renversements observée pour la Terre [39]. La figure 5.21 montre les distributions de ces temps d'attente géomagnétiques ainsi que la distribution de l'intensité du dipole magnétique de la Terre. On suppose en général que les temps d'attente

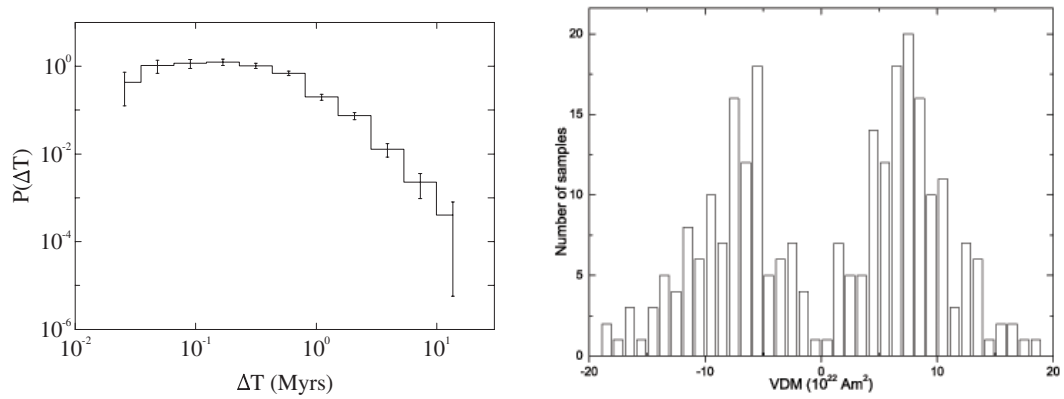


FIG. 5.21: A gauche : Distribution de probabilité des temps d'attente entre deux renversements géomagnétique. La loi est relativement poissonnienne. A droite : distribution de probabilité de l'intensité du dipole du champ terrestre. On observe une loi bi-normale.

entre deux renversement semblent être distribué selon une loi poissonnienne. Évidemment, il est difficile de conclure de manière absolue en raison du peu d'évènements disponibles. Par exemple, il a parfois été suggéré que la distribution est poissonnienne uniquement localement, mais avec un taux de renversements qui dépend du temps [15]. Le modèle de Rikitake présente une différence claire avec cette courbe : à partir d'une certain temps, le modèle montre soit une coupure claire, interdisant l'apparition de temps d'attente trop longs, soit au contraire l'apparition d'évènements longs en trop grand nombre. Dans tous les cas, le système ne se comporte pas comme un processus poissonien. De la même manière, il existe un désaccord avec la distribution de l'intensité du dipole. Dans le cas de la Terre, il existe deux maxima symétriques autour d'un minimum en zéro, alors que le modèle de Rikitake passe statistiquement trop de temps près de zéro, et la distribution s'écarte nettement des données paléomagnétiques. Ceci traduit une absence de séparation d'échelle de

temps entre les polarités fixées et les renversements.

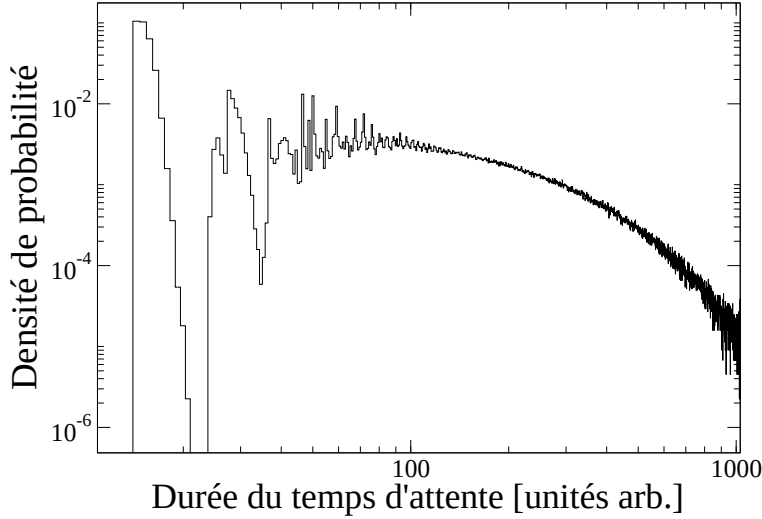


FIG. 5.22: Distribution des temps d'attente entre deux renversements pour le modèle. On observe des oscillations correspondant à la quantification aux temps courts et un comportement poissonien aux temps longs.

Comme nous l'avons montré précédemment, les renversements des amplitudes de notre modèle à trois modes se produisent à travers un phénomène dit d'intermittence induite par crise, a priori très différent du mécanisme vu dans les modèles de Rikitake ou Lorenz. Cette interprétation permet de prédire l'évolution du temps d'attente moyen entre deux renversements en fonction des paramètres de contrôle. Pour des valeurs des paramètres fixées, on peut également se demander comment se distribuent ces temps d'attentes en présence de chaos. On calcule ainsi la distribution des temps d'attentes entre deux renversements, pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. Il s'agit d'une observable qui peut permettre de mieux comprendre le type de renversement observés, mais également d'avoir un élément de comparaison avec des systèmes réels, comme l'expérience VKS ou les renversements du champ magnétique terrestre. En considérant la figure 5.22, on observe que pour les temps d'attente très courts, il apparaît une quantification. Ceci provient évidemment de la période minimale d'une orbite périodique autour de chaque point fixe. Ce comportement est typique des systèmes exhibant une dynamique de basse dimensionalité. Aux temps plus grands, on obtient bien une loi poissonnienne pour la distribution de ces temps :

$$P(\tau) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} e^{-\frac{\tau}{\langle \tau \rangle}} \quad (5.19)$$

On retrouve donc une évolution poissonnienne similaire à celle observée dans le cas de la Terre, malgré le faible nombre de degrés de liberté de ce modèle. La quantification au temps courts observée dans le modèle est une caractéristique forte du

chaos déterministe sous-jacent de la dynamique. Il serait intéressant de rechercher un tel comportement dans les données géophysiques. Notons toutefois que ce type d'événement disparaît rapidement en présence d'un bruit. On s'intéresse également

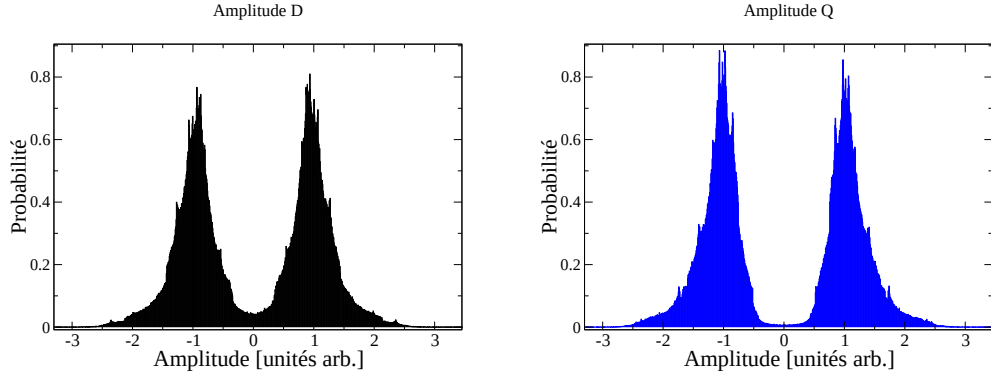


FIG. 5.23: Distribution de probabilité des amplitudes D (à gauche) et Q (à droite).

à la distribution de la valeur de l'amplitude Q durant les renversements. Elle fait apparaître une valeur moyenne autour des points fixes tandis que l'origine présente une probabilité très faible (voir figure 5.23), en accord avec les observations. Cet accord provient du type bien particulier de chaos engendré dans ce modèle, qui fait apparaître une séparation d'échelle entre la durée d'un renversement et le temps moyen passé dans une polarité donnée. Malgré le faible nombre de points de me-

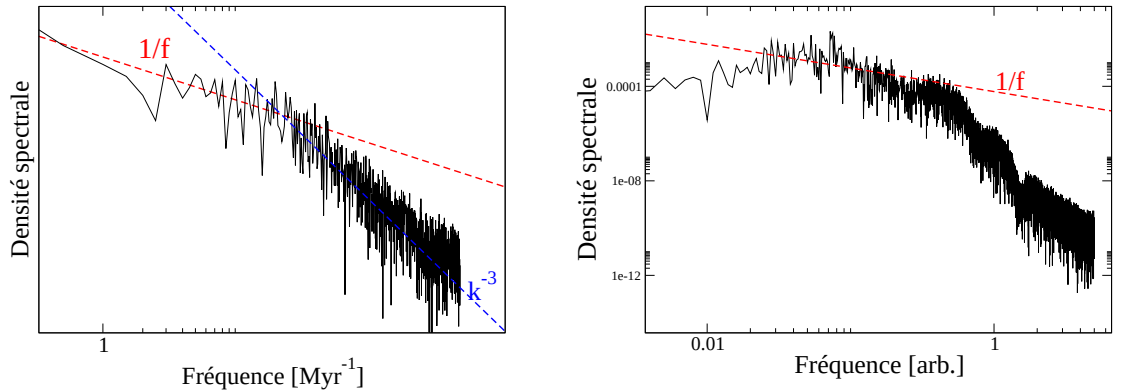


FIG. 5.24: Spectres temporels du modèle et de la géodynamo. Les données pour la Terre (à gauche) suggère un comportement en $1/f$ aux temps courts, difficilement reproductible à l'aide du modèle (à droite).

sures disponibles dans la série temporelle *SINT2000*, l'échantillonnage permet de réaliser une étude spectrale du signal. Celle-ci fait apparaître un spectre possédant un comportement compatible avec une distribution en $1/f$ aux temps courts, puis en f^{-2} aux temps plus longs. La figure 5.24 compare le spectre obtenu à partir des

données *SINT2000* à celui obtenu à partir de l'intégration numérique du modèle déterministe. On peut voir que ce dernier a une allure présentant quelques similarités, mais n'est pas capable de reproduire la partie en $1/f$ suggérée par les données géomagnétiques. Notons toutefois qu'une réelle comparaison avec le spectre du champ magnétique terrestre nécessiterait un examen plus approfondi des données paléomagnétiques qu'une simple étude des données *SINT2000*.

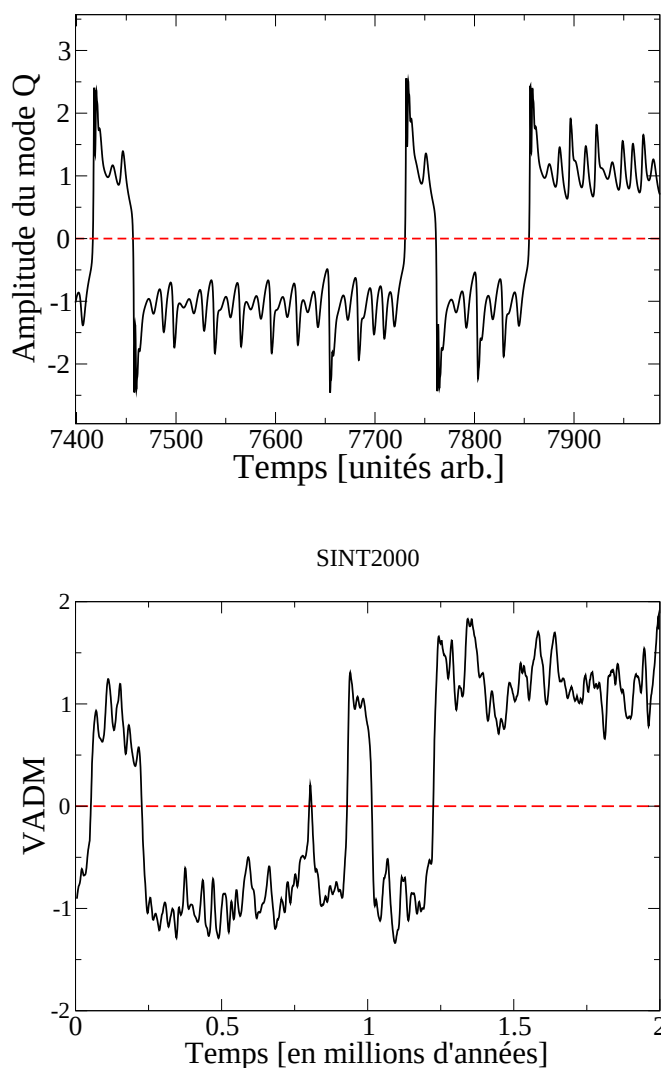


FIG. 5.25: Comparaison des signaux temporels obtenus à partir des données paléomagnétiques (en bas) et à partir du modèle à trois modes (D , Q , V), pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.1$ (en haut).

D'une manière générale, on voit que ce nouveau modèle simple permet de reproduire une partie des caractéristiques importantes de la géodynamo, comme la distribution poissonnienne des temps d'attente ou encore la loi de distribution de

l'intensité du champ. Comme le montre la figure 5.25, cette similarité entre les deux systèmes se retrouve par un simple examen des séries temporelles. Durant une polarité donnée, le champ magnétique terrestre effectue régulièrement de petites excursions, que l'on retrouve dans l'évolution temporelle du modèle. De plus, le modèle reproduit la tendance du champ à effectuer un rebond après chaque renversement, ainsi que la séparation d'échelle de temps entre les renversements et les états de polarité fixée.

Dans ce chapitre, nous avons tenté de donner une description géométrique de l'attracteur du modèle, afin de mieux comprendre l'origine de ces similarités. Nous avons ainsi pu mettre en évidence un scénario bien précis de transition vers le chaos, très différent de ceux observés dans d'autres modèles chaotiques plus connus, comme Rikitake ou Lorenz. La particularité de notre modèle est sa capacité à engendrer un comportement chaotique indépendamment du régime de renversements. Les renversements du champ sont donc la conséquence d'une connexion entre deux attracteurs chaotiques symétriques mais indépendants. C'est ce mécanisme qui produit la complexité apparente du signal temporel dans une polarité donnée, tout en produisant des renversements toujours identiques, avec une forme robuste. Bien que la géodynamo soit probablement le résultat de processus plus complexes que la simple interaction de trois modes, il est intéressant d'obtenir une manière simple de décrire ce phénomène complexe.

En raison de cet accord entre notre modèle et les observations, il est très tentant d'interpréter les renversements géomagnétiques comme résultant de l'interaction entre le dipôle et le quadrupole du champ magnétique terrestre. Dans le cadre du chaos déterministe décrit par notre modèle, cela nécessite un mode de vitesse particulier dans le champ de vitesse au sein du noyau terrestre jouant le rôle de l'amplitude V , et couplant les deux modes magnétiques. Il serait intéressant d'étudier les différentes possibilités pour un tel écoulement, correspondant à une brisure de grande échelle de la symétrie miroir au sein de l'écoulement du noyau de la Terre. En raison de la rotation rapide de la Terre, on suppose que l'écoulement au sein du noyau terrestre est en équilibre géostrophique, et on s'attend de plus à une invariance de la vitesse dans la direction axiale. Cette contrainte rend difficile la brisure spontanée de la symétrie miroir, et les simulations numériques suggèrent un écoulement symétrique par rapport à l'équateur. Toutefois, bien que cette contrainte se prolonge à l'intérieur du cylindre tangent entourant le noyau interne, la présence de la graine tend à découpler les deux hémisphères dans cette région, rendant ainsi possible l'existence de modes de vitesse anti-symétriques. L'écoulement à l'intérieur du cylindre tangent est donc un bon candidat pour provoquer un couplage linéaire entre dipôle et quadrupole.

Il existe de nombreux systèmes, différents de la dynamo, où l'on observe des renversements chaotiques d'une observable entre deux états symétriques. Généralement, l'interprétation en terme d'interaction à trois modes créant un chaos déterministe est facilement réfutable. En effet, la plupart des modèles existant prédisent un comportement très simpliste entre les renversements, avec une oscillation périodique

dont l'amplitude augmente régulièrement durant la polarité. Il est possible de faire disparaître cet aspect en couplant le système à un bruit externe, en rajoutant des termes d'ordre supérieurs ou encore en augmentant la dimension du modèle. Le modèle présenté dans ce chapitre montre qu'il est possible d'obtenir un comportement complexe entre les renversements, avec seulement trois modes en interactions limités aux ordres quadratiques. Cette observation est importante puisqu'elle ouvre la possibilité de comprendre des systèmes chaotiques complexes à l'aide d'un mécanisme simple, reposant avant tout sur des arguments de symétries.

Chapitre 6

Conclusion générale

6.1 Bilan général

Ce travail de thèse a permis d'aborder l'effet dynamo à travers plusieurs approches complémentaires. L'interaction entre mesures expérimentales et modélisations numériques a fait émerger une compréhension des systèmes dynamos à l'aide de modèles simples.

La dynamo turbulente VKS a été une opportunité unique d'étudier expérimentalement le problème. Nous avons vu au chapitre 2 que l'écoulement engendré dans l'expérience produit de nombreux régimes dynamiques différents pour le champ magnétique, mais que ces régimes semblent tous résulter d'une dynamique de basse dimension. Malgré le caractère très turbulent de l'écoulement, il est intéressant de remarquer que la dynamique reste principalement contrôlée par une compétition entre les modes dipolaires et quadrupolaires de champ magnétique. Cette compétition est bien comprise dans le cadre du modèle d'excitabilité près d'une bifurcation noeud-col, proposé par Pétrélis et Fauve.

Le travail numérique réalisé en interaction avec l'expérience VKS s'est divisé en deux parties, distinctes quant à la méthode numérique, mais complémentaires dans la compréhension des phénomènes. La modélisation effectuée au chapitre 3 a permis de bien cerner les mécanismes principaux à l'origine du succès de l'expérience VKS. On a ainsi pu montrer qu'il est possible de comprendre la génération du champ magnétique en impliquant les fluctuations hélicitaires non-axisymétriques de l'écoulement. Les simulations réalisées au chapitre 3 nous ont également conduit à mieux comprendre le rôle des disques ferromagnétiques dans l'expérience, qui est un point si crucial pour l'obtention de cette dynamo expérimentale. Enfin, ces simulations illustrent le mécanisme à l'origine des renversements du champ magnétique dans l'expérience VKS. On a vu qu'une brisure de symétrie dans l'écoulement peut, sous certaines conditions, favoriser l'apparition de régimes dépendant du temps.

L'étude numérique du chapitre 4 a été l'occasion de décrire les aspects non-linéaires du problème. Nos simulations montrent que les fluctuations turbulentes de vitesse sont capables d'engendrer un dipole axial, en moyenne axisymétrique. Ainsi, un résultat général qui émerge de cette thèse est la préférence du système à engendrer une dynamo relativement axisymétrique, malgré la contrainte du théorème de Cowling. Ce comportement s'illustre particulièrement bien dans le régime laminaire, où un type particulier de dynamo non-linéaire a été obtenu, lorsque la force de Laplace produit une compétition entre dipole axial et dipole équatorial.

Enfin, le problème des renversements du champ magnétique a été étudié. Nous avons montré qu'il est possible d'obtenir numériquement des renversements chaotiques similaires à ceux observés dans l'expérience, impliquant également une compétition entre dipole axial et quadrupole, et confirmant ainsi le modèle de Pétrélis et Fauve. Une conclusion importante de ce travail concerne le rôle du nombre de Prandtl magnétique : il a été mis en évidence que Pm contrôle la nature des renversements observés dans notre système dynamo : une diminution du nombre de Prandtl magnétique semble conduire à une dynamique de basse dimension du champ. Cette observation est importante car elle ouvre la possibilité de comprendre le problème complexe de l'effet dynamo à l'aide de systèmes simples, même en présence d'un écoulement fortement turbulent comme dans le cas de l'expérience VKS.

En fait, l'interprétation de nos résultats à l'aide de modèles de basse dimension a guidé les différentes étapes de ce travail de thèse. Cette démarche, qui fournit souvent une interprétation intuitive et simple des phénomènes en jeu, semble particulièrement bien adaptée au problème de la dynamo, où la dynamique des modes magnétiques tend à se découpler du champ de vitesse turbulent. La fin de cette thèse est d'ailleurs consacrée à l'étude d'un nouveau système dynamique, proposé comme modèle de renversements des dynamos turbulentes. Nous avons vu que ce modèle engendre des renversements chaotiques reposant sur un processus déterministe. Contrairement à d'autres systèmes du même type, ce modèle décrit de manière satisfaisante des situations complexes, ce qui nous a poussé à le comparer directement à un système réel, comme les renversements géomagnétiques.

6.2 Perspectives

Au terme de cette thèse, de nombreuses voies restent inexplorées. On peut par exemple regretter l'absence d'une étude numérique approfondie dans un régime plus turbulent. Même s'il existe une limitation importante due aux ressources numériques disponibles, il serait intéressant d'atteindre des nombres de Reynolds plus grands. Cette question est d'autant plus intéressante qu'un comportement surprenant apparaît dans les simulations réalisées avec le code *PaRoDy*. En effet, au chapitre 4, nous avons vu que le seuil Rm_c de l'instabilité dynamo semble augmenter linéairement avec le nombre de Reynolds Re . On peut donc se demander si cette courbe,

qui suggère plutôt pour l’instant un Pm critique, tend à saturer vers un seuil indépendant de Re . C’est une question qui a déjà été abordée, mais avec des approches numériques différentes [70], [35]. Par ailleurs, une étude numérique de l’instabilité dynamo en présence d’importantes fluctuations turbulentes présente un intérêt en soi.

Nous avons déjà insisté dans cette conclusion sur le rôle fondamental que joue le nombre de Prandtl magnétique dans nos simulations. L’augmentation du seuil de la dynamo avec Re que nous venons de discuter rend impossible l’étude des renversements pour des Pm très petits. Il serait donc intéressant d’aborder le rôle du nombre de Prandtl magnétique dans des simulations de géodynamo par exemple, pour lesquelles il est possible d’obtenir des dynamos à plus faible Pm . Une question cruciale serait par exemple de savoir si les valeurs qu’il est possible d’atteindre numériquement permettent d’observer une réduction de la dimension de la dynamique du système.

Dans le cas où les simulations numériques présentent un comportement de basse dimension, comme c’est le cas dans certaines des simulations présentées dans cette thèse, il n’est pas toujours évident de déterminer les modes impliqués. Il est plus difficile encore de trouver le système dynamique le plus pertinent pour une description simplifiée de la dynamique observée. Dans cette thèse, nous avons systématiquement utilisé des arguments de symétries en nous appuyant sur la signification physique des termes pour obtenir les modèles de basse dimension correspondant aux simulations numériques. Il serait intéressant de développer de nouveaux outils pour comparer la pertinence de différents systèmes dynamiques censés représenter une série temporelle donnée issue d’une simulation numérique. Par exemple, nous avons parfois utilisé les simulations directes pour trouver la valeur des paramètres dans les modèles. En effet, il est possible, à partir de l’évolution temporelle des modes (par exemple l’harmonique sphérique correspondant au dipole axial D), de calculer numériquement l’évolution de sa dérivée temporelle (c’est-à-dire $\dot{D}$). En faisant de même pour les autres modes concernés, il est possible de réaliser un ajustement numérique pour trouver les paramètres reliant disons $\dot{D}$ au modes D , Q ou V . Cela nous a permis parfois de discriminer différents systèmes dynamiques possibles.

Etant donné les limitations insurmontables imposées par la puissance des ordinateurs actuels, il est impossible, même à long terme, de décrire numériquement les problèmes dynamos aux nombres caractéristiques pertinents pour les dynamos naturelles. Dans ce contexte, il semble prometteur de combiner des calculs numériques 3D complexes avec une approche de type système dynamique, plus simple. La combinaison de ces deux outils peut nous permettre de mieux comprendre certains aspects liés à la dynamique des dynamos naturelles.

Bibliographie

- [1] H. Alfvén. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Nature*, 150, 1942. [12](#)
- [2] D. Armbruster, J. Guckenheimer, and P. Holmes. Heteroclinic cycles and modulated travelling waves in systems with $O(2)$ symmetry. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 29, 1988. [122](#)
- [3] R. Avalos-Zuniga, F. Plunian, and A. Gailitis. Influence of electromagnetic boundary conditions onto the onset of dynamo action in laboratory experiments. *Physical Review Letters*, 68, 2003. [85](#)
- [4] G. Backus. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Annals of Physics*, 4, 1958. [11](#)
- [5] G. K. Batchelor. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *Q J Mechanics Appl Math*, 4, 1951. [24](#)
- [6] R. A. Bayliss, C. B. Forest, M. D. Nornberg, E. J. Spence, and P. W. Terry. Numerical simulations of current generation and dynamo excitation in a mechanically forced turbulent flow. *Physical Review E*, 75, 2007. [107](#)
- [7] M. Berhanu. *Magnétohydrodynamique turbulente dans les métaux liquides*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, France, 2008. [36](#)
- [8] M. Berhanu, R. Monchaux, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, L. Marié, F. Ravelet, M. Bourgoin, P. Odier, J.-F. Pinton, and R. Volk. Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo. *Europhysics Letters*, 77, 2007. [36](#)
- [9] M. Bourgoin, P. Odier, J.-F. Pinton, and Y. Ricard. An iterative study of time independent induction effects in magnetohydrodynamics. *Physics of Fluids*, 16, 2004. [80](#), [81](#)
- [10] S.I. Braginskii. Self-excitation of a magnetic field during the motion of a highly conducting fluid. *Zh. Eksperim. i. Teor. Fiz.*, 47, 1964. [14](#)
- [11] Bernard Brunhes. Recherches sur la direction d'aimantation des roches volcaniques. *J. Phys. Theor. Appl.*, 5, 1906. [4](#)

- [12] E. Bullard. The stability of a homopolar dynamo. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51, 1955. [3](#)
- [13] E. Bullard and H. Gellman. Homogeneous Dynamos and Terrestrial Magnetism. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 247, 1954. [13](#)
- [14] E. C. Bullard and D. Gubbins. Generation of magnetic fields by fluid motions of global scale. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 8, 1977. [81](#)
- [15] V. Carbone, L. Sorriso-Valvo, A. Vecchio, F. Lepreti, P. Veltri, P. Harabaglia, and I. Guerra. Clustering of Polarity Reversals of the Geomagnetic Field. *Physical Review Letters*, 96, 2006. [177](#)
- [16] T. G. Cowling. The magnetic field of sunspots. *M.N.R.A.S.*, 94, 1933. [13](#)
- [17] E. Dormy. *Modélisation numérique de la dynamo terrestre*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, France, 1997. [101](#)
- [18] E. Dormy, P. Cardin, and D. Jault. MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters*, 160, 1998. [101](#)
- [19] E. Dormy and Soward A. M. *Mathematical aspects of Natural Dynamos*. CRC press, 2007. [2](#), [4](#), [14](#), [221](#)
- [20] M. L. Dudley and R. W. James. Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 425, 1989. [27](#)
- [21] S. Fauve, C. Laroche, and B. Castaing. Pressure fluctuations in swirling turbulent flows. *Journal de Physique II*, 3, 1993. [27](#)
- [22] A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement'ev, E. Platacis, A. Ciferons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, H. Hänel, and G. Will. Detection of a Flow Induced Magnetic Field Eigenmode in the Riga Dynamo Facility. *Physical Review Letters*, 84, 2000. [20](#)
- [23] Basile Gallet and François Pétrélis. From reversing to hemispherical dynamos. *Physical Review E*, 80, 2009. [45](#)
- [24] A. Giesecke, C. Nore, F. Plunian, R. Laguerre, A. Ribeiro, F. Stefani, G. Gerbeth, J. Leorat, and J. . Guermond. Generation of axisymmetric modes in cylindrical kinematic mean-field dynamos of VKS type. *ArXiv e-prints*, 2009. [91](#)
- [25] A. Giesecke, F. Stefani, and G. Gerbeth. Role of soft-iron impellers on the mode selection in the VKS dynamo experiment. *ArXiv e-prints*, 2009. [92](#), [94](#)
- [26] G. Glatzmaier and P. Roberts. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 91, 1995. [7](#)

- [27] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke. Critical exponents for crisis-induced intermittency. *Physical Review A*, 36, 1987. [160](#)
- [28] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Chaotic Attractors in Crisis. *Physical Review Letters*, 48, 1982. [160](#)
- [29] A. Herzenberg. Geomagnetic Dynamos. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 250, 1958. [18](#)
- [30] P. Hoyng, M. A. J. H. Ossendrijver, and D. Schmitt. The geodynamo as a bistable oscillator. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 94, 2001. [171](#)
- [31] D. W. Hughes and M. R. E. Proctor. A low-order model of the shear instability of convection : chaos and the effect of noise. *Nonlinearity*, 3, 1990. [147](#), [153](#)
- [32] D. W. Hughes and M. R. E. Proctor. Chaos and the effect of noise in a model of three-wave mode coupling. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 46, 1990. [153](#)
- [33] A. Iskakov and E. Dormy. On magnetic boundary conditions for non-spectral dynamo simulations. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 99, 2005. [74](#)
- [34] A. B. Iskakov, S. Descombes, and E. Dormy. An integro-differential formulation for magnetic induction in bounded domains : boundary element-finite volume method. *Journal of Computational Physics*, 197, 2004. [74](#)
- [35] A. B. Iskakov, A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, J. C. McWilliams, and M. R. E. Proctor. Numerical Demonstration of Fluctuation Dynamo at Low Magnetic Prandtl Numbers. *Physical Review Letters*, 98, 2007. [131](#), [185](#)
- [36] H. Jeffreys. The Rigidity of the Earth's Central Core. *Geophysical Journal International*, 1, 1926. [2](#)
- [37] R. Kaiser and A. Tilgner. Kinematic dynamos surrounded by a stationary conductor. *Physical Review E*, 60, 1999. [83](#)
- [38] T. von Karman. Uber laminare und turbulente Reibung. *Z. Angew. Math. Mech*, 1, 1921. [24](#)
- [39] M. Kono. Rikitake two-disk dynamo and paleomagnetism. *Geophysical Research Letters*, 14, 1987. [171](#), [177](#)
- [40] R. Laguerre. *Approximation des équations de la magnétohydrodynamique par une méthode hybride spectrale-éléments finis nodaux : application à l'effet dynamo*. PhD thesis, Université Denis Diderot, Paris 7, France, 2006. [82](#)
- [41] R. Laguerre, C. Nore, J. Leorat, and J. Guermond. Effects of conductivity jumps in the envelope of a kinematic dynamo flow. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 334, issue 10, pp. 593-598, 334, 2006. [78](#)

- [42] R. Laguerre, C. Nore, A. Ribeiro, J. Léorat, J.-L. Guermond, and F. Plunian. Erratum : Impact of Impellers on the Axisymmetric Magnetic Mode in the VKS2 Dynamo Experiment. *Physical Review Letters*, 101, 2008. [91](#)
- [43] R. Laguerre, C. Nore, A. Ribeiro, J. Léorat, J.-L. Guermond, and F. Plunian. Impact of Impellers on the Axisymmetric Magnetic Mode in the VKS2 Dynamo Experiment. *Physical Review Letters*, 101, 2008. [91](#)
- [44] J. Larmor. How could a rotating body such as the sun become a magnet. *Rep. Br. Assoc. Adv. Sci.*, 159, 1919. [2](#)
- [45] I. Lehmann. *Publ. Bur. Cent. Séism. Intern., série A, Travaux Scientifiques*, 14, 1936. [2](#)
- [46] E. N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, 1963. [169](#)
- [47] F. J. Lowes and I. Wilkinson. Geomagnetic Dynamo : A Laboratory Model. *Nature*, 198, 1963. [18](#)
- [48] F. J. Lowes and I. Wilkinson. Geomagnetic Dynamo : An Improved Laboratory Model. *Nature*, 219, 1968. [19](#)
- [49] P. Manneville. *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Cea, 1995. [173](#)
- [50] L. Marié, J. Burguete, F. Daviaud, and J. Léorat. Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Kármán type flows. *European Physical Journal B*, 33, 2003. [78](#)
- [51] L. Marié, C. Normand, and F. Daviaud. Galerkin analysis of kinematic dynamos in the von Kármán geometry. *Physics of Fluids*, 18, 2006. [78](#)
- [52] L. Marié. *Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent : influence de la rotation*. PhD thesis, Université Denis Diderot, Paris 7, France, 2003. [78](#)
- [53] P. Marty, A. Ajakh, and A. Thess. Magnetic field in fast breeder reactors : new results on thermoelectricity and dynamo effect. *Magnetohydrodynamics*, 30, 1995. [85](#)
- [54] H. K. Moffatt. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, 1977. [2](#), [13](#)
- [55] R. Monchaux, M. Berhanu, S. Aumaître, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, F. Ravelet, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, M. Bourgoïn, P. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, and R. Volk. The von Kármán Sodium experiment : Turbulent dynamical dynamos. *Physics of Fluids*, 21, 2009. [36](#), [37](#), [225](#)

- [56] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, M. Moulin, P. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, and F. Ravelet. Generation of a Magnetic Field by Dynamo Action in a Turbulent Flow of Liquid Sodium. *Physical Review Letters*, 98, 2007. [30](#)
- [57] V. Morin. *Instabilités et bifurcations associés à la modélisation de la géodynamo*. PhD thesis, Université Denis Diderot, Paris 7, France, 2005. [85](#)
- [58] C. Narteau and J. L. Le Mouél. Transient evolution regimes in a multiscale dynamo model : Timescales of the reversal mechanism. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 110, 2005. [171](#)
- [59] C. Narteau, J.-L. Le Mouél, and J.-P. Valet. The oscillatory nature of the geomagnetic field during reversals. *Earth and Planetary Science Letters*, 262, 2007. [171](#)
- [60] H.-C. Nataf, T. Alboussière, D. Brito, P. Cardin, N. Gagnière, D. Jault, J.-P. Masson, and D. Schmitt. Experimental study of super-rotation in a magnetostrophic spherical Couette flow. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 100, 2006. [22](#)
- [61] C. Nore, L. S. Tuckerman, O. Daube, and S. Xin. The 1 :2 mode interaction in exactly counter-rotating von Karmán swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 477, 2003. [122](#)
- [62] M. D. Nornberg, C. B. Forest, R. Kendrick, R. O’Connell, and E. J. Spence. Magnetic Eigenmode Analysis of the Madison Dynamo Experiment. *APS Meeting Abstracts*, 2004. [80](#)
- [63] P. Nozières. Reversals of the earth’s magnetic field : An attempt at a relaxation model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 17, 1978. [147](#), [170](#)
- [64] E. N. Parker. *Cosmical magnetic fields : Their origin and their activity*. Oxford University Press, 1979. [13](#)
- [65] F. Pétrélis and S. Fauve. Saturation of the magnetic field above the dynamo threshold. *European Physical Journal B*, 22, 2001. [20](#)
- [66] F. Pétrélis and S. Fauve. Chaotic dynamics of the magnetic field generated by dynamo action in a turbulent flow. *Journal of Physics Condensed Matter*, 20, 2008. [42](#), [96](#)
- [67] F. Pétrélis, S. Fauve, E. Dormy, and J.-P. Valet. Simple Mechanism for Reversals of Earth’s Magnetic Field. *Physical Review Letters*, 102, 2009. [45](#), [171](#)
- [68] F. Pétrélis, N. Mordant, and S. Fauve. On the magnetic fields generated by experimental dynamos. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 101, 2007. [34](#), [50](#)

- [69] Y. B. Ponomarenko. Theory of the hydromagnetic generator. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 14, 1973. [20](#)
- [70] Y. Ponty, P. D. Mininni, D. C. Montgomery, J. F. Pinton, H. Politano, and A. Pouquet. Numerical study of dynamo action at low magnetic Prandtl numbers. *Physical Review Letters*, 94, 2005. [131](#), [185](#)
- [71] M. R. E. Proctor and C. A. Jones. The interaction of two spatially resonant patterns in thermal convection. Part 1. Exact 1 :2 resonance. *Journal of Fluid Mechanics*, 188, 1988. [122](#)
- [72] F. Pétrélis. *Effet dynamo : études des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, France, 2002. [85](#)
- [73] F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and J. Léorat. Toward an experimental von Kármán dynamo : Numerical studies for an optimized design. *Physics of Fluids*, 17, 2005. [78](#)
- [74] T. Rikitake and E. C. Bullard. Oscillations of a system of disk dynamos. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 54, 1958. [4](#), [169](#)
- [75] G. O. Roberts. Dynamo Action of Fluid Motions with Two-Dimensional Periodicity. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 271, 1972. [20](#)
- [76] D. A. Ryan and G. R. Sarson. The geodynamo as a low-dimensional deterministic system at the edge of chaos. *Europhysics Letters*, 83, 2008. [172](#)
- [77] A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, J. L. Maron, and J. C. McWilliams. Critical Magnetic Prandtl Number for Small-Scale Dynamo. *Physical Review Letters*, 92, 2004. [131](#)
- [78] D. Schmitt, T. Alboussière, D. Brito, P. Cardin, N. Gagnière, D. Jault, and H.-C. Nataf. Rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field : experimental study of magneto-inertial waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 604, 2008. [22](#)
- [79] E. J. Spence, M. D. Nornberg, C. M. Jacobson, R. D. Kendrick, and C. B. Forrest. Observation of a Turbulence-Induced Large Scale Magnetic Field. *Physical Review Letters*, 96, 2006. [23](#)
- [80] M. Steenbeck, F. Krause, and K.-H. Rädler. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung. *Zeitschrift Naturforschung Teil A*, 21, 1966. [15](#)

- [81] F. Stefani, M. Xu, G. Gerbeth, F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and J. Leorat. Ambivalent effects of added layers on steady kinematic dynamos in cylindrical geometry : application to the VKS experiment. *European Journal of Mechanics B Fluids*, 25, 2006. [78](#), [82](#)
- [82] R. Stieglitz and U. Müller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Physics of Fluids*, 13, 2001. [20](#)
- [83] R. Teyssier, S. Fromang, and E. Dormy. Kinematic dynamos using constrained transport with high order Godunov schemes and adaptive mesh refinement. *Journal of Computational Physics*, 218, 2006. [70](#)
- [84] A. Tilgner. Numerical simulation of the onset of dynamo action in an experimental two-scale dynamo. *Physics of Fluids*, 14, 2002. [20](#)
- [85] J.-P. Valet, L. Meynadier, and Y. Guyodo. Geomagnetic dipole strength and reversal rate over the past two million years. *Nature*, 435, 2005. [41](#), [170](#), [171](#), [172](#), [235](#)

Annexe A

Modélisation de la dynamo galactique

Direct numerical simulations of the galactic dynamo in the kinematic growing phase

Christophe Gissinger,^{1*} Sebastien Fromang^{2,3} and Emmanuel Dormy⁴

¹*LPS, CNRS UMR 8550, Ecole Normale Supérieure, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

²*DAMTP, University of Cambridge, Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA*

³*CEA, Irfu, SAp (UMR AIM), Centre de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*

⁴*MAG (IPGP/ENS), CNRS UMR 7154, LRA, Ecole Normale Supérieure, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

Accepted 2008 December 23. Received 2008 December 23; in original form 2008 November 4

ABSTRACT

We present kinematic simulations of a galactic dynamo model based on the large-scale differential rotation and the small-scale helical fluctuations due to supernova explosions. We report for the first time direct numerical simulations of the full galactic dynamo using an unparametrized global approach. We argue that the scale of helicity injection is large enough to be directly resolved rather than parametrized. While the actual superbubble characteristics can only be approached, we show that numerical simulations yield magnetic structures which are close to both the observations and the previous parametrized mean field models. In particular, the quadrupolar symmetry and the spiraling properties of the field are reproduced. Moreover, our simulations show that the presence of a vertical inflow plays an essential role to increase the magnetic growth rate. This observation could indicate an important role of the downward flow (possibly linked with galactic fountains) in sustaining galactic magnetic fields.

Key words: magnetic field – MHD – ISM: bubbles – galaxies: ISM – galaxies: magnetic fields.

1 INTRODUCTION

It is widely accepted that magnetic fields of planets, stars and galaxies are generated by dynamo action, i.e. by the magnetic field amplification due to electromagnetic induction associated with the motion of an electrically conducting fluid (Moffatt 1978). The flow of gas in the interstellar medium appears to convey the essential ingredients for such dynamo action (Rosner & Deluca 1989; Wielebinski 1990). A differential rotation in the galactic disc creates a strong shear along the radial direction. This shear is very efficient at stretching radial magnetic field lines in the azimuthal direction (this is known as the ω -effect). In combination with this large-scale effect, the turbulent motions at small scales provide a cyclonic flow generating poloidal magnetic field (this is the so-called α -effect). Together, both effects suggest the possibility of an α - ω type of dynamo that might be responsible for generating the galactic magnetic field (Parker 1971; Vainshtein & Ruzmaikin 1971). Let us note that alternative models for dynamo action in galaxies have been proposed through the action of cosmic rays (Hanasz et al. 2004) or in a cosmological context (Wang & Abel 2007), which will not be discussed here. The apparent scale separation between the shear and the turbulent motions has often been invoked to introduce a mean field approach for the galactic dynamo (Beck et al. 1996; Ferriere 1998). In such formalism, an equation only for the large-scale magnetic field is

solved, the effect of small scales being parametrized by an α term (Krause & Raedler 1980). Relying on mean field equations has proven to be a very efficient approach to the galactic dynamo problem (Ferriere 1992). It is, for example, an efficient way to achieve moderate simulation time. However, the results of mean field simulations are intrinsically limited by strong assumptions such as scale separation or the statistical properties of turbulence. It is thus interesting to study galactic dynamos with direct simulations of the full problem by properly treating the small-scale flow associated with the turbulence in the interstellar medium and thus solve for the magnetic field at all scales.

It is often assumed that the most importance source of turbulence in the interstellar medium comes from supernova explosions (McCray & Snow 1979). The positions of these explosions are not completely random in the disc but they often occur in cluster. This produces giant expanding cavities of gas known as superbubbles. These explosions occurring in a rotating galaxy, the expansion is affected by a Coriolis force. This yields cyclonic motions and thus a strong helicity in the gas flow (Ferriere 1998). In such a framework, however, it is worth noting that the scale separation mentioned above is not dramatic. Superbubbles have typical sizes of the order of a few hundreds parsec (see Oey & Clarke 1997). This is smaller, but not dramatically smaller than the typical vertical scale of the galaxy (~ 1 kpc). Given modern day computational resources, these numbers suggest that direct numerical simulations (i.e. numerical simulations that do not rely on an ad hoc parameterization of the small scales, e.g., through the α -effect) are within reach. Indeed,

*E-mail: christophe.gissinger@lps.ens.fr

Gressel et al. (2008) recently presented such simulations. To cope with the large resolution still needed to address this problem, they adopted a local approach based on the shearing box model. Their results indicate a good agreement of the local approach with mean field models. However, the local approach they used precludes any global diagnostics, such as the global structure of the field, to be established.

The purpose of this Letter is to present such global numerical simulations, resolving the magnetic field at all relevant scales in the galaxy (i.e. from 100 pc to 10 kpc). To reduce the computational burden that would be associated with full magnetohydrodynamics simulations, we work in the kinematic regime: we solve the induction equation using a prescribed and time-dependent gas flow. The latter is set by using an analytical velocity field which intends to reproduce the large-scale shear associated with rotation and the effect of superbubble explosions on the interstellar medium.

2 NUMERICAL MODEL

The direct numerical simulations presented in this Letter are fully three-dimensional. We solve the induction equation governing the evolution of the solenoidal magnetic field $\mathbf{B}$ in a cylindrical coordinate system (r, ϕ, z) :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \text{Rm}^{-1} \Delta \mathbf{B}, \quad (1)$$

written in a dimensionless form using the advective time-scale. The magnetic Reynolds number Rm is defined as $\text{Rm} = \mu_0 \sigma r_0 U_0$, where μ_0 is the permeability of vacuum, the typical length scale $r_0 = 10$ kpc is the radius of the galactic disc, the typical velocity scale U_0 is the velocity of the large-scale flow (i.e. the differential rotation of the galaxy) and σ is the conductivity of the plasma.¹ In our simulations, the vertical extent of the galactic disc is $H = r_0/10$, z , thus range from $-0.05r_0$ to $+0.05r_0$. We restrict our attention here to the kinematic problem, ignoring the back reaction of the magnetic field on the flow. The velocity field $\mathbf{u}$ used in equation (1) is analytical and represents the differential rotation of the galaxy and the supernova explosions. This approach also means that we do not explicitly consider important effects such as density stratification in the vertical direction or the induction effect which would be due to interstellar turbulence (Ruzmaikin, Sokolov & Shukurov 1988).

Equation (1) is solved using a finite volume approach. The method is described in details by Teyssier, Fromang & Dormy (2006): it uses the MUSCL–Hancock upwind method. The solenoidal character of the magnetic field $\mathbf{B}$ is maintained through the constrained transport algorithm (Yee 1966; Evans & Hawley 1988). We rely here on the so-called pseudo-vacuum boundary conditions for the magnetic field. This corresponds to imposing $\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ at all boundaries of the computational domain. These boundary conditions are not fully realistic, but they are often used in parametrized models of galactic dynamos and simple to implement. These boundary conditions are known to modify quantitative results (such as the threshold value for dynamo action) but not the global qualitative solution (Gissinger et al. 2008). We now turn to a detailed description of the velocity field being used. It is the sum of two terms: rotation around the vertical axis and modification of the flow by superbubbles. In

our simulations, we use the following prescription for the rotation: $\mathbf{U} = U_0 \mathbf{e}_\phi$, with a constant U_0 . This is a good approximation since the angular velocity is observed to be roughly proportional to $1/r$ in galaxies. The effect of supernova explosions is more subtle to implement. We decided to consider the effect of superbubbles only and ignore here isolated supernovae, as the energy input of the former is largely dominant (Ferriere 1998). Considering superbubbles rather than smaller isolated supernovae yields larger scales which directly translate into resolutions affordable with modern days computing resources. Let us consider first the explosion of one superbubble, in a local spherical coordinate system (r', θ', ϕ') . Following the work of Ferriere (1998), we work under the simplifying assumption that each explosion remnant has a perfectly spherical shape. We thus use the simple radius evolution law (Weaver et al. 1977):

$$r'_{\text{sb}} = A t^\nu. \quad (2)$$

During the expansion of each superbubble, the rotation of the galaxy yields a Coriolis force which tends to deflect the initially radial expansion and create cyclonic motions. This is an essential step in classical mean field α – ω description of the galactic dynamo (Ferriere 1998). This Coriolis effect can be evaluated by solving the equation of gas motion:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F}_e - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{r'}, \quad (3)$$

where $\mathbf{F}_e$ is a force leading to the radial expansion described by equation (2). Integrating equation (3) in the radial direction leads to the expansion equation (2). The azimuthal velocity is obtained by integrating the equation (3) in the azimuthal direction. In doing so, we made the approximation that the Coriolis force on the superbubble is only due to the radial expansion of the shell. Inside the superbubble, we assume a linear variation of velocity in radius. An important parameter is r'_c , the critical size reached by the superbubble, for which the pressure in the cavity becomes comparable to that of the surrounding medium. At this point, we consider that the bubble merges with the interstellar medium. This situation generally occurs when the radial velocity of the shell becomes comparable to the velocity of sound in the medium. In our modelling, this critical velocity numerically determines the end of existence of a superbubble. The velocity field associated with a superbubble therefore vanishes when the radial velocity reaches this critical velocity v_c . This radial expansion and the associated Coriolis force totally determine the flow at small scales. In most observed galaxies, the spatial distribution of explosions in the galaxy is rapidly decreasing away from the mid-plane of the disc. For simplicity, we will assume here that all explosions occur in the mid-plane only, but with random position in the disc. In actual galaxies, there is a large observed dispersion of data about superbubbles, yet averaged values for the explosions rate of superbubbles are $f_0 = 4.5 \times 10^{-7} \text{ kpc}^{-2} \text{ yr}^{-1}$ (Elmegreen & Clemens 1985). Such parameters, however, are still out of reach of present computations (especially because of the high explosion rate which implies large numbers of superbubbles to be handled at the same time). We use here a lower rate of superbubbles, but more powerful explosions, thus leading to a similar helicity input. In the simulations reported here, $f = f_0/50$, $r'_c = 0.4$, $A = 0.35$ and $\nu = 0.6$. This corresponds to about 150 superbubbles expanding in the galactic disc at a given time in the simulations. In some cases, we will also take into account a downward flow. Due to the simplicity of our model, this velocity could be attributed to turbulent diamagnetism (Sokoloff & Shukurov 1990) or to the galactic fountain mechanism (Shapiro & Field 1976; Bregman 1980). As an attempt to describe these effects, we add the following vertical

¹ We could have adopted alternative definitions of the Reynolds number, for example $\text{Rm}' = \mu_0 \sigma H V_s/2$, where V_s is the sound velocity, which is equal to the terminal velocity of the superbubbles (see later in the text). With this definition, $\text{Rm}' = \text{Rm}/200$ and the maximum value achieved in this work would be $\text{Rm}' = 500$.

velocity to the flow:

$$v_z(z) = \frac{-\gamma z}{\sqrt{2\pi}2\beta} e^{-z^2/2\beta^2}. \quad (4)$$

It is antisymmetric with respect to the mid-plane and vanishes for $z = 0$. Moreover, the infall velocity decreases far away from the mid-plane. The parameter β controls the extension of the infall region and we use here $\beta = r'_c/3$ so that the maximum of the infall is near the region where superbubble explosions tend to accumulate the matter. γ is a free parameter controlling the amplitude of the vertical velocity. We will use $\gamma = 0.03$ throughout this Letter corresponding to a typical velocity of 6 km s^{-1} . Despite the simplifications implied by working in the kinematic regime, large spatial resolutions are still needed in order to correctly describe the evolution of the superbubbles at small scales. In the runs presented here, we used a resolution of $N_r = 200$, $N_\phi = 640$ and $N_z = 36$.

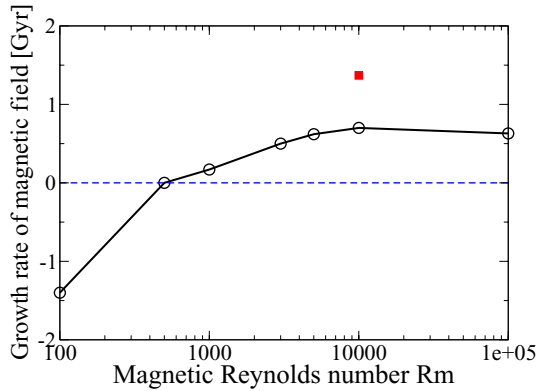


Figure 1. Growth rate of the magnetic energy as a function of the magnetic Reynolds number. Black circles correspond to simulations without infall ($\gamma = 0$), whereas the filled red square corresponds to a simulation with $\gamma = 0.03$.

3 RESULTS

3.1 General features

We performed simulations for seven different magnetic Reynolds number ranging from $Rm = 100$ to 10^5 (this would correspond to Rm' between 0.5 and 500). We choose to stop the simulations after a few resistive times, when the growth rate of the magnetic energy is statistically invariant and the exponential growth is well established.

For all of these simulations, we measure the growth rate of the magnetic energy. It is displayed on Fig. 1 as a function of the magnetic Reynolds number, Rm . It is negative when the magnetic Reynolds number, Rm , is smaller than $Rm_c \sim 500$. It is positive for larger Rm , indicating exponential amplification in that case. For $Rm = 10^5$, the growth rate is $\sigma = 0.6 \text{ Gyr}^{-1}$. Such growth times are comparable to the ones obtained by Gressel et al. (2008), although they seem to be larger in our case.

The result of a typical simulation ($Rm = 10^5$) once the exponentially growing phase is reached is illustrated in Fig. 2, which shows simultaneously the structure of the magnetic field and that of the flow. Many superbubbles (red isosurfaces) are present at a given time in the model. We also show field lines (plotted in blue) of the magnetic field. The observed magnetic structure is the results of the combined effects of the superbubble explosions and the differential rotation of the disc. The coloured slice shows the magnetic energy in the equatorial plane. It is strongly fluctuating due to the complicated nature of the flow. The overall topology of the magnetic field is complex. We now turn to a detailed study of its structure.

3.2 Structure of the magnetic field

The structure in the (r, ϕ) plane is complicated and varies with the altitude z . Fig. 3 shows the magnetic field in the mid-plane of the galaxy (the solid lines represent field lines projected in this plane and the colour code indicates the strength of B_z).

In the mid-plane, the field is organized in a spiral structure. The sign of B_ϕ is constant along the radial direction. Near the axis of

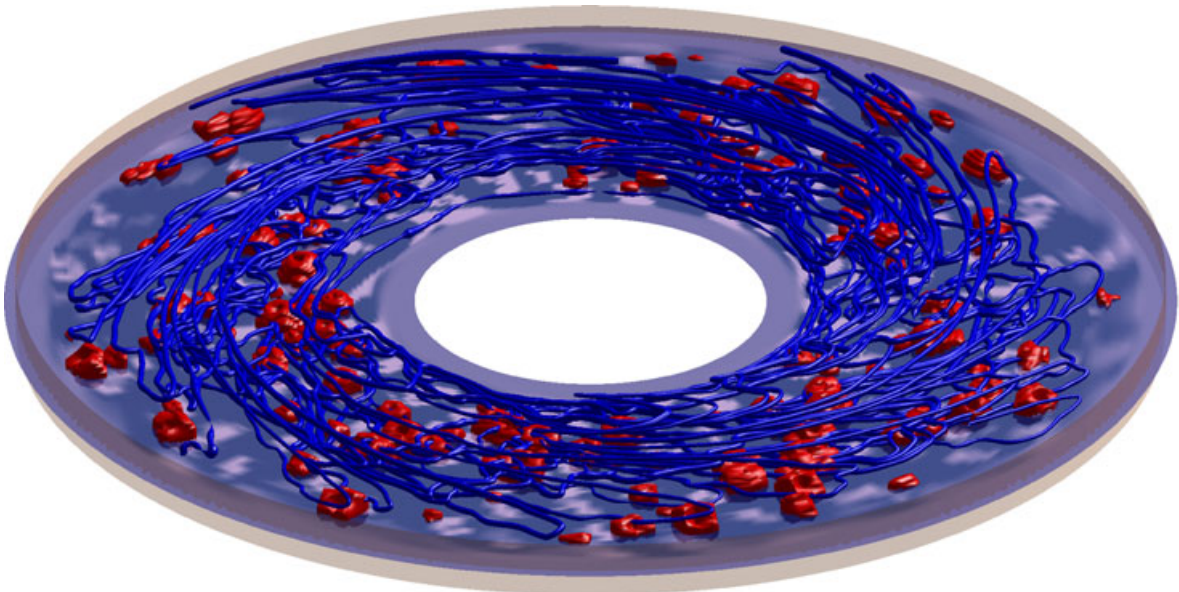


Figure 2. Field lines of the magnetic field (blue) are represented for $Rm = 7000$. Both the spiral structure of the magnetic field and its quadrupolar symmetry can be identified. Isosurface corresponding to 1 per cent of the peak kinetic energy is also represented (red).

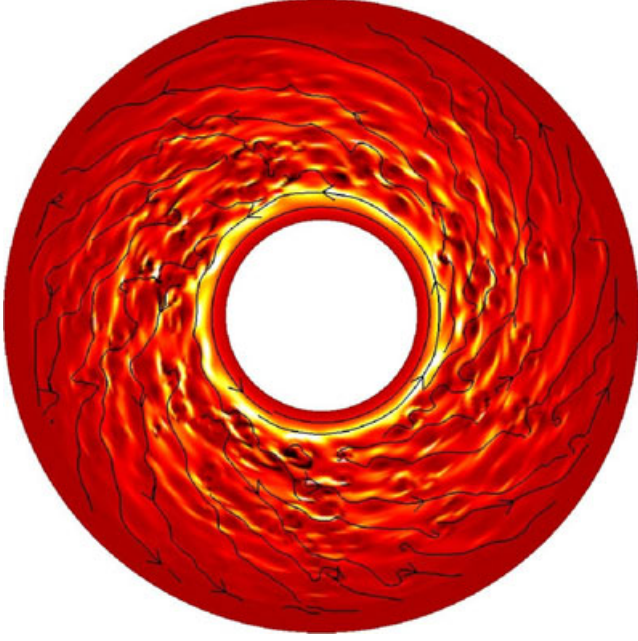


Figure 3. Structure of instantaneous magnetic field in (r, ϕ) plane in the mid-plane of the galaxy at $z = 0$. Magnetic field lines projected in the (r, ϕ) plane are represented by black lines and the colour code reflects the strength of B_z .

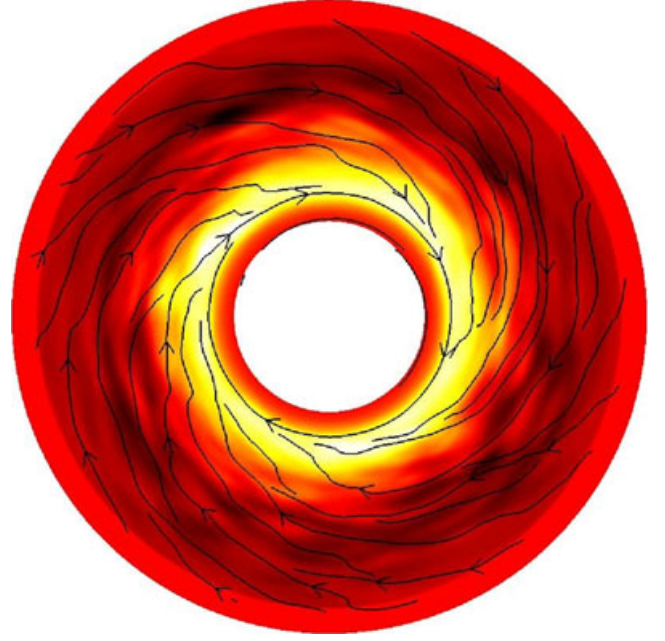


Figure 4. Magnetic field just before the top of the domain. Note that the magnetic field is smooth due to the weak effect of the superbubbles at this altitude. The sign of B_ϕ is reversed compared to the mid-plane.

rotation of the disc, the azimuthal field largely dominates all others components, but rapidly goes to zero at the inner boundary in order to satisfy the boundary conditions. At larger radii, the vertical field is negligible while B_ϕ and B_r are now comparable. Their relative value is given by the magnetic pitch angle defined as $p_B = \arctan(B_r/B_\phi)$. It is remarkable that, despite the fact that numerical parameters are far from actual values, p_B is very close to the observations: except near the unrealistic boundaries of the domain, the pitch angle is, in general, close to -15° , which is in agreement with the range $[-30^\circ, -10^\circ]$ observed in real galaxies (Shukurov 2007). An average of the pitch angle in radius from $r = 0.2$ to 0.8 gives $p_B \simeq -15^\circ$. This is also in agreement with Gressel et al. (2008) although smaller, as they report a pitch angle around -10° .

At higher altitudes, the structure of the field is much more complicated. By increasing z , we observe that B_ϕ can change sign. We always observe opposite sign of B_ϕ between the mid-plane ($z = 0$) and the halo ($z = +z_0$) (see Fig. 4). At intermediate altitudes, B_ϕ can also reverse sign along the radial direction itself, as it is shown in Fig. 5.

While the structure in the (r, ϕ) plane is not very sensitive to the resistivity, the magnetic field in the (r, z) plane presents different behaviours depending on the value of the Reynolds number, Rm , as shown in Fig. 6. A quadrupolar structure is ubiquitous in all simulations but the location of the magnetic loops does depend on Rm . Indeed, the effect of superbubbles is located near the mid-plane and produces strong expulsion of magnetic field in the halo of the galaxy. For weak Rm , the magnetic resistivity counteracts this effect through vertical diffusion. For larger Rm , the weak magnetic resistivity cannot balance anymore the strong vertical expulsion of magnetic field due to multiple explosions. As a consequence, the quadrupole becomes unrealistically confined to the halo of the galaxy (Fig. 6c), far from the active region. Although the creation of this external shell does not totally inhibit dynamo action, it clearly decreases the magnetic growth rate.

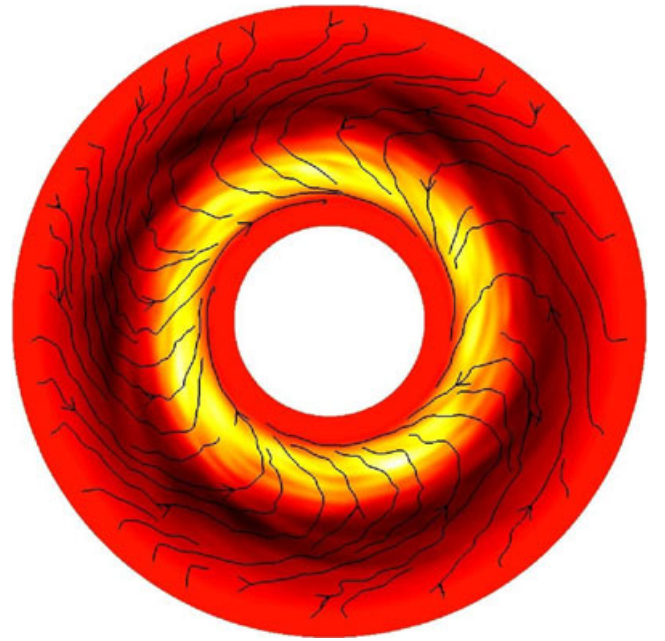


Figure 5. Magnetic field at $z = z_0/2$. Note that B_ϕ changes sign when the radius is increased.

3.3 Effect of vertical infall

This behaviour indicates how the diffusion of magnetic field can play two opposite roles: on one hand, it is obviously defavourable to dynamo action by increasing resistivity in the induction equation. On the other hand, diffusion can be favourable by preventing magnetic flux expulsion away from the mid-plane region where the small-scale flow is important. However, for weak resistivity (as is the case in real galaxies), superbubbles expel the magnetic field out of the active region of galactic disc, thus inhibiting dynamo action.

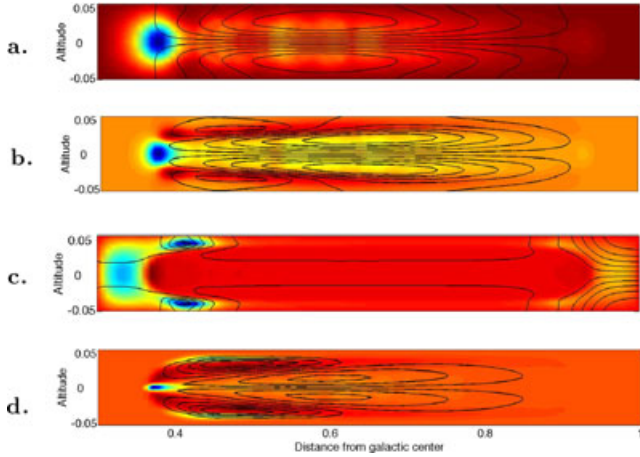


Figure 6. Magnetic structure of ϕ -averaged magnetic field in the (r, z) plane for: $Rm = 1000$ (a), $Rm = 3000$ (b) and $Rm = 10^4$ (c and d). Flux expulsion is clearly visible on plot (c). Plot (d) corresponds to a simulation including vertical infall. Flux expulsion can thus be counteracted.

In that case, adding a vertical inflow by using equation (4) proved to be an essential ingredient to dynamo action. This vertical flow indeed pumps the magnetic field from the halo to the mid-plane, which increases considerably the growth rate of magnetic energy. For $Rm = 10^4$, for example, the growth rate increases from $\sigma = 0.7 \text{ Gyr}^{-1}$ without inflow to $\sigma = 1.4 \text{ Gyr}^{-1}$ with vertical inflow (filled red square on Fig. 1). As seen on Fig. 6(d), the magnetic field structure is again quadrupolar in that case and spread out over the whole galaxy.

4 CONCLUSION

We have shown that according to our simple model, it is possible to perform numerical simulations of the galactic dynamo without the need for a mean field formalism. We thus avoid assumptions in the scale separation and can control more rigorously the origin of the source term in the induction equation. Our simulations yield magnetic field with two main characteristics: a quadrupolar symmetry in the (r, z) plane and a roughly axisymmetric spiral configuration in the (r, ϕ) plane. Both characteristics are in good agreement with observations and confirm previous studies that used a mean field approach. A detailed study of the magnetic field topology shows a complicated structure, with reversals of B_ϕ along the radial or vertical directions. Another interesting features of this work are the paradoxical role of superbubbles in the limit of very weak magnetic diffusion. Indeed, the turbulent flow due to explosions is, with the differential rotation, an essential ingredient of the α - ω dynamo but

also inhibits dynamo action by confining the magnetic field in the halo of the galaxy. In this context, the vertical inflow of interstellar gas appears as the third main ingredient needed for dynamo action. The downward flow observed in galaxies could thus be an essential mechanism of galactic dynamo theory.

ACKNOWLEDGMENTS

Computations presented in the article were performed on the IDRIS and CEMAG computing centres. We are grateful to Romain Teyssier for enlightening discussions and Anvar Shukurov for useful comments.

REFERENCES

- Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D., 1996, *ARA&A*, 34, 155
- Bregman J. N., 1980, *ApJ*, 236, 577
- Elmegreen B. G., Clemens C., 1985, *ApJ*, 294, 523
- Evans C., Hawley J., 1988, *ApJ*, 33, 659
- Ferriere K., 1992, *ApJ*, 391, 188
- Ferriere K., 1998, *A&A*, 335, 488
- Gissinger C., Iskakov A., Fauve S., Dormy E., 2008, *Europhys. Lett.*, 82, 29001
- Gressel O., Elstner D., Ziegler U., Rüdiger G., 2008, *A&A*, 486, L35
- Hanasz M., Kowal G., Otmianowska-Mazur K., Lesch H., 2004, *ApJ*, 605, L33
- Krause F., Raedler K.-H., 1980, *Mean-field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. Pergamon Press, Oxford
- McCrack R., Snow T. P., Jr, 1979, *ARA&A*, 17, 213
- Moffatt H. K., 1978, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, England
- Oey M. S., Clarke C. J., 1997, *MNRAS*, 289, 570
- Parker E. N., 1971, *ApJ*, 163, 255
- Rosner R., Deluca E., 1989, in Morris M., ed., *Proc. IAU Symp. 136, The Center of the Galaxy*. Kluwer, Dordrecht, p. 319
- Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D., Shukurov A. M., 1988, *Magnetic Fields of Galaxies*. Kluwer, Dordrecht
- Shapiro P. R., Field G. B., 1976, *ApJ*, 205, 762
- Shukurov A., 2007, in Dormy E., Soward A. M., eds, *Galactic Dynamos*. CRC Press, Boca Raton, p. 313
- Sokoloff D., Shukurov A., 1990, *Nat*, 347, 51
- Teyssier R., Fromang S., Dormy E., 2006, *J. Comp. Phys.*, 218, 44
- Vainshtein S. I., Ruzmaikin A. A., 1971, *Astron. Zh.*, 48, 902
- Wang P., Abel T., 2007, preprint (arXiv:0712.0872)
- Weaver R., McCray R., Castor J., Shapiro P., Moore R., 1977, *ApJ*, 218, 377
- Wielebinski R., 1990, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 50, 19
- Yee K., 1966, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 14, 302

This paper has been typeset from a $\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

Annexe B

Articles publiés durant la thèse

Effect of magnetic boundary conditions on the dynamo threshold of von Kármán swirling flows

C. GISSINGER^{1,2(a)}, A. ISKAKOV^{3,4}, S. FAUVE¹ and E. DORMY^{2,3}

¹ *Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure CNRS - 24 rue Lhomond, F-75005 Paris, France, EU*

² *Laboratoire de Radioastronomie, École Normale Supérieure CNRS - 24 rue Lhomond, F-75005 Paris, France, EU*

³ *Institut de Physique du Globe de Paris - Paris, France, EU*

⁴ *U.C.L.A., Physics Department - Los Angeles, CA, USA*

received 25 February 2008; accepted in final form 26 March 2008

published online 7 April 2008

PACS 91.25.Cw – Origins and models of the magnetic field; dynamo theories

PACS 47.65.-d – Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics

Abstract – We study the effect of different boundary conditions on the kinematic dynamo threshold of von Kármán type swirling flows in a cylindrical geometry. Using an analytical test flow, we model different boundary conditions: insulating walls all over the flow, effect of sodium at rest on the cylinder side boundary, effect of sodium behind the impellers, effect of impellers or side wall made of a high-magnetic-permeability material. We find that using high-magnetic-permeability boundary conditions decreases the dynamo threshold, the minimum being achieved when they are implemented all over the flow.

Copyright © EPLA, 2008

Dynamo action, *i.e.*, self-generation of magnetic field by the flow of an electrically conducting fluid, is at the origin of planetary, stellar and galactic fields [1]. Fluid dynamos have been observed only recently in laboratory experiments in Karlsruhe [2] and Riga [3] by geometrically constraining the flow lines in order to mimic laminar flows that were known analytically for their dynamo efficiency [4]. More recently, the VKS experiment displayed self-generation in a less constrained geometry, *e.g.* a von Kármán swirling flow generated between two counter-rotating impellers in a cylinder [5]. However, until now, dynamo action in the VKS geometry has been found only when the impellers are made of soft iron. It is thus of primary importance to understand how the dynamo problem is modified by the presence of magnetic material at the flow boundaries. We address this problem here using a kinematic dynamo code in a cylindrical geometry. Two important approximations are made to simplify the study. First, an analytic test flow that mimics the geometry of the mean flow of the VKS experiment is considered. Second, the magnetic boundary conditions are taken in the limit of infinite magnetic permeability of the boundaries compared to the one of the fluid. This seems a reasonable approximation for soft iron compared to liquid sodium. Our main

result is that the critical magnetic Reynolds number, Rm_c , for dynamo generation is significantly decreased with boundaries of high magnetic permeability all over the flow.

The VKS experimental set-up is sketched in fig. 1. A turbulent von Kármán flow of liquid sodium is generated by two counter-rotating impellers (rotation frequencies F_1 and F_2). The impellers are made of iron disks of radius 154 mm, fitted with 8 iron blades of height 41.2 mm, and are placed 371 mm apart in an inner cylinder of radius 206 mm and length 524 mm. It is surrounded by sodium at rest in another concentric cylindrical vessel, 578 mm in inner diameter. This has been shown to decrease the dynamo threshold in kinematic computations based on the mean flow velocity [6]. When the impellers are operated at equal and opposite rotation rates F , a statistically stationary magnetic field is generated above a magnetic Reynolds number $R_m \sim 30$ [5]. The large-scale field involves an azimuthal component and a poloidal one which is dominated by an axial dipole. This geometry has been understood with a simple $\alpha - \omega$ dynamo model [7] by taking into account the helical nature of the flow that is ejected by the centrifugal force close to each impeller between successive blades. Relying on the mean flow alone to compute the kinematic dynamo, smoothes out these non-axisymmetric velocity fluctuations and thus cannot generate an axisymmetric field according to Cowling

^(a)E-mail: christophe.gissinger@lps.ens.fr

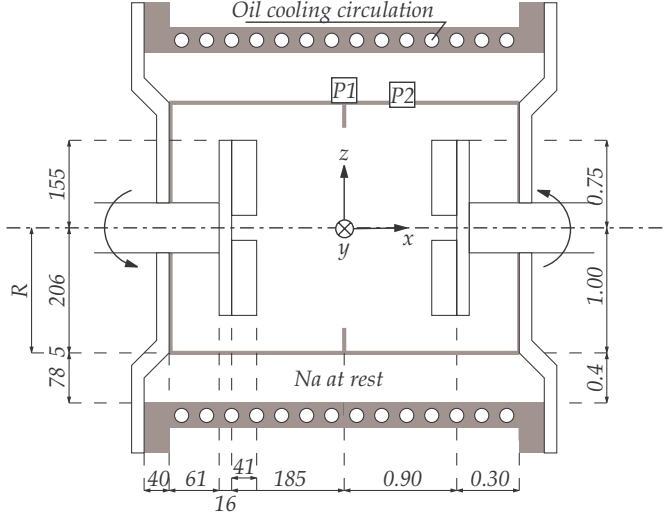


Fig. 1: Sketch of the VKS experiment [5]. The inner and outer cylinders are made of copper (in gray). The dimension are given in millimeter (left) and normalized by the radius of the inner cylinder (right).

theorem. A non-axisymmetric field is obtained, dominated by an equatorial dipole [6,8].

When the disks are counter-rotating at the same frequency, the structure of the mean flow (averaged in time) has the following characteristics: the fluid is ejected radially from the disks by the centrifugal force and loops back towards the axis in the mid-plane between the impellers. A strong differential rotation is superimposed on this poloidal flow, which generates a high shear in the mid-plane. We approximate the experimental configuration with impellers of radius R (*i.e.* extending up to the inner cylinder boundary). We use cylindrical coordinates (s, ϕ, z) . In this cylindrical domain $([0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-1, 1])$, the flow is well described by the following analytical expression:

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_\phi) + s\omega \mathbf{e}_\phi, \quad (1a)$$

with angular velocity ω and recirculation ψ , respectively, given by

$$\omega = 4\varepsilon (1-s) \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right), \quad (1b)$$

$$\psi = \frac{s}{2}(1-s)^2(1+2s) \sin(\pi z). \quad (1c)$$

This flow has been shown to generate a similar kinematic dynamo as the one computed using the experimentally measured mean flow [9]. In the above expression, ε is a parameter controlling the ratio between the poloidal and toroidal components of the flow. We take $\varepsilon = 0.7259$ as in previous numerical studies using this flow, in order to minimize the critical magnetic Reynolds number for dynamo threshold [9,10].

Although we are aware that the experimentally observed dynamo cannot be captured with a kinematic calculation using the mean flow alone, we use this simple model here in order to study the effect of the magnetic boundary

conditions on the dynamo threshold. We hope that the qualitative behaviors will be unchanged with other dynamo modes in the presence of a turbulent flow.

We perform direct numerical simulations of kinematic dynamos, solving the induction equation governing the evolution of the solenoidal magnetic field $\mathbf{B}$,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = Rm \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B}, \quad (2)$$

written in dimensionless form, using the diffusive timescale. The magnetic Reynolds number Rm is defined as $Rm = \mu_0 \sigma R U_{max}$, where R is the cylindrical radius of the domain of the flow defined by (1a-c) and U_{max} is the peak velocity of the flow.

Equation (2) with the flow given by (1a-c) is solved using a finite volume code adapted from [11]. To circumvent the severe CFL restriction induced by cylindrical coordinates, we ensure numerical stability near the axis using a low pass Fourier filter in the ϕ -direction. Also a centered second-order scheme has been preferred to an up-wind scheme to discretize the inductive term, as resistive effects are here important enough to regularise the solution. As in [11], we ensure that $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ is exactly satisfied using a constraint transport algorithm. The finite-volume solver is fully three-dimensional. We have not used the decoupling of Fourier modes in the ϕ -direction. The initial magnetic field obviously needs to satisfy the divergence-free constraint as well as the boundary conditions. In practice, an arbitrary divergent free field is initialized away from all boundaries.

We investigate several types of magnetic boundary conditions. The classical approach is to use insulating boundaries, matching the internal magnetic field to the vacuum magnetic potential. The continuity of the magnetic field results in a non-local set of boundary conditions, which can be expressed via a “Neumann to Dirichlet” operator. We rely here on such an approach, using the boundary element formalism, as introduced in [12].

We investigate the effects introduced by using ferromagnetic boundaries. This boundary condition can be expressed in a local form in the limit of infinite permeability. Jump conditions at a boundary between media of different magnetic permeability are well established

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_1, \quad (3)$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{n}|_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{B} \times \mathbf{n}|_1, \quad (4)$$

where subscripts 1 and 2 denote the two different regions and $\mathbf{n}$ is normal to the boundary. Ferromagnetic disks yield $\mu \gg \mu_0$, one can therefore reasonably approximate these jump relations, by using boundary conditions on the fluid side of the form

$$\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

This set of boundary conditions trivially implies that normal currents vanish.

We will consider the effect of iron disks in two different ways. The first, and probably simpler, approach is to assume that the field is normal to the disks, namely

$$\mathbf{B} \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}, \quad (6)$$

on the top and bottom of the cylinder. This boundary condition is well known in magnetohydrodynamics, in particular in the astrophysical community, and is sufficient to close the system of equations we investigate. Another, and more subtle approach, allows to take into account the effect of the blades on the disks. Assuming that the field becomes normal to radial blades as it approaches the end of the cylinder yields

$$\mathbf{B} \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{0}. \quad (7)$$

This is an extremely simplified approach which does not take into account each individual blade, but accounts for their average effect on the large-scale field. This set of boundary conditions is far less common, and deserves some care to ensure it provides the required constraints on the field. The solenoidal nature of the magnetic field ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), together with the fact that B_s is identically zero on the boundary, then imply

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = -s \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (8)$$

This yields the solvability condition

$$\oint_0^{2\pi} \frac{\partial B_z}{\partial z} d\phi = 0. \quad (9)$$

As the flow we consider here is axisymmetric, modes in the ϕ -direction decouple, and we know from Cowling's theorem that the magnetic eigenmode cannot be axisymmetric. The solvability condition is therefore obviously satisfied (this would not be the case for a non-linear simulation).

For non-axisymmetric modes, one can write

$$\oint_0^{2\pi} B_\phi d\phi = 0, \quad (10)$$

which together with (8) determines the B_ϕ field completely. The numerical implementation is twofold, we first compute

$$B'_\phi(\phi) = -s \oint_0^\phi \frac{\partial B_z}{\partial z} d\phi, \quad (11)$$

up to an arbitrary constant. Then we correct this function setting by the constant to meet (10).

This implementation is mathematically consistent and maintains the divergence-free property of the magnetic field. We shall, however, stress again that this very idealized condition can only be used here because the modes decouple in the azimuthal direction and the axisymmetric mode cannot be unstable.

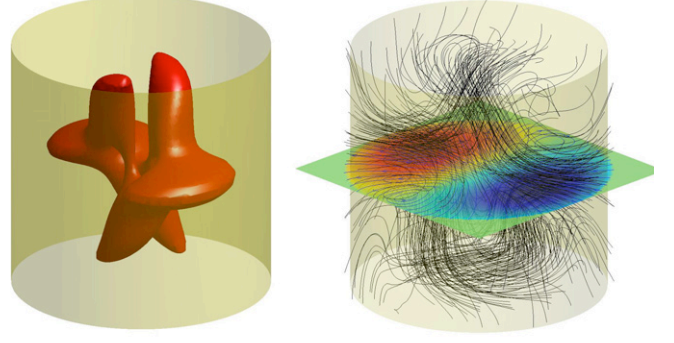


Fig. 2: The magnetic eigenmode obtained with potential boundary conditions. The rotation axis is vertical. An isosurface of the magnetic energy (25% of the maximum value) is represented on the left. Magnetic-field lines are plotted on the right.

The convergence of the numerical implementation has been carefully validated comparing simulations at different resolutions. We report results obtained with a resolution of $200 \times 200 \times 256$ points. When an additional domain of sodium at rest is included, we use the same resolution in the inner flow domain defined by (1a-c), which leads for the full domain to 240 points in the radial direction and 250 points in the z -direction to maintain a uniform accuracy.

As in previous studies, all simulations yield magnetic eigenmodes with an $m=1$ azimuthal symmetry. The structure of this eigenmode essentially corresponds to an equatorial dipole. This mode is represented in fig. 2.

Previous numerical studies [13,14] compared the threshold values in configurations including and excluding the effect of fluid behind the disks. We reproduce here a similar behaviour of the threshold: using insulating boundary conditions directly on the disks yields a threshold value $Rm_c = 63$. This last value is in good agreement with [14]. Adding a layer of thickness 0.25 of fluid at rest between each disk and insulating boundaries increases the dynamo onset up to $Rm_c = 72$. This is illustrated in fig. 3. Simulations, not discussed here, show that if the sodium behind the disks is not at rest, the threshold is even further increased.

When we consider the case of ferromagnetic disks, the threshold for dynamo action is $Rm_c = 60.5$ for a magnetic field normal to the disks and $Rm_c = 58$ for a magnetic field in the ϕ -direction. These two thresholds are very close and lower than in the case of a potential field (see also fig. 3). We thus observe that the high-permeability boundary condition on the disks appears to do more than just screening the inhibition of electromagnetic induction due to the flow behind the disks.

Implementation of a cylindrical layer of sodium at rest on the side can easily be included in the simulations. Since all electrical quantities are continuous, and in particular there is no jump in the conductivity, this does not involve any extra boundary condition. In some sense, the model assumes a continuous fluid whose velocity field goes to

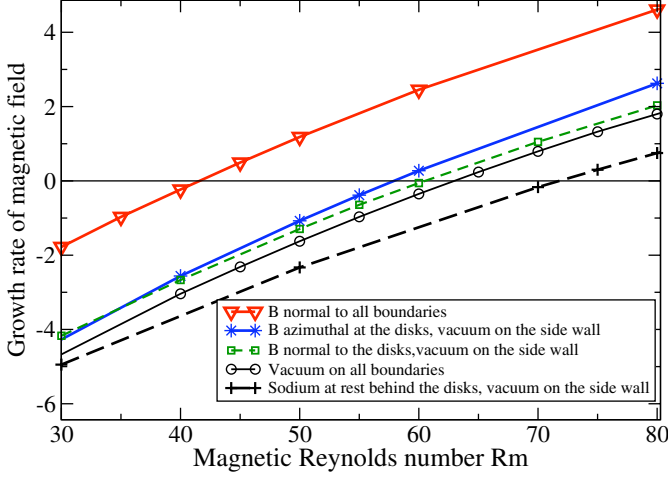


Fig. 3: Growth rate of the magnetic field as a function of Rm for different types of boundary conditions. We can see that replacing sodium at rest behind the disks by vacuum leads to a reduction of the dynamo threshold. Moreover, ferromagnetic conditions lead to additional reduction of threshold (about 10% for azimuthal conditions). Note that using high-magnetic-permeability boundary conditions on the disks but also on the side yields the best configuration, with an onset at $Rm_c = 41.5$.

Table 1: Dynamo thresholds for different types of boundary conditions on the disks and on the sides of the cylinder. B_n and B_ϕ denote ferromagnetic boundaries (respectively, normal to the disks and normal to the blades), $-\nabla\Phi$ denotes the vacuum condition and Na indicates the presence of a layer of sodium at rest between the flow and the boundary. For the disks, cases Na & B_ϕ , Na & B_n or Na & $-\nabla\Phi$ correspond to the presence of a layer of sodium at rest, outside which the relevant boundary condition is applied. The sodium lies behind the disks, and the boundary conditions are implemented on the lids.

	Side			
Disks	Na & B_n	B_n	Na & $-\nabla\Phi$	$-\nabla\Phi$
B_ϕ	39	41	45	58
B_n	40	41.5	45.5	60.5
$-\nabla\Phi$	44	43.5	48.5	63
Na & B_ϕ	46	47	53	71
Na & B_n	47	47.5	53.8	71.5
Na & $-\nabla\Phi$	47.5	48	54.7	72

zero outside a given domain. Table 1 reports critical parameters calculated for different combinations of boundary conditions on the side and on the disks. The sodium at rest leads to an important reduction of dynamo thresholds when it is added on the side. It is known [10,13,14] that this effect increases with the width of the layer, but saturates relatively rapidly. In all the simulations presented, the width of the layer of sodium at rest on the side is set to 0.4 in order to study a configuration close to the VKS experiment. This positive impact on the onset appears to be independent of the boundary conditions on the disk.

Finally, observing the strong effect produced by ferromagnetic disks, it is tempting to investigate the effect of

high-permeability material for the entire vessel. We thus perform simulations for which the magnetic field is normal to all boundaries (see fig. 3). This configuration appears to be the most efficient and it leads to a critical magnetic Reynolds number $Rm_c = 41.5$. It is clear from table 1 that in the presence of sodium at rest, ferromagnetic boundaries still yield a strong reduction of the onset, despite the fact that the boundary is now remote from the flow domain. No significant modification of the global magnetic structure can be observed in our simulations when we compare ferromagnetic and vacuum boundary conditions. The magnetic eigenmodes in the bulk are similar with both sets of boundary conditions.

The effect of the electrical conductivity of the boundaries on the dynamo threshold has been studied since a long time [15]. It has been shown that the addition of a layer of electrically conducting fluid at rest around the flow can either decrease or increase the threshold [16]. This has also been observed in the case of von Kármán flows, depending on the location of the layer at rest [13,14]. Thus, general rules for the dependence of the dynamo threshold on the electrical conductivity of the boundary do not seem to exist. Such may not be the case with the magnetic permeability of the bounding domain. Previous studies on the Ponomarenko dynamo with high-magnetic-permeability boundaries have displayed a decrease of the threshold [17,18]. A similar improvement has been observed in the case of convectively driven dynamos [19]. In the present study, we find that boundaries with a high magnetic permeability always decrease the dynamo threshold whatever their location.

Two important aspects of the VKS experiment are not taken into account in the present study. First, the magnetization of iron can lead to an additional amplifying factor of the dynamo as discussed in [7]. However, the coercitive field of pure iron being much smaller than the fields generated by the dynamo, the iron disks do not impose any permanent magnetization. Reversals of the generated magnetic field are indeed observed [20]. Second, the geometry of the magnetic field generated in the VKS experiment differs from the one computed from the axisymmetric mean flow. Non-axisymmetric velocity fluctuations generate a poloidal field with a dominant axial dipole, together with a strong azimuthal component. Thus the poloidal field is roughly normal to the disks, whereas the toroidal field is normal to the blades. It would therefore be of interest to check whether the dynamo threshold can be reached by using only ferromagnetic disks or blades. These two cases would correspond respectively to our boundary conditions (6) and (7).

Another interesting set of modifications suggested by this numerical study, would be to replace the copper side wall by a ferromagnetic one in the VKS experiment. If the experimentally realised dynamo mode behaves similarly to the simulations, we expect the threshold to be even lower in such configuration than that associated with only ferromagnetic disks and blades.

REFERENCES

- [1] See, for instance, MOFFATT H. K., *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge) 1978; DORMY E. and SOWARD A. M., *Mathematical Aspects of Natural Dynamos* (CRC-press, Boca Raton) 2007.
- [2] STIEGLITZ R. and MÜLLER U., *Phys. Fluids*, **13** (2001) 561.
- [3] GAILITIS A. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001) 3024.
- [4] ROBERTS G. O., *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **271** (1972) 411; PONOMARENKO YU. B., *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **14** (1973) 775.
- [5] MONCHAUX R. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007) 044502.
- [6] MARIÉ L. *et al.*, *Eur. Phys. J. B*, **33** (2003) 469.
- [7] PÉTRÉLIS F., MORDANT N. and FAUVE S., *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **101** (2007) 289.
- [8] BOURGOIN M. *et al.*, *Phys. Fluids*, **16** (2004) 2529.
- [9] MARIÉ L., NORMAND C. and DAVIAUD F., *Phys. Fluids*, **18** (2006) 017102.
- [10] RAVELET F. *et al.*, *Phys. Fluids*, **17** (2005) 117104.
- [11] TEYSSIER R., FROMANG S. and DORMY E., *J. Comput. Phys.*, **218** (2006) 44.
- [12] ISKAKOV A., DESCOMBES S. and DORMY E., *J. Comput. Phys.*, **197** (2004) 540; ISKAKOV A. and DORMY E., *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **99** (2005) 481.
- [13] STEFANI F. *et al.*, *Eur. J. Mech. B*, **25** (2006) 894.
- [14] LAGUERRE R. *et al.*, *CRAS Méc.*, **334** (2006) p. 593-598.
- [15] BULLARD E. C. and GUBBINS D., *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **8** (1977) 43.
- [16] KAISER R. and TILGNER A., *Phys. Rev. E*, **60** (1999) 2949.
- [17] MARTY P., AJAKH A. and THESS A., *Magnetohydrodynamics*, **30** (1995) 474.
- [18] AVALOS-ZUNIGA R., PLUNIAN F. and GAILITIS A., *Phys. Rev. E*, **68** (2003) 066307.
- [19] MORIN V., PhD Thesis, University Paris VII (2005), Appendix C.
- [20] BERHANU M. *et al.*, *EPL*, **77** (2007) 59001.

Bypassing Cowling's Theorem in Axisymmetric Fluid Dynamos

Christophe Gissinger,¹ Emmanuel Dormy,² and Stephan Fauve¹

¹*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, CNRS UMR 8550,
24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

²*MAG (IPGP/ENS), CNRS UMR 7154, LRA, Ecole Normale Supérieure, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*
(Received 9 May 2008; published 1 October 2008)

We present a numerical study of the magnetic field generated by an axisymmetrically forced flow in a spherical domain. We show that, even in the absence of nonaxisymmetric velocity fluctuations, a mean magnetic field with a dominant axisymmetric dipolar component can be generated via a secondary bifurcation from an equatorial dipole. We understand the dynamical behaviors that result from the interaction of equatorial and axial dipolar modes using simple model equations for their amplitudes derived from symmetry arguments.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.144502

PACS numbers: 47.65.-d, 52.65.Kj, 91.25.Cw

It is strongly believed that magnetic fields of planets and stars are generated by dynamo action, i.e., self-generation of a magnetic field by the flow of an electrically conducting fluid [1]. Planets and stars being rapidly rotating, axisymmetric flows about the axis of rotation have been considered in order to work out simple dynamo models [2]. A major setback of the subject followed the discovery of Cowling's theorem, which stated that a purely axisymmetric magnetic field cannot be maintained by dynamo action [3]. However, it has been shown that magnetic fields with a dominant axisymmetric mean part can be generated when nonaxisymmetric helical fluctuations are superimposed to a mean axisymmetric flow [4]. This has been recently observed: a turbulent swirling von Kármán flow (VKS) driven by two counterrotating coaxial impellers in a cylindrical container, self-generated a magnetic field with a dipole mean component along the axis of rotation [5]. This has been ascribed to an alpha effect due to the helical nature of the radially ejected flow along the two impellers [6].

In this Letter, we show that there exists another mechanism for bypassing the constraint imposed by Cowling's theorem, without the help of nonaxisymmetric turbulent fluctuations. The mechanism is as follows: the primary dynamo bifurcation breaks axisymmetry in agreement with Cowling's theorem. Then, the Lorentz force generates a nonaxisymmetric flow component which can drive an axisymmetric magnetic field through a secondary bifurcation. We show that direct numerical simulations confirm this scenario and that the two successive bifurcation thresholds can be very close in some flow configurations. The existence of two competing instability modes, the axial and equatorial dipoles, can lead to complex dynamical behaviors. Using symmetry arguments, we write equations for the amplitude of these modes that are coupled through the nonaxisymmetric velocity component. We show that the observed bifurcation structure and the resulting dynamics can be understood in the framework of this simple model.

We first numerically integrate the MHD equations in a spherical geometry for the solenoidal velocity $\mathbf{v}$ and mag-

netic $\mathbf{B}$ fields,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (2)$$

In the above equations, ρ is the density, ν is the kinematic viscosity, μ_0 is the magnetic permeability, and σ is the electrical conductivity. The forcing is $\mathbf{f} = f_0 \mathbf{F}$, where $F_\phi = s^2 \sin(\pi s b)$, $F_z = \varepsilon \sin(\pi s c)$, for $z > 0$, using polar coordinates (s, ϕ, z) (normalized by the radius of the sphere a) and opposite for $z < 0$. F_ϕ generates counter-rotating flows in each hemisphere, while F_z enforces a strong poloidal circulation. The forcing is only applied in the region $0.25a < |z| < 0.65a$, $s < s_0$. In the simulations presented here, $s_0 = 0.4$, $b^{-1} = 2s_0$, and $c^{-1} = s_0$. This forcing has previously been introduced to model the mechanical forcing due to coaxial rotating impellers used in the Madison experiment [7]. Although performed in a spherical geometry, this experiment involves a mean flow with a similar topology to that of the VKS experiment. Such flows correspond to $s_2 + t_2$ flows in the Dudley and James classification [2], i.e., two poloidal eddies with inward flow in the midplane, together with two counter-rotating toroidal eddies. We solve the above system of equations using the PARODY numerical code [8], originally developed in the context of the geodynamo (spherical shell). We have modified the code to make it suitable for a full sphere. The maximum resolution used here is 500 points in the radial direction, and a spherical harmonic decomposition truncated at $l, m < 64$. We use the same dimensionless numbers as in [7], the magnetic Reynolds number $\text{Rm} = \mu_0 \sigma a \max(|\mathbf{v}|)$, and the magnetic Prandtl number $\text{Pm} = \nu \mu_0 \sigma$. The kinetic Reynolds number is then $\text{Re} = \text{Rm}/\text{Pm}$.

The dynamo threshold Rm_c is displayed as a function of Re in Fig. 1(a). Negative Re corresponds to a flow that is reversed compared to the VKS configuration, i.e., directed

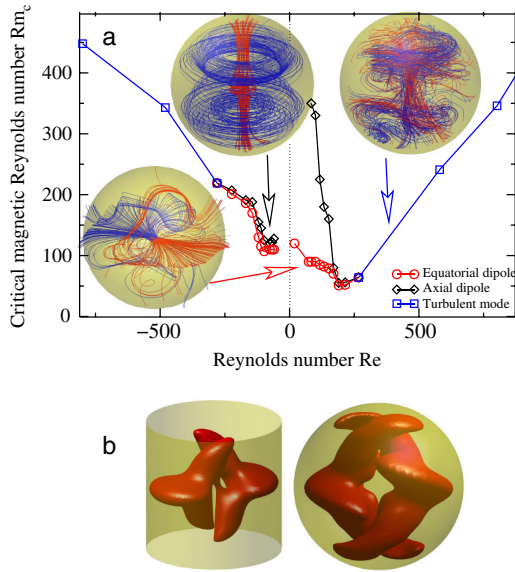


FIG. 1 (color online). (a) Stability curves $Rm_c = f(Re)$ obtained with direct numerical simulations. In red (or gray): onset of the $m = 1$ (equatorial dipole) dynamo mode; in black: nonlinear threshold of the $m = 0$ (axisymmetric) mode; in blue (or dark gray), the turbulent mode emerging from velocity fluctuations. The corresponding magnetic structures are represented using magnetic field lines. The top right inset, involving a very fluctuating magnetic field, has here been averaged over two magnetic diffusion time. (b) Comparison of the magnetic field (isovalue of the magnetic energy) generated by an axisymmetric $s_2 + r_2$ flow in a cylinder [11] or a sphere.

from the impellers to the center of the flow volume along the axis and radially outward in the midplane. This corresponds to reversing the sign of the component F_z of the forcing term in the simulations. For small enough Re , the flow is laminar and axisymmetric. A magnetic field with a dominant equatorial dipole mode $m = 1$ is generated first [red (or gray) curve and left inset of Fig. 1(a)]. It breaks axisymmetry as expected from Cowling's theorem. This dynamo mode is similar to that obtained in cylindrical geometry, as illustrated in Fig. 1(b).

For $|Re|$ larger than about 300, the flow becomes turbulent and the equatorial dipole is then replaced by a dominant axisymmetric mode $m = 0$. Its threshold increases with $|Re|$ in the parameter range of the simulations [blue (or dark gray) curve and right inset of Fig. 1(a)]. These results are in agreement with [7]. It is remarkable that the axial dipole observed in the VKS experiment and ascribed to nonaxisymmetric fluctuations [6] can also be obtained in the present simulations even though the level of fluctuations is much smaller (the parameter range realized in the experiment being, by far, out of reach of present computer models).

In addition, an axisymmetric magnetic field can also be generated at very low Re through a secondary bifurcation from the equatorial dipole when Rm is increased [black

curves and top left inset of Fig. 1(a)]. The bifurcation diagram of Fig. 2 helps to understand the mechanism by which this axisymmetric magnetic field is generated. One can observe that the equatorial dipole first bifurcates supercritically for $Rm = 88$ when $Re = 122$. The backreaction of the Lorentz force is twofold. First, it inhibits the axisymmetric velocity field, which decreases [orange (or light gray) curve in Fig. 2]. Second, and more importantly, it drives a nonaxisymmetric $m = 2$ velocity mode [blue (or dark gray) curve in Fig. 2]. Once the intensity of this flow becomes strong enough, it yields a secondary bifurcation of the axisymmetric $m = 0$ field mode. This is achieved for $Rm = 205$ (black curve in Fig. 2). The amplitude of the equatorial dipole decreases immediately after this secondary bifurcation. We observe that the $m = 0$ mode vanishes at higher Rm and then grows again above $Rm = 425$. Although the amplitude of the equatorial and axial modes behave in a complex manner as Rm is increased, we observe that they are anticorrelated, thus showing that they inhibit each other through the nonlinear couplings.

For $Re < 0$, Fig. 1(a) shows that the primary and secondary bifurcations occur in a much narrower range of Rm . The equatorial dipole mode is then close to marginal stability when the axial one bifurcates, and their nonlinear interactions lead to complex time dependent dynamics close to threshold as displayed in Fig. 3. The equatorial mode [red (or gray) curve] is generated first and saturates, but it drives the axial mode (black curve) through the nonaxisymmetric part of the velocity field. The axial dipole then inhibits the equatorial one that decays almost to zero. As a result, the flow is no longer driven away from axisymmetry by the Lorentz force. The axial dipole thus decays and the process repeats roughly periodically. We observe that during one part of the cycle, the magnetic field is almost axisymmetric. It involves a strong azimuthal field together with a large vertical component near the axis of

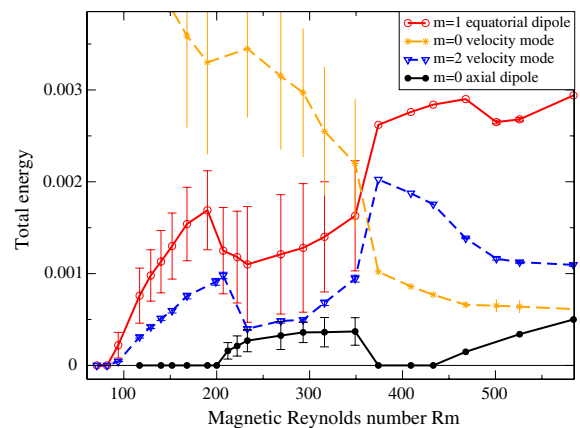


FIG. 2 (color online). Bifurcation diagram of magnetic modes varying Rm with fixed $Re = 122$. Error bars indicate the amplitude of oscillations. All other magnetic modes are very small compared to these.

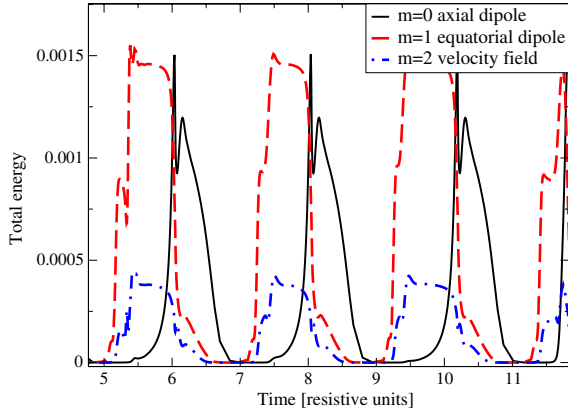


FIG. 3 (color online). Time recordings of the total energy of the equatorial and axial dipolar modes, and of the $m = 2$ velocity mode for $\text{Re} = -76$ and $\text{Rm} = 170$.

rotation, i.e., an axial dipole [see the left inset of Fig. 1(a)]. These relaxation oscillations, present only in the $\text{Re} < 0$ case, occur slightly above the threshold of the secondary bifurcation of the $m = 0$ mode. Their period first decreases when Rm is increased, but then increases showing a divergence when the relaxation oscillations bifurcate to a stationary regime, as displayed in Fig. 4. Above this transition, we observe bistability with the coexistence of two solutions: a nearly equatorial dipole, with a strong equatorial component and a weak axial one (labeled M_1 in Fig. 4) and a nearly axial dipole (labeled M_2).

We will show next that this competition between equatorial and axial modes, and the resulting dynamics, can be understood using a simple model for the amplitudes of the relevant modes. We thus write

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = A(t)\mathbf{D}_{\text{eq}}(\mathbf{r}) + \text{c.c.} + B(t)\mathbf{D}_{\text{ax}}(\mathbf{r}) + \dots, \quad (3)$$

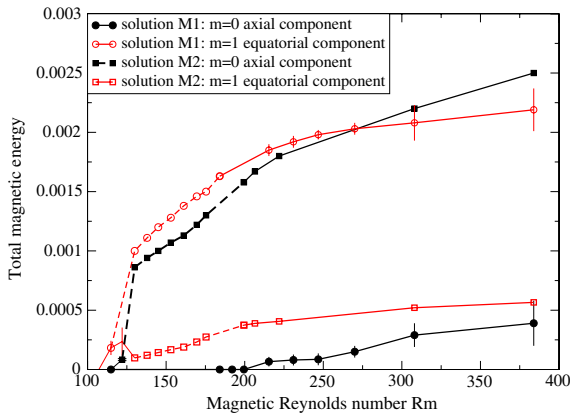


FIG. 4 (color online). Bifurcation diagram of magnetic modes varying Rm at fixed $\text{Re} = -76$. Error bars indicate the amplitude of oscillations. Dashed lines correspond to the maximum values of the modes in the relaxation regime. All other magnetic modes are very weak compared to these ones.

where $\mathbf{D}_{\text{eq}}(\mathbf{r})$ [respectively, $\mathbf{D}_{\text{ax}}(\mathbf{r})$] is the eigenmode related to the equatorial (respectively, axial) dipole. A is a complex amplitude, its phase describes the angle of the dipole in the equatorial plane and c.c. stands for the complex conjugate of the previous expression. B is a real amplitude. As said above, the equatorial dipole ($m = 1$) generates a nonaxisymmetric flow through the action of the Lorentz force. The latter depends quadratically on the magnetic field. This nonaxisymmetric velocity mode of complex amplitude $V(t)$ thus corresponds to $m = 2$. Using symmetry arguments, i.e., rotational invariance about the z axis which implies the invariance of the amplitude equations under $A \rightarrow A \exp i\chi$, $V \rightarrow V \exp 2i\chi$, and the $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ symmetry, we get up to the third order

$$\dot{A} = \mu A - V\bar{A} - \alpha_1 |A|^2 A - \alpha_2 |V|^2 A - \alpha_3 B^2 A, \quad (4)$$

$$\dot{V} = -\nu V + A^2 - \beta_1 |A|^2 V - \beta_2 |V|^2 V - \beta_3 B^2 V, \quad (5)$$

$$\dot{B} = -\lambda B - \gamma_1 |A|^2 B + \gamma_2 |V|^2 B - \gamma_3 B^3. \quad (6)$$

μ is proportional to the distance to the dynamo threshold. Clearly $\nu > 0$, since the flow is axisymmetric below threshold. The coefficients of the quadratic terms can be scaled by an appropriate choice of the amplitudes. The term A^2 represents the forcing of the nonaxisymmetric flow by the Lorentz force related to the equatorial dipole. $V\bar{A}$ means that rotational invariance for the equatorial dipole is broken as soon as a nonaxisymmetric flow is generated. We have fixed its sign so that the bifurcation of the equatorial dipole remains supercritical $\forall \alpha_1 \geq 0$. The equations for A and V (with $B = 0$) are the normal form of a 1:2 resonance [9] and have been studied in details in other contexts. In particular, it is known that this system can undergo a secondary bifurcation for which the phase of A begins to drift at constant velocity when μ reaches a value such that $|A|^2 = 2|V|^2$. This corresponds here to a dipole, rotating at constant rate in the equatorial plane. Consider now the equation for the amplitude B of the axial magnetic field. Taking $\lambda > 0$ and $\gamma_3 > 0$ ensures that it cannot be generated alone, in agreement with Cowling's theorem. The term $|V|^2 B$ describes the possible amplification of B from the nonaxisymmetric velocity field provided that $\gamma_2 > 0$. Although the system of amplitude Eqs. (4)–(6) cannot be derived asymptotically from (1) and (2), it reproduces the phenomenology observed with the direct simulations for both signs of Re : when μ is increased, we either obtain relaxation oscillations as for $\text{Re} < 0$ (parameters of Fig. 5) or a secondary bifurcation of the axial field as for $\text{Re} > 0$ (same parameters with $\gamma_2 = 1$). The relaxation oscillations are displayed in Fig. 5 (left). The model helps to understand the qualitative features observed in the direct simulation: for small values of μ , it involves a solution corresponding to an equatorial dipole ($A_0, V_0, B = 0$). When μ is increased, the equatorial dipole first undergoes a pitchfork bifurcation to a mixed mode $M = (A_1, V_1, B_1)$

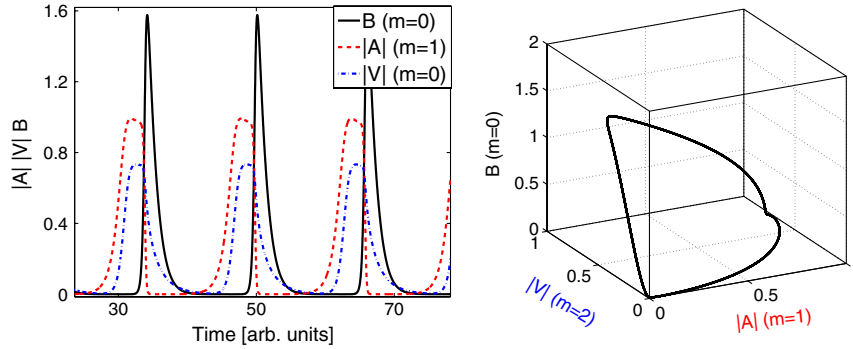


FIG. 5 (color online). Numerical integration of the amplitude equations (4)–(6). Left: time recordings of the amplitudes of the equatorial and axial magnetic modes interacting through the nonaxisymmetric velocity mode ($\mu = 1$, $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_3 = 4$, $\nu = 0.5$, $\beta_2 = 1.5$, $\lambda = 1$, $\gamma_2 = 10$, $\gamma_3 = 0.5$, all other coefficients being zero). Right: relaxation cycle in phase space.

involving a nonzero axial field. M then bifurcates to a limit cycle that displays a relaxation behavior, slowing down in the vicinity of M and O , as its amplitude increases (see Fig. 5).

Let us note that this relaxation behavior extends to a large domain of the parameter space, in particular, it is very robust to a modification of the linear coefficients μ , ν , λ . However the model does not describe the transition from the limit cycle to the bistable stationary solutions $M1$ and $M2$ observed at larger values of Rm in the full numerics (see Fig. 5).

In sodium flows driven by an axisymmetric forcing, such as the ones used in the VKS [5], Madison and Maryland experiments [10], one expects a possible competition between equatorial and axial dynamo modes. Indeed, the mean flow, if it were acting alone, would generate an equatorial dipole in agreement with Cowling's theorem. Our direct simulations show that a fairly small amount of nonaxisymmetric fluctuations (compared to the experiments) is enough to drive an axial ($m = 0$) dipole as observed in the VKS experiment for the mean magnetic field. In addition, we show here that even without turbulent fluctuations, the nonaxisymmetric flow driven by the Lorentz force related to the equatorial dipole, can generate the axial one through a secondary bifurcation. The equatorial dipole can easily rotate in the equatorial plane, thus averaging to zero. The axial dipole then becomes the dominant part of the mean magnetic field.

It is striking that this mechanism that generates an axial dipole occurs much closer to the dynamo threshold when we go from the $Re > 0$ to the $Re < 0$ flow configuration, thus when the product of the helicity times the differential rotation is changed to its opposite value. For $Re < 0$, the shear layer in the midplane becomes favorable to an α - ω dynamo as soon as the axisymmetry of the flow is broken. For $Re > 0$, the flow near the impellers can play a similar role but the effect is weaker. This opens interesting perspectives for flows that can be used for future dynamo experiments: an α - ω effect driven by the strong vortices

present in the shear layer close to the midplane can be favored by the $Re < 0$ configuration. To wit, one can use either the optimized setup described in [6] or propellers with the appropriate pitch in the VKS or Madison experiments.

A competition between the equatorial and axial dipolar modes could also account for secular variations of Earth's magnetic field. It would be interesting to check whether some features can be described with a low dimensional model similar to the one used in this study.

Computations were performed at CEMAG and IDRIS.

- [1] H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978); *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, edited by E. Dormy and A. M. Soward (CRC Press, Boca Raton, 2007).
- [2] M. L. Dudley and R. W. James, *Proc. R. Soc. A* **425**, 407 (1989), and references therein.
- [3] T. G. Cowling, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **94**, 39 (1934).
- [4] E. N. Parker, *Astrophys. J.* **122**, 293 (1955); S. I. Braginsky, *Sov. Phys. JETP* **20**, 726 (1964); *Sov. Phys. JETP* **20**, 1462 (1965); F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Pergamon Press, New York, 1980).
- [5] R. Monchaux *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 044502 (2007); M. Berhanu *et al.*, *Europhys. Lett.* **77**, 59001 (2007).
- [6] F. Pétrélis, N. Mordant, and S. Fauve, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **101**, 289 (2007).
- [7] R. A. Bayliss *et al.*, *Phys. Rev. E* **75**, 026303 (2007).
- [8] E. Dormy, P. Cardin, and D. Jault, *Earth Planet. Sci. Lett.* **160**, 15 (1998) and later collaborative developments.
- [9] G. Dangelmayr, *Dyn. Stab. Syst.* **1**, 159 (1986); D. Arbustier, J. Guckenheimer, and P. Holmes, *Physica (Amsterdam)* **29D**, 257 (1988); M. R. E. Proctor and C. Jones, *J. Fluid Mech.* **188**, 301 (1988).
- [10] N. L. Peffley, A. B. Cawthorne, and D. P. Lathrop, *Phys. Rev. E* **61**, 5287 (2000); M. D. Nornberg, E. J. Spence *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 044503 (2006).
- [11] C. Gissinger *et al.*, *Europhys. Lett.* **82**, 29001 (2008).

A numerical model of the VKS experiment

C. J. P. GISSINGER^(a)

*Laboratoire de Physique Statistique and Laboratoire de Radioastronomie, École Normale Supérieure CNRS
24 rue Lhomond, F-75005 Paris, France, EU*

received 11 June 2009; accepted 23 July 2009
published online 27 August 2009

PACS 91.25.Cw – Origins and models of the magnetic field; dynamo theories
PACS 47.65.-d – Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics

Abstract – We present numerical simulations of the magnetic field generated by the flow of liquid sodium driven by two counter-rotating impellers (VKS experiment). Using a kinematic code in cylindrical geometry, it is shown that different magnetic modes can be generated depending on the flow configuration. While the time-averaged axisymmetric mean flow generates an equatorial dipole, our simulations show that an axial field of either dipolar or quadrupolar symmetry can be generated by taking into account non-axisymmetric components of the flow. Moreover, we show that by breaking a symmetry of the flow, the magnetic field becomes oscillatory. This leads to reversals of the axial dipole polarity, involving a competition with the quadrupolar component.

Copyright © EPLA, 2009

Introduction. – The dynamo effect is a process by which a magnetic field is generated by the flow of an electrically conducting fluid. It is believed to be responsible for magnetic fields of planets, stars and galaxies [1]. Fluid dynamos have been observed in laboratory experiments in Karlsruhe [2] and Riga [3]. More recently, the VKS experiment displayed self-generation in a less constrained geometry, *i.e.*, a von Kármán swirling flow generated between two counter-rotating disks in a cylinder [4]. In contrast with Karlsruhe and Riga experiments, the observed magnetic field strongly differs from the one computed taking into account the mean flow alone. Previous simulations, using the mean flow (time averaged) of the VKS experiment or an analytical velocity field with the same geometry, predicted an equatorial dipole [5–8] in contradiction with the axial dipole observed in the experiment. Understanding the geometry of the magnetic field observed in the experiment is still an open problem. In addition, time-dependent regimes, including field reversals are observed when the impellers rotate at different frequencies [9]. No numerical study of this effect have been performed so far. We address these problems using a kinematic dynamo code in a cylindrical geometry. By considering time-dependent and non-axisymmetric fluctuations of the velocity field, we show that the system is able to generate a nearly axisymmetric dipolar field. Another result of this study is that when the analytic flow mimics two disks counter-rotating with different frequencies, the system

bifurcates to a regime of oscillations between dipole and quadrupole, illustrating a recent model proposed in [10] in order to explain reversals of the magnetic field in the VKS experiment or in the Earth. We will see that an $\alpha - \omega$ mechanism can explain the generation of the axial field and we understand the transition to oscillations as a saddle node bifurcation associated with the breaking of a symmetry in the flow.

Numerical model. – In the VKS experiment, a turbulent von Kármán flow of liquid sodium is generated by two counter-rotating impellers (with rotation frequencies F_1 and F_2). The impellers are made of iron disks of radius 154 mm, fitted with 8 iron blades of height 41.2 mm, and are placed 371 mm apart in an inner cylinder of radius 206 mm and length 524 mm. It is surrounded by sodium at rest in another concentric cylindrical vessel, 578 mm in inner diameter. The magnetic Reynolds numbers are defined as $R_{mi} = 2\pi\mu_0\sigma R^2 F_i$ where μ_0 is the magnetic permeability of vacuum. When the impellers are operated at equal and opposite rotation rates F , a statistically stationary magnetic field with either polarity is generated above $R_m \sim 30$ [4]. The mean field involves an azimuthal component and a poloidal one which is dominated by an axial dipole.

When the disks are counter-rotating at the same frequency, the structure of the mean flow (averaged in time) has the following characteristics: the fluid is ejected radially from the disks by centrifugal force and loops back towards the axis in the mid-plane between the

^(a)E-mail: christophe.gissinger@lps.ens.fr

impellers. A strong differential rotation is superimposed on this poloidal flow, which generates a high shear in the mid-plane. Because of the axisymmetry of this flow, we expect from Cowling's theorem that an axisymmetric magnetic field can not be generated. Simulations based on the mean flow indeed generate a non-axisymmetric equatorial dipole [5–7]. A better description of the VKS experiment clearly needs to involve the non-axisymmetric components of the flow. In this perspective, the geometry of the experimentally observed field has been understood with a simple model of an α - ω dynamo [11]. In the VKS experiment, the strong differential rotation is very efficient to convert poloidal into toroidal magnetic field, via an ω effect. In addition, the flow that is ejected by the centrifugal force close to each impeller is strongly helical due to the vortices created between the successive 8 blades. This non-axisymmetric helical flow drives an α effect which converts the toroidal field in a poloidal one. These two effects have been proposed as being responsible for the magnetic field generation, which thus results from an α - ω dynamo. In the present study, we consider an analytic test velocity $\mathbf{u}$ taking into account the time-dependent $m=8$ structure due to the blades as follows:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \nabla \times (\kappa \mathbf{G}), \quad (1)$$

where $\mathbf{U}$ mimics the mean flow. It is given in cylindrical coordinates (r, ϕ, z) by

$$U_r = -\frac{\pi}{2} r(1-r)^2(1+2r) \cos(\pi z), \quad (2)$$

$$U_\phi = \frac{8}{\pi} r(1-r) \arcsin(z), \quad (3)$$

$$U_z = (1-r)(1+r-5r^2) \sin(\pi z). \quad (4)$$

The vector potential $\mathbf{G}$ describes the non-axisymmetric fluctuations due to the blades of the disks. A simple way to represent these vortices is to take:

$$G_r = [1 + \cos(m\phi - \omega_1 t)] r \sin(\pi r) e^{-\zeta(z-1)^2} (z-1) \\ + [1 + \cos(m\phi + \omega_2 t)] r \sin(\pi r) e^{-\zeta(z+1)^2} (z+1), \quad (5)$$

$$G_\phi = -3r^2(1-r)^2(1+2r)z^2 \sin(\pi z) \cos(m\phi \pm \omega_i t). \quad (6)$$

In this expression, G_r is related to a flow in the (z, ϕ) plane and models the 8 vortices created by the blades of each disk. These vortices are rotating with the two disks at angular velocity ω_1 and ω_2 . The G_ϕ function represents the ϕ -modulation of the poloidal mean recirculation associated with these vortices. The z -dependence of G_r is parametrized by ζ and determines the extension of the perturbation close to the disks. The relative intensity of the mean flow and the non-axisymmetric perturbation is fixed by the value of κ . Note that the system presents an important symmetry: the flow is invariant by a rotation of an angle π around any axis in the equatorial plane. In the

following, we will denote this symmetry by R_π . In some simulations, we will describe the situation where one of the disks is spinning faster than the other one, thus breaking the R_π symmetry. As in the symmetric case, there are several ways to implement this situation in our analytical velocity, and we take the simplest one. Spinning one disk faster than the other one is simulated by adding a global rotation $\mathbf{W}$ with recirculation which breaks the R_π symmetry. In this case, $\mathbf{U}$ become $\mathbf{U} + C\mathbf{W}$, with $\mathbf{W}$ defined by

$$W_r = \frac{\pi}{4} r(1-r)^2(1+2r) \sin(\pi z/2), \quad (7)$$

$$W_\phi = 6r(1-r), \quad (8)$$

$$W_z = (1-r)(1+r-5r^2) \cos(\pi z/2). \quad (9)$$

This is the mean flow corresponding to the disk at $z=+1$ spinning alone. The parameter C thus controls the deviation from exact counter-rotation ($C=0$), and traces back to the difference between the two disk frequencies in the VKS experiment. In addition, it is reasonable to assume that the non-axisymmetric velocity component is also modified when $C \neq 0$. This is achieved by the simple transformation $\omega_1 = \omega_1(1+C)$ and $\kappa = \kappa(1+C)$ for $z > 0$.

Note that the expression for the velocity used here is arbitrary, and there are probably several ways to describe with more accuracy the von Karman flow. However, the purpose of this study is to show that the structure and the dynamics of the magnetic field in the VKS experiment can be easily reproduced by taking into account the main geometrical properties of the flow, *i.e.* the vortical structure near the disks and the breaking of the R_π symmetry when the disks counter-rotate at different frequencies.

We perform direct numerical simulations of the kinematic dynamo problem, solving the induction equation governing the evolution of the solenoidal magnetic field $\mathbf{B}$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{B}, \quad (10)$$

written in dimensionless form using the advective timescale. The magnetic Reynolds number Rm is defined as $Rm = \mu_0 \sigma R U_{max}$, where R is the radius of the impellers and U_{max} is the peak velocity of the mean flow. The radius of the cylinder is $L = 4R/3$ and the total height is $H = 2L$.

The above system with the flow given in (1) is solved using a finite-volume code adapted from [12]. A filtering of high-frequency modes in the ϕ -direction has been implemented to circumvent the severe restriction on the CFL number induced by cylindrical coordinates near the axis. Also a centered second order scheme has been preferred to an up-wind scheme as resistive effects are here important enough to regularise the solution. As in [12], we ensure that $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ is exactly satisfied using a constraint transport algorithm. The finite-volume solver is fully three dimensional. Two types of magnetic boundary conditions are used: insulating boundaries, using the boundary element formalism as introduced in [13], or

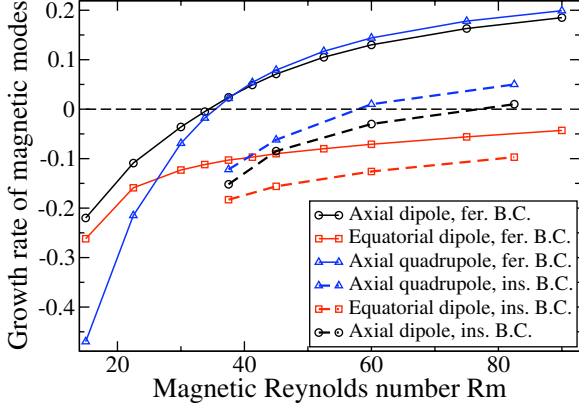


Fig. 1: (Colour on-line) Evolution of the growth rates of the magnetic modes when Rm is increased in exact counter-rotation. For ferromagnetic boundaries, we show the $m=0$ axial dipolar mode (circles). Triangles: $m=0$ quadrupolar field. Squares: equatorial dipole. Note the close values of the onset for dipole and quadrupole. Growth rates with insulating boundaries are also displayed (dashed lines), showing much larger onset values for all modes.

ferromagnetic boundaries, by forcing the magnetic field lines to be normal to the external wall, as used in [7]. In all cases we do not include sodium at rest around the vessel or behind the disks.

Structure of the magnetic field. — The convergence of the numerical implementation has been carefully validated comparing simulations at different resolutions. We report results obtained with a resolution of $150 \times 150 \times 128$. In the simulations presented here, we use $\zeta = 30$ and $\kappa = 1$. This corresponds to vortices of a typical size of $1/5$ of the total height of the cylinder, and with a velocity of the same order than the mean flow. These parameters are comparable to what is expected in the real experiment. Let us study first the situation corresponding to the counter-rotating case. Figure 1 shows the growth rate of different magnetic modes as a function of the magnetic Reynolds number. We see that the non-axisymmetric flow leads to the generation of an axisymmetric $m=0$ magnetic mode with a dipolar symmetry, which bifurcates for $Rm \approx 34$, using ferromagnetic boundary conditions. Because of the $m=8$ structure in the velocity field, this mode is in fact associated with a $m=8$ magnetic component, growing at the same rate. However, this small scale structure is time dependent and averages on a few advective times. In fig. 1, we see that the first unstable mode is an axial dipole similar to the mean field observed in the VKS experiment, and that the quadrupolar mode is also unstable for larger Rm . The other modes are not unstable in the range of Rm studied here. In particular, we see that the non-axisymmetric component of the flow strongly inhibits the $m=1$ equatorial dipole, which bifurcates around $Rm = 45$ for $\kappa = 0$, *i.e.* with the mean flow alone (see fig. 2, bottom). In general, the two first axial modes always display similar

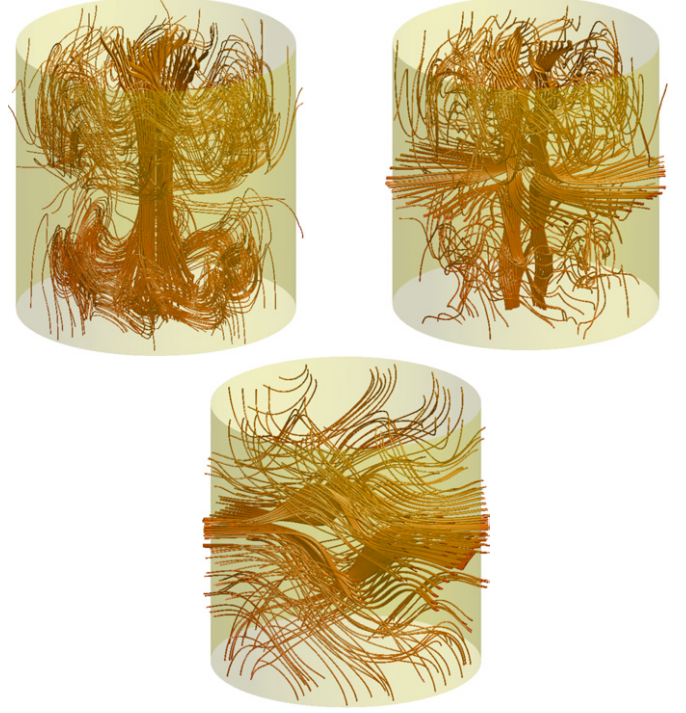


Fig. 2: (Colour on-line) Snapshot of the magnetic field lines of different modes obtained in the numerical simulations. Axial dipole (top, left), quadrupolar (top, right) and equatorial dipole (bottom). Observe that the axial modes always involve $m=8$ component.

threshold values, and depending on the parameters of the flow, the first unstable axisymmetric structure can be either a dipole or a quadrupole. In the VKS experiment, a quadrupolar field has never been observed for counter-rotation of the disks at the same frequency. The different magnetic structures are represented in fig. 2.

In fig. 3, we represent the radial profiles of the axisymmetric components of the dipole for $Rm = 36$, which are similar to the ones of the mean field observed in the VKS experiment [14]. These results confirm the mechanism proposed in [11], which states that the non-axisymmetric vortices near the disks could be responsible for the generation of the observed magnetic field. In a recent α -parametrized mean-field approach, a completely different result was found, for which the α term is said to be several times larger than any realistic value based on the VKS experiment [15]. Here, our study shows a critical Rm comparable to the experiment. In addition, the maximum intensity of the vortices compared to the mean flow, about a factor 1.5 here for $\kappa = 1$, is reasonable. Figure 1 also shows the effect of the magnetic boundary conditions on the dynamo threshold of the different modes. We see that using ferromagnetic boundary conditions is very efficient for decreasing the dynamo threshold. For insulating boundaries, the $m=0$ mode bifurcates for $Rm = 58$, whereas its threshold is $Rm = 34$ for ferromagnetic boundary conditions. Note that in the case of insulating

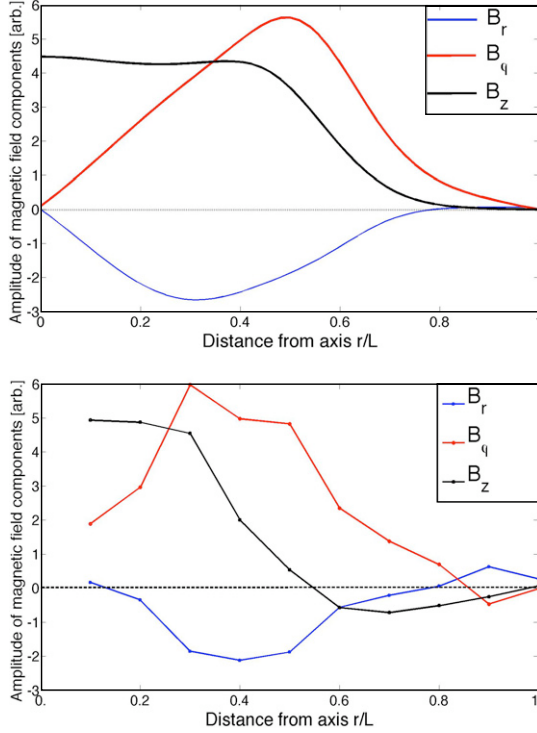


Fig. 3: (Colour on-line) Comparison of the numerical simulations (top) and experimental results (bottom). We show the radial profiles for the 3 components of the axial dipolar field measured near one of the disks, when the disks counter-rotate for $Rm = 36$. Fields have been ϕ -averaged (simulations) or time-averaged (experimental data, from [14]).

boundaries, the first unstable mode is a quadrupole, and the axial dipole bifurcates for $Rm = 76$. This confirms the role played by soft iron disks in the experiment: changing the geometry of the magnetic field lines near the external wall yields a strong reduction of the instability threshold. This was already observed with the mean flow alone [7] and could explain why dynamo action has only been observed in the VKS experiment when soft iron disks are used.

Dynamics of the magnetic field for different rotation rates. – In the VKS experiment, several dynamical behaviors occur when the rotation rates of the two disks are different: periodic oscillations, bursts and chaotic reversals of the magnetic field have been reported. When the velocity difference of the disks is increased from zero, the stationary dipolar field is first modified by the addition of a quadrupolar component before displaying a transition to a time-dependent regime [16].

When the disks counter-rotate at the same frequency, the flow is invariant under the R_π symmetry. Consequently, dipolar and quadrupolar modes, which transform differently under R_π , are linearly decoupled. We observe in fig. 1 that the dipole and quadrupole modes have slightly different growth rates at the dynamo onset, the neutral mode being a dipolar mode (see fig. 2, bottom). When one

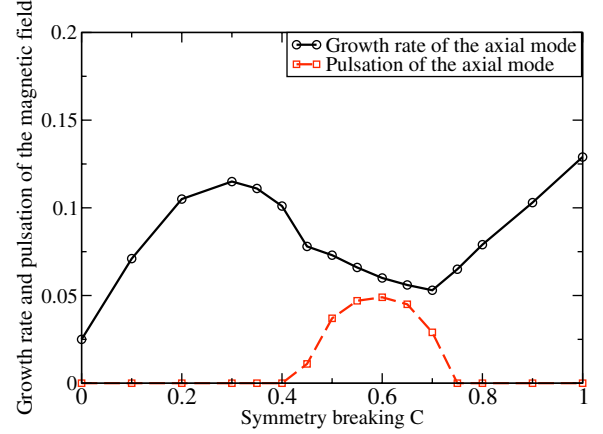


Fig. 4: (Colour on-line) Evolution of the growth rate and pulsation of the axial mode when the R_π symmetry is broken. For $C < 0.4$, the growing mode is a combination of a dipole and a quadrupole (growth rate, black circles). At $C = 0.4$ the system undergoes a bifurcation to oscillations (red squares). Note that, in this range, the oscillatory regime only occurs in a pocket of the parameter space, for $0.4 < C < 0.75$.

disk is spinning faster than the other one, the R_π symmetry of the flow is broken and dipolar and quadrupolar modes get coupled. Consequently, the growing unstable mode has to be a combination of a dipole and a quadrupole. The ratio between dipolar and quadrupolar components depends on the intensity of the breaking of the R_π symmetry.

Figure 4 shows the evolution of the growth rates of the modes when we increase the parameter C representing the departure from counter-rotation. We start from $Rm = 37$, and C is increased from zero to one. Because of the breaking of the R_π symmetry when $C \neq 0$, the growing mode is not a pure dipole anymore. Similarly, the initially quadrupolar mode displays some dipolar component. In this linear problem, only the most unstable mode is easily obtained from the simulations, since dipolar and quadrupolar families are mixed when the R_π symmetry is broken. We see that the growth rate of the axial mode is changed when C is increased. For $C = 0.4$, the system bifurcates to an oscillatory regime, when two different real eigenvalues transform into complex conjugate ones. These results have been recently understood in the framework of a simple model, based on a saddle node bifurcation [10]. If we denote by D the amplitude of the eigenmode with dipolar symmetry and by Q the quadrupolar one, a simple way to understand these linear results is to write the evolution of the modes near the threshold:

$$\dot{D} = \alpha(C)D + \beta(C)Q, \quad (11)$$

$$\dot{Q} = \gamma(C)D + \delta(C)Q. \quad (12)$$

where dots stand for time derivation. The eigenvalues λ_i of this system are given by $2\lambda_i = \alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}$. When the disks are spinning at the same rotation rate, β

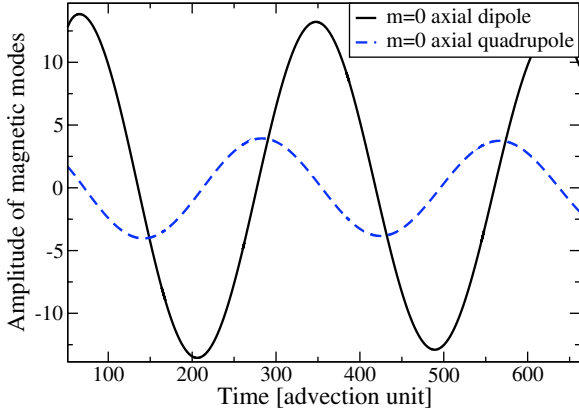


Fig. 5: (Colour on-line) Time evolution of the magnetic field during oscillations. The system is very close to criticality, for $Rm = 30$ and $C = 0.6$, such that the growth rate is very small. Note the transfer between the axial dipole (full line) and the quadrupole (dashed line).

and γ vanish and the dipole and the quadrupole are not linearly coupled, giving two real eigenvalues λ_1 and λ_2 . For $C \neq 0$, when $\beta\gamma$ is negative and sufficiently large, λ_1 and λ_2 become complex conjugate eigenvalues. The system thus bifurcates to an oscillatory regime, in agreement with the numerical simulations shown here. The pulsation of the oscillatory mode is represented in fig. 4. Note that the period of the oscillations diverges at threshold. An interesting feature is that these periodic reversals of the magnetic field only occur in a small range of the parameter space, for $0.4 < C < 0.75$. This shows that the relation between C and the parameters of the system are rather complex. This is also the case in the VKS experiment, where reversals, periodic oscillations and bursts appear only in small pockets in the parameter space.

Figure 5 displays a typical time evolution of the magnetic field during oscillations. Here, the system is investigated very close to criticality ($Rm = 30$ and $C = 1.6$), such that the exponential behavior is very weak. These oscillations involve a competition between an axial dipole and an axial quadrupole. We see in particular that the two components are in quadrature. This means that the magnetic field does change shape. The present study being linear, it can only illustrate the transition between stationary and oscillatory dynamos. In particular, the present simulations cannot reproduce the non-periodic reversals of the magnetic field observed in the VKS experiment [9]. This more realistic situation is reported in [17], where chaotic reversals of the magnetic field are observed in fully turbulent simulations.

Conclusion. – In this study, we have used a simple model of a von Karman flow to describe the structure and some of the dynamical behaviors of the magnetic field in the VKS experiment. In particular, we have shown that taking into account the non-axisymmetric fluctuations of the flow leads to the generation of a nearly axisymmetric

dipole. This confirms that the helical flow created by the vortices between the blades of each disk can be involved in the dynamo process, possibly via an $\alpha - \omega$ mechanism. This flow generates an axial dipole or quadrupole, and also inhibits the equatorial dipole. In addition, we have shown that the presence of ferromagnetic boundaries can strongly reduce the threshold of the dynamo instability. Another result of this study concerns the dynamics of the magnetic field. When the disks are spinning at different rates, the R_π symmetry of the flow is broken. Our simulations show that this can lead to an oscillatory regime between a dipole and a quadrupole, similar to the one observed in the VKS experiment. The agreement between the experimental results and these numerical simulations show that, despite the high level of turbulence and complexity of the flow, the generation of the magnetic field can be understood using a few spatial properties of the flow. Moreover, the mechanisms involved in the dynamics of the field can be accurately described with a low-dimensional model.

I thank B. GALLET, N. MORDANT, F. PETRELIS, E. DORMY and S. FAUVE for useful discussions. Computations were performed at CEMAG and CCRT centers.

REFERENCES

- [1] See, for instance, MOFFATT H. K., *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge) 1978; DORMY E. and SOWARD A. M. (Editors), *Mathematical Aspects of Natural Dynamos* (CRC Press) 2007.
- [2] STIEGLITZ R. and MÜLLER U., *Phys. Fluids*, **13** (2001) 561.
- [3] GAILITIS A. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001) 3024.
- [4] MONCHAUX R. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007) 044502.
- [5] MARIÉ L. *et al.*, *Eur. Phys. J. B*, **33** (2003) 469.
- [6] BOURGOIN M. *et al.*, *Phys. Fluids*, **16** (2004) 2529.
- [7] GISSINGER C. *et al.*, *EPL*, **82** (2008) 29001.
- [8] STEFANI F. *et al.*, *Eur. J. Mech. B*, **25** (2006) 894.
- [9] BERHANU M. *et al.*, *EPL*, **77** (2007) 59001.
- [10] PETRELIS F. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **102** (2009) 144503; PETRELIS F. and FAUVE S., *J. Phys.: Condens. Matter*, **20** (2008) 494203.
- [11] PÉTRÉLIS F., MORDANT N. and FAUVE S., *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **101** (2007) 289.
- [12] TEYSSIER R., FROMANG S. and DORMY E., *J. Comput. Phys.*, **218** (2006) 44.
- [13] ISKAKOV A., DESCOMBES S. and DORMY E., *J. Comput. Phys.*, **197** (2004) 540.
- [14] MONCHAUX R. *et al.*, *Phys. Fluids*, **21** (2009) 035108.
- [15] LAGUERRE R. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 104501; see also the erratum, LAGUERRE R. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2009) 219902(E).
- [16] RAVELET F. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 074502.
- [17] GISSINGER C., DORMY E. and FAUVE S., in preparation (2009).

Chaotic magnetic field reversals in turbulent dynamos

Christophe Gissinger,¹ Emmanuel Dormy,² and Stephan Fauve¹

¹*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure,
CNRS UMR 8550, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

²*MAG (IPGP/ENS), CNRS UMR 7154, LRA, Ecole Normale Supérieure,
24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

(Dated: April 21, 2009)

We present direct numerical simulations of reversals of the magnetic field generated by swirling flows in a spherical domain. In agreement with a recent model, we observe that coupling dipolar and quadrupolar magnetic modes by an asymmetric forcing of the flow generates field reversals. In addition, we show that this mechanism strongly depends on the value of the magnetic Prandtl number.

PACS numbers: 47.65.-d, 52.65.Kj, 91.25.Cw

The generation of magnetic field by the flow of an electrically conducting fluid, i.e., the dynamo effect, has been mostly studied to understand the magnetic fields of planets and stars [1]. The Earth and the Sun provide the best documented examples: they both involve a spatially coherent large scale component of magnetic field with well characterized dynamics. Earth's dipole is nearly stationary on time scales much larger than the ones related to the flow in the liquid core, but displays random reversals. Reversals also occur for the Sun but nearly periodically. The magnetic field changes polarity roughly every 11 years. Reversals have been displayed by direct simulations of the equations of magnetohydrodynamics (MHD) [2] or of mean field MHD [3] and have been modeled using low dimensional dynamical systems [4, 5]. It has been observed recently that the magnetic field generated by a von Karman flow of liquid sodium (VKS experiment) can display either periodic or random reversals [6] as well as several other dynamo regimes, all located in a small parameter range [7]. The ability of all these very different dynamos to reverse polarity is their most striking property. This is obviously related to the $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ symmetry of the MHD equations, implying that if a magnetic field $\mathbf{B}$ is a solution, $-\mathbf{B}$ is another solution. However, this does not explain how these two solutions can be connected as time evolves. The VKS experiment has provided an interesting observation. In this experiment, the flow is driven in a cylindrical container by two counter-rotating coaxial propellers. When they rotate at roughly the same frequency, a magnetic field with a dominant dipolar component aligned with the axis of rotation is generated. Time dependent magnetic field with periodic or random reversals are observed only when the difference between the two rotation frequencies is large enough [6]. We have shown that this can be related to broken $\mathcal{R}_\pi$ symmetry (the rotation of an angle π along any axis in the mid-plane is a symmetry when the propellers rotate at the same frequency) [12]. Magnetic modes changed to their opposite by $\mathcal{R}_\pi$ are dipolar ones, whereas quadrupolar ones are unchanged. Breaking the

$\mathcal{R}_\pi$ symmetry by rotating the two propellers at different frequencies generates additional coupling terms between dipolar and quadrupolar modes. If their dynamo threshold is close enough, a slightly broken symmetry is sufficient to lead to a saddle node bifurcation, which generates a limit cycle that connects opposite polarities. Slightly below this bifurcation threshold, $\pm\mathbf{B}$ stationary solutions are stable but a small amount of hydrodynamic fluctuations is enough to generate random reversals. Although the flow in the Earth's core strongly differs from the one of the VKS experiment, a similar type of interaction between two marginal dynamo modes can be considered and provides a simple explanation of several features of paleomagnetic records of Earth's reversals [13].

The purpose of this work is to strengthen this phenomenological scenario by displaying reversal of a magnetic dipole coupled with a quadrupolar mode in a direct numerical simulation of MHD equations. To wit, we consider a flow driven in a spherical geometry by volumic forces that mimic the motion of two co-axial propellers. We observe reversals of the generated magnetic field for a wide range of parameters when the propellers rotate at different speeds. We show that the value of the magnetic Prandtl number P_m strongly affects the magnetic modes involved in the dynamics of reversals. Reversals that involve a coupling between dipole and quadrupole modes occur for P_m small enough. Finally, we present a minimal model for the reversal dynamics.

The MHD equations are integrated in a spherical geometry for the solenoidal velocity $\mathbf{v}$ and magnetic $\mathbf{B}$ fields,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (2)$$

In the above equations, ρ is the density, μ_0 is the magnetic permeability and σ is the electrical conductivity

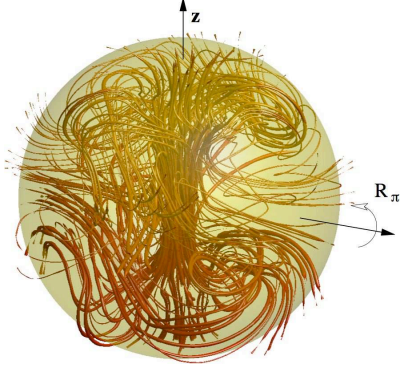


FIG. 1: Magnetic field lines obtained with a symmetric forcing ($C = 1$) for $R_m = 300$ and $P_m = 1$. Note that the field involves a dipolar component with its axis aligned with the axis z of rotation of the propellers.

of the fluid. The forcing is $\mathbf{f} = f_0 \mathbf{F}$, where $F_\phi = s^2 \sin(\pi s b)$, $F_z = \varepsilon \sin(\pi s c)$, for $z > 0$, and opposite for $z < 0$. We use polar coordinates (s, ϕ, z) , normalized by the radius of the sphere a . F_ϕ generates counter-rotating flows in each hemisphere, while F_z enforces a strong poloidal circulation. The forcing is only applied in the region $0.25a < |z| < 0.65a$, $s < s_0$. In the simulations presented here, $s_0 = 0.4$, $b^{-1} = 2s_0$ and $c^{-1} = s_0$. This forcing has been used to model the Madison experiment [8]. It is invariant by the $\mathcal{R}_\pi$ symmetry. In order to break it, we consider in the present study a forcing of the form $C\mathbf{f}$, where $C = 1$ for $z < 0$ but can be different from one for $z > 0$. This describes two propellers that counter-rotate at different frequencies. Although performed in a spherical geometry, this simulation involves a mean flow with a similar topology to that of the VKS experiment. We solve the above system of equations using the Parody numerical code [10]. This code was originally developed in the context of the geodynamo (spherical shell) and we have modified it to make it suitable for a full sphere. We use the same dimensionless numbers as in [9], the magnetic Reynolds number $R_m = \mu_0 \sigma a \max(|\mathbf{v}|)$, and the magnetic Prandtl number $P_m = \nu \mu_0 \sigma$. The kinetic Reynolds number is then $Re = R_m / P_m$.

In a previous study with symmetric forcing ($C = 1$), we showed that different magnetic modes can be generated depending on P_m [9]. For large enough P_m , the dynamo onset corresponds to small Re and the flow is axisymmetric and generates first an equatorial dipole. In contrast, for P_m small, the dynamo onset occurs when Re is already large and the flow involves non axisymmetric fluctuations. A magnetic field with a dominant axial dipole is observed (see figure 1). In the present study, all the simulations are made for $Re > 300$, so that an axial dipole is obtained for symmetric forcing.

We next break the symmetry $\mathcal{R}_\pi$ of the forcing to check whether time dependent magnetic fields involving reversals between both polarities are obtained as in

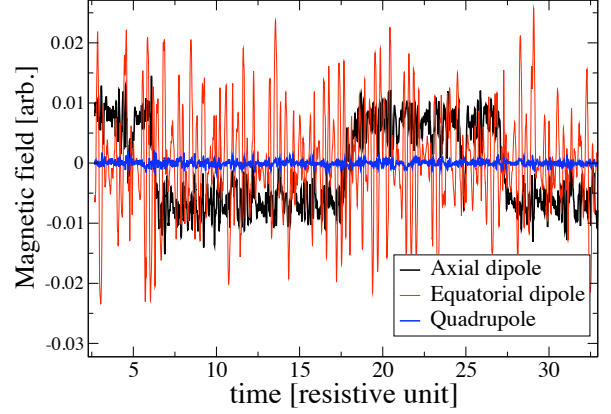


FIG. 2: Time recording of the axial dipolar magnetic mode (in black), the axial quadrupolar mode (in blue) and the equatorial dipole (in red) for $R_m = 300$, $P_m = 1$ and $C = 2$.

the VKS experiment. Time recordings of some components of the magnetic field are displayed in figure 2 for $R_m = 300$, $P_m = 1$ and $C = 2$, which means that one of the propellers is spinning twice as fast as the other one. We observe that the axial dipolar component (in black) randomly reverses sign. The phases with given polarity are an order of magnitude longer than the duration of a reversal that corresponds to an Ohmic diffusion time. The magnetic field strongly fluctuates during these phases because of hydrodynamic fluctuations. It also displays excursions or aborted reversals, i.e., the dipolar component almost vanishes or even slightly changes sign but then grows again with its direction unchanged. All these features are observed in paleomagnetic records of Earth's magnetic field [11] and also in the VKS experiment [6]. However, these simulations also display strong differences with the VKS experiment. The equatorial dipole is the mode with the largest fluctuations whereas the axial quadrupolar components is an order of magnitude smaller than the equatorial modes. In addition, it does not seem to be coupled to the axial dipolar component.

Magnetic Prandtl numbers relevant to liquid metals are much smaller than unity ($\sim 10^{-5}$ – 10^{-6}). While realistic values cannot be achieved owing to computational limitations, P_m can be decreased to values less than unity. We now turn to simulations using $P_m = 0.5$, thus introducing a distinction between the viscous and ohmic timescale. The time evolution of the magnetic modes for $R_m = 165$ and $C = 1.5$ is represented on figure 3 (left). It differs significantly from the previous case ($P_m = 1$). First of all, the quadrupole is now a significant part of the field, and reverses together with the axial dipole. The equatorial dipole remains comparatively very weak and unessential to the dynamics. The high amount of fluc-

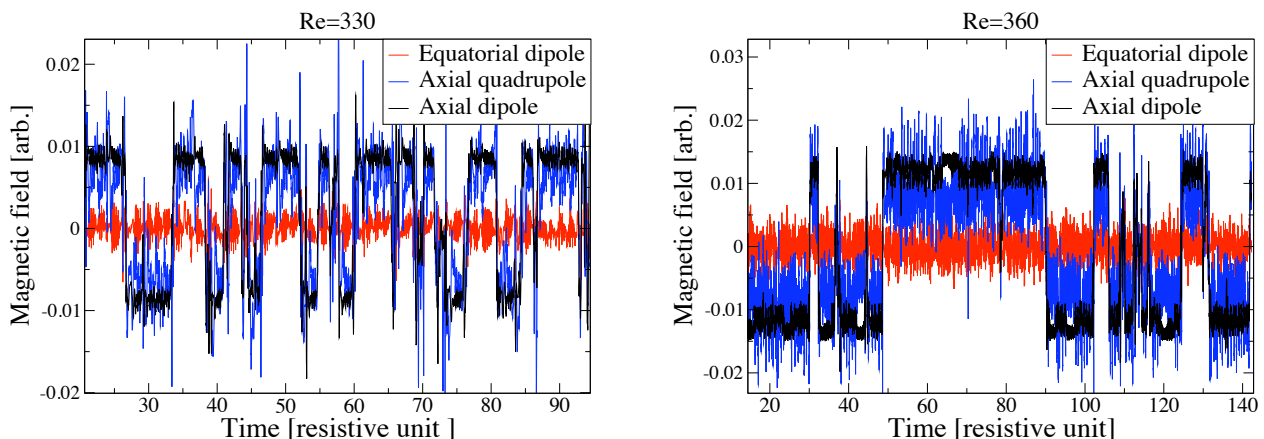


FIG. 3: Time recordings of the axial dipole (black), the axial quadrupole (blue) and the equatorial dipole (red). Left: $R_m = 165$, $P_m = 0.5$ and $C = 1.5$. Right: $R_m = 180$, $P_m = 0.5$ and $C = 2$.

tuations observed in these signals points to the role of hydrodynamic fluctuations on the reversal mechanism. One could be tempted to speculate that a higher degree of hydrodynamic fluctuations necessarily yields a larger reversal rate. Such is in fact not the case. A more sensible approach could be to try to relate the amount of fluctuations of the magnetic modes in a phase with given polarity, to the frequency of reversals. Increasing R_m from 165 to 180 does yield larger fluctuations as shown in figure 3 (right). However the reversal rate is in fact lowered because C was modified to $C = 2$. This clearly shows that the asymmetry parameter C plays a more important role than the fluctuations of the magnetic field. For $P_m = 0.5$, reversals occur only in a restricted region, $1.1 < C < 2.5$, which is also a feature of the VKS experiment.

Let us now investigate the detail of a polarity reversal (figure 4). Interestingly the dipolar and quadrupolar components do not vanish simultaneously. Instead the decrease of the dipole is associated with a sudden increase of the quadrupolar component, related with a burst of activity in the non axisymmetric velocity mode $m = 1$ (zonal velocity) breaking the $\mathcal{R}_\pi$ symmetry (i.e. coupling the dipolar and quadrupolar families). The quadrupole quickly decays as the dipole recovers with a reversed polarity. Immediately after the reversal the dipole systematically overshoots its mean value during a polarity interval. This behavior of the magnetic modes is typical of reversals obtained with this value of P_m and is in agreement with the model presented in [12, 13].

These direct numerical simulations illustrate the role of the magnetic Prandtl number in the dynamics of reversals. When P_m is of order one, the magnetic perturbations due to the advection of magnetic field lines by the velocity field, evolves with a time scale similar to the one of the velocity fluctuations. We thus expect

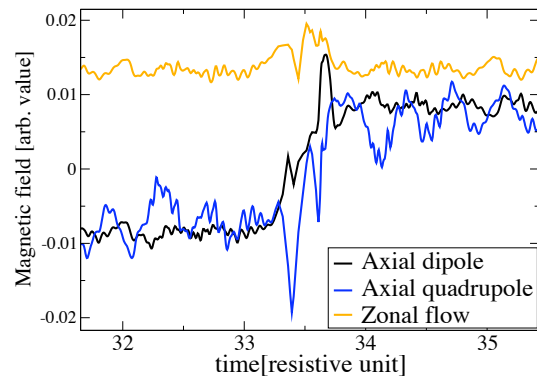


FIG. 4: Time recordings of the axial dipole (black), the axial quadrupole (blue) and zonal velocity (yellow) during a reversal. $R_m = 165$, $P_m = 0.5$ and $C = 1.5$.

these two fields to be strongly coupled. Modification of the magnetic field lines due to their advection by a local fluctuation of the flow can then trigger a reversal of the field [14]. This type of scenario has been observed in some direct numerical simulations, usually performed with P_m of order one [15]. When P_m is small, magnetic perturbations decay much faster and we expect only the largest scale magnetic modes to govern the dynamics. To illustrate this argument in a more quantitative way, we have computed the correlation r of the most significant magnetic and velocity modes with the axial magnetic dipole for $Re = 330$ and $0.3 < P_m < 1$. For $P_m \sim 1$, all the modes are weakly correlated with the axial magnetic dipole ($r < 0.3$). When P_m is decreased, the correlation of most modes decay except the one of the zonal velocity mode that slightly increases and the one of the axial

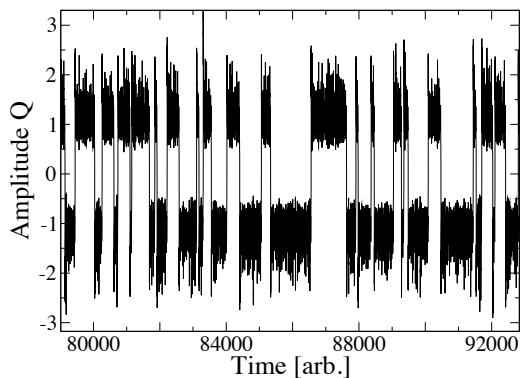


FIG. 5: Numerical integration of the amplitude equations (3,4,5). Time recording of the amplitude of the quadrupolar mode for $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ and $\Gamma = 0.9$.

quadrupole mode that strongly increases up to 0.8.

We now write the simplest dynamical system that involves the three modes that display correlation in the low P_m simulations: the dipole D , the quadrupole Q , and the zonal velocity mode V that breaks the $\mathcal{R}_\pi$ symmetry. These modes transform as $D \rightarrow -D$, $Q \rightarrow Q$ and $V \rightarrow -V$ under the $\mathcal{R}_\pi$ symmetry. Keeping nonlinear terms up to quadratic order, we get

$$\dot{D} = \mu D - VQ, \quad (3)$$

$$\dot{Q} = -\nu Q + VD, \quad (4)$$

$$\dot{V} = \Gamma - V + QD. \quad (5)$$

A non zero value of Γ is related to a forcing that breaks the $\mathcal{R}_\pi$ symmetry, i.e. propellers rotating at different speeds. The dynamical system (3,4,5) with $\Gamma = 0$ occurs in different hydrodynamic problems and has been analyzed in detail [16]. The relative signs of the coefficients of the nonlinear terms are such that the solutions do not diverge when $\mu > 0$ and $\nu < 0$. Their modulus can be taken equal to one by appropriate scalings of the amplitudes. The velocity mode is linearly damped and its coefficient can be taken equal to -1 by an appropriate choice of the time scale. Note that similar equations were obtained with a drastic truncation of the linear modes of MHD equations [5]. However, in that context μ and ν should be both negative and the damping of the velocity mode was discarded, thus modifying the dynamics.

This system displays reversals of the magnetic modes D and Q for a wide range of parameters. A time recording is shown in figure 5. The mechanism for these reversals results from the interaction of the modes D and Q coupled by the broken $\mathcal{R}_\pi$ symmetry when $V \neq 0$. It is thus similar to the one described in [12] but keeping the damped velocity mode into the system generates chaotic

fluctuations. Thus, it is not necessary to add external noise to obtain random reversals. We do not claim that this minimal low order system fully describes the direct simulations presented here. For instance, in the case of exact counter-rotation ($C = 1$, i.e. $\Gamma = 0$), equations (3,4,5) do not have a stable stationary state with a dominant axial dipole. The different solutions obtained when μ is increased cannot capture all the dynamo regimes of the VKS experiment or of the direct simulations when R_m is increased away from the threshold. Taking into account cubic nonlinearities provides a better description of the numerical results for $P_m = 0.5$. However, this three mode system with only quadratic nonlinearities involves the basic ingredients of the reversals observed in the present numerical simulations for low enough values of the magnetic Prandtl number.

We thank F. Pétrélis for useful discussions. Computations were performed at CEMAG and IDRIS.

-
- [1] H. K. Moffatt, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press (Cambridge, 1978); E. Dormy and A.M. Soward (Eds), *Mathematical Aspects of Natural dynamos*, CRC-press (2007).
 - [2] See for instance, P. H. Roberts and G. A. Glatzmaier, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 1081 (2000).
 - [3] F. Stefani and G. Gerbeth, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 184506 (2005); F. Stefani and al., *G. A. F. D.* **101**, 227 (2007).
 - [4] T. Rikitake, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **54**, 89-105 (1958); E. Knobloch and A. S. Landsberg, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **278**, 294 (1996); I. Melbourne, M. R. E. Proctor and A. M. Rucklidge, *Dynamo and dynamics, a mathematical challenge*, Eds. P. Chossat et al., pp. 363-370, Kluwer Academic Publishers (2001); P. Hoyng and J. J. Duistermaat, *Europhys. Lett.* **68**, 177 (2004).
 - [5] P. Nozières, *Phys. Earth Planet. Int.* **17**, 55-74 (1978).
 - [6] M. Berhanu et al., *Europhys. Lett.* **77**, 59001 (2007).
 - [7] F. Ravelet et al., *Phys. Rev. Lett.* **101**, 074502 (2008).
 - [8] R. A. Bayliss et al., *Phys. Rev. E* **75**, 026303 (2007).
 - [9] C. Gissinger, E. Dormy and S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 144502 (2008).
 - [10] E. Dormy, PhD thesis (1997); E. Dormy, P. Cardin, D. Jault, *Earth Plan. Sci. Lett.* **160**, 15-30 (1998); U. Christensen et al., **128**, 25-34 (2001); and later collaborative developments.
 - [11] J.-P. Valet, L. Meynadier, Y. Guyodo, *Nature* **435**, 802-805 (2005).
 - [12] F. Pétrélis and S. Fauve, *J. Phys. Condens. Matter* **20**, 494203 (2008).
 - [13] F. Pétrélis et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 144503 (2009).
 - [14] E. N. Parker, *Astrophys. J.* **158**, 815-827 (1969).
 - [15] G.R. Sarson and C.A. Jones, *Phys. Earth Planet. Int.* **111**, 3-20 (1999); J. Wicht and P. Olson, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* **5**, Q03GH10 (2004); J. Aubert, J. Aurnou and J. Wicht, *Geophys. J. Int.* **172**, 945 (2008).
 - [16] D. W. Hughes and M. R. E. Proctor, *Nonlinearity* **3**, 127-153 (1990).

Liste des tableaux

1.1	Champs magnétiques planétaires. D'après Jones 2007 [19]	4
3.1	Seuils dynamo pour différents types de conditions aux limites sur les disques et sur la paroi latérale du cylindre. B_n et B_ϕ indique des conditions ferromagnétiques (respectivement normal aux disques ou normal aux pales). $-\nabla\Phi$ indique une condition isolante et on ajoute Na lorsqu'une couche de sodium est présente entre l'écoulement et le domaine extérieur.	84

Table des figures

1.1	Extrait d'une carte marine de 1539 par Olaus magnus, montrant la position du nord magnétique nommée 'Insula Magnetu' (latin pour 'Ile magnétique').	1
1.2	Schémas illustrant la structure interne des deux objets astrophysiques les mieux connus. A gauche : structure interne de la Terre. A droite : structure interne du soleil.	2
1.3	Schéma illustrant la dynamo disque homopolaire de Bullard.	3
1.4	Champ magnétique de la Terre. En haut : illustration schématique du dipole, montrant une inclinaison de 12° avec l'axe de rotation de la Terre. En bas : Intensité du champ magnétique radial terrestre, issu des données observationnelles (d'après Christensen et al 1999).	5
1.5	Polarité de la partie dipolaire du champ magnétique terrestre au cours des 160 derniers millions d'années. En noir : les périodes de temps similaires à la polarité actuelle. On notera le caractère chaotique des renversements (d'après Merrill et al 1996).	6
1.6	Comportement du champ magnétique solaire. En haut : taches solaires observées au cours du siècle. En bas : nombre moyen de taches solaires observés (données NASA/NSSTC/Hathaway 2005/01).	7
1.7	Simulation numérique réalisée en 1995 par Glatzmaier et Roberts. Il s'agit de l'une des premières modélisations numériques de la géodynamo. On reconnaît le caractère fortement dipolaire du champ magnétique.	7
1.8	Illustration schématique de l'effet ω	12
1.9	Illustration schématique de l'effet Parker, parfois appelé effet α	14

2.1	Photo de l'expérience de Lowes et Wilkinson, reproduite au cours d'un travail en collaboration avec Nicolas Mordant. On y distingue clairement les deux moteurs et le bloc central contenant les rotors. Les blocs font environ 20 cm de largeur.	19
2.2	Diagramme schématique de l'expérience de Lowes et Wilkinson illustrant le mécanisme d'amplification du champ magnétique.	20
2.3	Illustration schématique des expériences de Karlsruhe (En haut) et de Riga (en bas).	21
2.4	Illustration schématique de l'expérience DTS, à Grenoble.	22
2.5	Illustration schématique de l'expérience du Wisconsin. On voit clairement les deux hélices plongées à l'intérieur de la sphère.	23
2.6	L'expérience VKS. A gauche : schéma typique de l'expérience. Le cylindre, placé horizontalement, est muni de deux disques en contre-rotation. A droite : photo de l'intérieur de l'expérience lorsque l'un des disques est retiré : On voit au fond le deuxième disque et l' espace entre la cuve et le cylindre extérieur, permettant l'ajout du sodium au repos. Noter la présence de nombreux tuyaux assurant le refroidissement de l'ensemble.	24
2.7	Schéma de l'expérience VKS indiquant les cotes exactes du dispositif. A gauche, les valeurs indiquées sont en mm tandis qu'elles sont normalisées par le rayon de la cuve à droite.	25
2.8	Schéma illustrant l'écoulement de von Karman. Sur ce dessin, on voit clairement les deux disques en contre-rotation. En rouge sont illustrées les deux cellules de rotation azimuthale et en bleu la recirculation poloïdale due à l'expulsion centrifuge du fluide près des disques. . . .	28
2.9	Écoulement de von Karman crée par la rotation d'un seul disque, l'autre étant à l'arrêt ($F_2 = 0$).	29
2.10	Enregistrement des composantes du champ magnétique au cours du temps. Rm est augmenté de 19 jusqu'à 40	30
2.11	Diagrammes de bifurcation. (a) : champ azimuthal dans le plan médian. On superpose deux résultats montrant une polarité différente. Les lignes continues sont un ajustement numérique des points expérimentaux tel que $B \sim (Rm - 32)^{0.77}$ (b) Champ mesuré près des disques dans le cas 'contra'(en bleu) et 'anticontra'en rouge).	32

- 2.12 Géométrie du mode dynamo. Les flèches représentent l'amplitude du champ magnétique déduite des mesures aux différents points de sonde. (a) : composante toroïdale du champ. (b) : composante poloidale. (c) : illustration du dipole axial axisymétrique, structure la plus simple compatible avec les données (a) et (b). 34
- 2.13 Profils radiaux du champ magnétique. Bleu : champ axial, Vert : champ radial, Rouge : champ azimuthal. les différentes courbes de même couleurs indiquent le champ pour plusieurs Rm 35
- 2.14 Différents régimes dynamo dans l'espace des paramètres. (a) : dans le plan (F_1, F_2) . (b) : données symétrisées, évolution lorsque la rotation d'un seul disque est modifiée, dans le plan (Rm, θ) . D'après [55]. . . . 37
- 2.15 Evolution temporelle des différents régimes dynamos observés dans l'expérience VKS. On notera la richesse des comportements obtenus : solutions stationnaires (a, d, i, j et l), renversements chaotiques (g), bouffées intermittentes (e) et oscillations périodiques (c). 39
- 2.16 Transition vers un cycle limite du champ magnétique. Le cycle semble impliquer deux modes magnétiques différents ; un dipole (a) et un quadrupole (b). L'évolution du champ dans l'espace des phases B_r, B_θ (c) montre que le cycle revisite chacun des points fixes précédents. (d) : Signal temporel du cycle limite. 40
- 2.17 Renversements du champ magnétique lorsque les fréquences de rotation sont $F_1 = 16\text{Hz}$ et $F_2 = 22\text{Hz}$. (a) : Série temporelle des trois composantes du champ magnétique (rouge : partie azimuthale, bleu : axiale, verte : radiale). Noter le caractère chaotique des renversements. (b) : superpositions de douzes renversements. On notera la robustesse de la forme des renversements. 42
- 2.18 Espace des phases typique d'un système invariant selon la transformation $B \rightarrow -B$ et présentant une bifurcation noeud-col globale. (a) : au-dessous de la bifurcation noeud-col, les solutions stationnaires sont des états mixtes entre dipole et quadrupole. (b) : au-dessus de la bifurcation noeud-col, le système oscille entre les deux modes. 43
- 2.19 Intégration numérique du modèle 2.10. On montre l'évolution temporelle de l'amplitude D . Le rebond est en particulier bien visible. . . 45
- 2.20 Espace des paramètres pour la campagne 'VKS2n'. Les ronds rouges indiquent une dynamo. 47

- 2.21 Schéma du disque muni des huit pales dans l'expérience VKS. On indique les deux sens de rotation différents utilisés, associés à des Rm de signes opposés. Selon le sens de rotation, la courbure des pales accroît ou diminue l'éjection radiale du fluide entre les pales à la périphérie du disque. 48
- 2.22 Évolution de la moyenne du champ magnétique en fonction de $Rm = Rm_1 = Rm_2$. A gauche : le point de mesure est situé en $z = -119mm$, près du disque en fer. A droite : la mesure est réalisée en $z = +119mm$, près du disque en inox. Dans les deux cas, $r = 96mm$ et $\theta = 0$ 48
- 2.23 Orientation moyenne du champ magnétique dans le plan (r, z) . Le disque en fer est à gauche. Les deux fréquences de rotation sont égales et $Rm = 50$ 49
- 2.24 Orientation moyenne du champ magnétique dans le plan (r, θ) et pour $z = 118mm$, $z = 0mm$ et $z = -118mm$ de gauche à droite. Les deux fréquences de rotation sont égales et $Rm = 50$ 49
- 2.25 Profils radiaux des trois composantes du champ magnétique obtenus à partir des sondes multiples. En haut, à gauche : sonde située près du disque en fer. En haut, à droite : sonde située près du disque en inox. En bas : sonde située dans le plan médian. 50
- 2.26 Courbe de bifurcation lorsque le disque en inox est à l'arrêt. On montre la valeur moyenne des trois composantes pour une sonde située près du disque en rotation. 52
- 2.27 Structure géométrique du champ magnétique lorsque le disque en inox est à l'arrêt. En haut : profil du champ dans le plan (r, z) pour deux sondes situées près du disque en rotation et dans le plan médian. En bas : Orientation moyenne du champ magnétique dans le plan (r, θ) et pour $z = 118mm$, $z = 0mm$ et $z = -118mm$ de gauche à droite. . . 53
- 2.28 Profils radiaux des trois composantes du champ magnétique obtenues à partir des sondes multiples. A gauche : sonde située près du disque en fer. A droite : sonde située dans le plan médian. La valeur du Gaussmètre, situé près du disque en inox et pour $r \approx 70mm$, indique $\langle B_R \rangle = -10G$, $\langle B_\theta \rangle = 23G$ et $\langle B_z \rangle = -8G$ 54
- 2.29 Courbe de bifurcation du champ magnétique en fonction de Rm_2 , pour une rotation fixée du disque 1 telle que $Rm_1 = 45$. Sonde située dans le plan médian. 54
- 2.30 Schéma de l'écoulement produit par un forçage co-rotatif dans l'expérience VKS. 55

2.31	Courbes de bifurcation du champ magnétique moyen à partir de l'état co-rotatif $Rm_1 = -Rm_2 = 60.3$ en diminuant la rotation du disques 2, mesuré près du disque 1 (à gauche) et du disque 2 (à droite). . . .	56
2.32	Géométrie dans le plan (r, z) du champ magnétique engendré en co-rotation légèrement décalée.	57
2.33	Géométrie dans le plan (r, θ) du champ magnétique engendré en co-rotation légèrement décalée. De gauche à droite : mesures réalisée pour $z = 118mm$, $z = 0mm$ et $z = -118mm$	57
2.34	Profils en fonction de r du mode dynamo mesuré par les sondes multiples. A gauche : près du disque en fer. A droite : près du disque en inox. La valeur du Gaussmètre, situé au centre, indique $\langle B_R \rangle = -10$, $\langle B_\theta \rangle = 22$, $\langle B_z \rangle = 2$	58
2.35	A gauche : partie dipolaire du champ magnétique en contra-rotation exacte. A droite : partie quadrupolaire.	59
2.36	Évolution, en contra-rotation exacte, des parties dipolaires et quadrupolaires du champ reconstruites à partir de $\langle B_\theta \rangle$, en fonction de Rm	59
2.37	Évolution des parties dipolaires et quadrupolaires et du champ reconstruites à partir de $\langle B_\theta \rangle$, en fonction de Rm_2 . La rotation du disque 1 est fixée à une valeur constante telle que $Rm_1 = 47.6$	60
2.38	Régime $F_1 = 15Hz$, $F_2 = 25Hz$ En haut : Évolution des composantes du champ mesurées près du disque 1. En bas, à gauche : évolution temporelle des modes dipolaire et quadrupolaire projetés sur l'état (D_0, Q_0) . En bas, à droite : on représente la trajectoire dans l'espace des phases (D, Q)	62
2.39	Trajectoires dans l'espace des phases (D, Q) des régimes observés pour $F_1/F_2 = 0.6$. On observe une transition entre points fixes, cycles limites et renversements chaotiques.	63
2.40	Régime $F_1 = 16Hz$, $F_2 = 26.5Hz$ En haut, à gauche : évolution temporelle des modes dipolaire et quadrupolaire calculés à partir de la composante axial du champ. A droite : on représente la trajectoire dans l'espace des phases (D, Q) . En bas : Évolution du champ durant quatre renversements superposés.	64

2.41	Régime $F_1 = 28\text{Hz}$, $F_2 = 8\text{Hz}$ En haut : Évolution des composantes du champ mesurées près du disque 1. En bas, à gauche : évolution temporelle des modes dipolaire et quadrupolaire calculés à partir de la composante axiale du champ. En bas, à droite : on représente la trajectoire dans l'espace des phases (D, Q)	65
2.42	Régime $F_1 = 22\text{Hz}$, $F_2 = 16.5\text{Hz}$ En haut : Évolution des composantes du champ mesurées près du disque 1. En bas, à gauche : évolution temporelle des modes dipolaire et quadrupolaire calculés à partir de la composante axiale du champ. En bas, à droite : on représente la trajectoire dans l'espace des phases (D, Q)	67
3.1	Coupe dans le plan r, z de l'écoulement de von Kármán synthétique donné par l'expression 3.24.	79
3.2	Structure du dipole équatorial engendré par l'écoulement moyen de von Kármán. A gauche : lignes de champ magnétique du mode. A droite : isovaleur de 25 % du maximum de l'énergie magnétique. Il s'agit d'un dipole équatorial, dont la totalité de l'énergie se situe sur le nombre azimutal $m = 1$	80
3.3	Taux de croissance en fonction de Rm , pour différentes conditions aux limites.	83
3.4	Champ de vitesse crée par le vecteur potentiel $\mathbf{G}$ de vitesse. Il s'agit ici des lignes de champ de cet écoulement tout seul. On voit nettement les huit structures hélicitaires près de chaque disque.	87
3.5	Évolution du taux de croissance linéaire des modes magnétiques lorsque l'on augmente Rm , en contra-rotation exacte. Avec des conditions aux limites ferromagnétiques, on montre le dipole axial (cercles). Triangles : quadrupole axial. Carrés : dipole équatorial. Les traits en pointillés indiquent les calculs dans le cas de conditions aux limites isolantes.	89
3.6	Lignes de champ magnétique pour $Rm = 35$. Le champ est principalement un dipole axial. En plus de la composante axisymétrique, on reconnaît la présence du mode $m = 8$ près des disques.	90
3.7	Lignes de force du champ magnétique pour $Rm = 75$. Le champ est principalement un quadrupole axial. En plus de la composante axisymétrique, on reconnaît la présence du mode $m = 8$ près des disques.	91

- 3.8 Comparaison de la structure des modes obtenus dans les simulations numériques et l'expérience. On montre les profils radiaux des trois composantes, pour $z = 0.8$. En haut : profil numérique. En bas : profil expérimental. On note la similitude entre les deux modes magnétiques. 92
- 3.9 Coupe dans un plan (r, z) du champ magnétique pour $Rm = 35$ et $C = 0$. Il s'agit de la partie axisymétrique du champ uniquement. Les lignes de champ font clairement apparaître un B_z dominant près de l'axe, tandis que le code de couleur indique B_ϕ . La structure est clairement dipolaire. 93
- 3.10 Coupe dans un plan (r, z) du champ magnétique pour $Rm = 100$ et $C = 0$, avec des conditions aux limites isolantes. Il s'agit de la partie axisymétrique du champ uniquement. A gauche : composante dipolaire du champ magnétique. A droite : composante quadrupolaire (mode le plus instable). On notera la différence avec la structure observé dans le cas de conditions ferromagnétiques (voir la figure 3.9). 94
- 3.11 Champ de vitesse $\mathbf{W}$ illustré par une coupe dans le plan (r, z) . Les lignes indiquent la circulation poloïdale tandis que le code de couleur représente l'intensité de la vitesse selon la direction ϕ 95
- 3.12 Évolution du taux de croissance et de la pulsation du mode magnétique instable lorsque la symétrie R_π est brisée. En noir : partie réelle du taux de croissance du mode. En rouge : partie imaginaire. On voit nettement la bifurcation noeud-col se produisant à $C = 0.4$ 96
- 3.13 Évolution temporelle du système dans le régime oscillant, pour $Rm = 30$ et $C = 1.6$. Le système est proche de la stabilité marginal, la croissance exponentielle n'est donc pas visible. 98
- 4.1 Écoulement créé par le forçage volumique 4.28. Les contours sont les lignes de champ de la vitesse poloïdale tandis que le code de couleur représente la composante toroïdale. Le champ étant axisymétrique, on montre une coupe en $\theta = 0$. Cette image est issue d'une simulation hydrodynamique effectuée à $Re = 70$ 108
- 4.2 Évolution temporelle typique d'une simulation en régime laminaire, pour $Rm = 180$ et $Re = 120$. On montre l'évolution de l'énergie totale associée à différents modes azimutaux. En rouge, on voit la croissance du dipole équatorial tandis que le champ moyen issu du forçage, en orange, diminue légèrement lors de la saturation. En noir : composante $m = 0$ du champ magnétique. En bleu : composante $m = 2$ de l'écoulement qui apparaît lorsque le dipole équatorial sature. 109

- 4.3 Structure du dipole équatorial engendré par l'écoulement laminaire, pour $Rm = 180$ et $Re = 120$. En haut, à gauche : Lignes de champ magnétique. A droite : isovaleur de l'énergie magnétique (25% de l'énergie maximale). On reconnaît la forme 'banane' caractéristique, relativement similaire au dipole équatorial observé dans les modèles cylindriques. En bas : coupe en $\theta = \pi/2$, dans le plan équatorial. Les contours indiquent les lignes de champ projetées dans le plan et la couleur indique l'intensité du champ magnétique radial. 110
- 4.4 Comparaison du dipole équatorial obtenu dans la simulation sphérique et dans la simulation du code cylindrique. Dans les deux cas, l'isovaleur du champ magnétique (25% de l'énergie max) est très similaire, et typique d'une dynamo engendré par un écoulement $s_2^0 + t_2^0$. 111
- 4.5 Courbe de stabilité Rm_c en fonction de Re . En rouge : Évolution du seuil du dipole équatorial $m = 1$, engendré en régime laminaire. En bleu : seuil d'instabilité de la structure correspondant à un mode dynamo turbulent, relativement axisymétrique. En noir : Seuil du dipole axial fortement axisymétrique $m = 0$ 112
- 4.6 Diagramme de bifurcation des différents modes magnétiques lorsque l'on varie Rm pour $Re = 122$. Les barres d'erreurs indiquent l'amplitude des oscillations. Tous les autres modes magnétiques sont faibles comparés à ceux-là. 114
- 4.7 Évolution temporelle des différents modes impliqués dans la simulation, pour $Rm = 292$ et $Re = 120$ 115
- 4.8 Évolution de la période d'oscillation du dipole équatorial en fonction de Rm pour $Re = 120$. On note la divergence de la période près de la bifurcation dynamo. 115
- 4.9 Evolution temporelle des modes magnétiques et cinétiques (énergie totale), pour $Re = -76$ et $Rm = 170$ 116
- 4.10 Lignes de champ magnétique du dipole axial observé dans les simulations, pour $Re = -76$ et $Rm = 170$, après une vingtaine de temps résistifs. On notera la forte axisymétrie du champ magnétique. . . . 117
- 4.11 Diagramme de bifurcation des différents modes magnétiques lorsque l'on varie Rm , pour un nombre de Reynolds fixe $Re = -76$. Les barres d'erreurs indiquent l'amplitude des oscillations, et les lignes en pointillés la valeur maximale des modes durant le cycle de relaxation. Tous les autres modes magnétiques sont faibles comparés à ceux-ci. . 118

- 4.12 En haut : évolution de la période des oscillations non-linéaires en fonction de Rm pour $Re = -76$. On note la divergence claire de la période près de la disparition du cycle (ligne en pointillé). En bas : cycles dans l'espace des phases pour $Rm = 150$ et $Re = -76$ 119
- 4.13 Diagramme de bifurcation du système d'équations d'amplitude (4.30-4.31-4.32) lorsque l'on varie μ , avec $\alpha_1 = 0.15, \alpha_3 = 4, \nu = 0.5, \beta_2 = 0.4, \lambda = 1., \gamma_2 = 2.5, \gamma_3 = 0.5$, tous les autres coefficients valant zéro. On indique à la fois les valeurs maximales et minimales des modes en régime saturé. En bas : Évolution de la vitesse de rotation de la phase de A 123
- 4.14 Intégration numérique du système d'équation d'amplitude (4.30-4.31-4.32). En haut : évolution temporelle de l'amplitude des trois modes dans le cycle de relaxation ($\mu = 1.4, \alpha_1 = 0.15, \alpha_3 = 4, \nu = 0.5, \beta_2 = 0.4, \lambda = 1., \gamma_2 = 4., \gamma_3 = 0.5$, tous les autres coefficients valant zéro). En bas : cycle de relaxation vu dans l'espace des phases. 125
- 4.15 Évolution du niveau de turbulence en fonction du nombre de Reynolds. On montre l'évolution temporelle de l'énergie cinétique pour des simulations à $Re = 100$ (courbe bleue), $Re = 250$ (rouge) et $Re = 1000$ (noir), illustrant la transition vers un régime turbulent. . . 127
- 4.16 Déviation standard de Re en fonction de Re_0 . On observe une transition pour $Re \sim 180$, où des fluctuations apparaissent dans l'écoulement. La courbe en pointillé est un ajustement en $(Re - Re_c)^\alpha$, avec $Re_c = 177$ et $\alpha = 0.7$ 127
- 4.17 Spectre des harmoniques sphériques d'une simulation à $Re = 330$. En noir : densité d'énergie spectrale en fonction du degré l . En rouge : spectre en fonction de l'ordre m . L'énergie est particulièrement forte sur la composante du champ moyen. 128
- 4.18 Simulation hydrodynamique réalisée à $Re = 2000$. A gauche : évolution de l'amplitude des modes azimutaux de vitesse près de la sphère externe. A droite : mesure du Re effectif (courbe continue) comparé au Re_0 imposé dans les équations (courbe pointillé) 129
- 4.19 Structure de l'écoulement pour $Re = 2500$. En haut : coupe dans un plan méridien montrant les trois composantes de vitesse. En bas : lignes de courants du champ de vitesse dans l'espace. 130
- 4.20 Spectre d'énergie cinétique obtenu à partir d'une simulation réalisée pour $Re = 2000$. La ligne en pointillé rouge est un ajustement de la zone inertielle avec la loi de puissance $k^{-5/3}$ 131

- 4.21 Diagramme de phase $Rm - Re$. On montre quelques simulations réalisées dans le régime turbulent. Les ronds indiquent des simulations dynamos tandis que les carrés indiquent que le champ magnétique décroît. 132
- 4.22 Évolution temporelle des champs cinétique et magnétique pour $Re = 210$ et $Pm = 1$. A gauche : champ de vitesse. A droite : champ magnétique. On note la transition brutale se produisant vers $t \sim 4$ menant à un champ magnétique dépourvu de composante équatorial. 132
- 4.23 Évolution temporelle de l'amplitude des champs cinétique et magnétique pour $Re = 300$ et $Pm = 0.6$, en $r = a/2$ (on montre l'amplitude associée aux harmoniques sphériques correspondantes). A gauche : champ de vitesse. A droite : champ magnétique. On note la génération d'un champ magnétique très fluctuant, dominé par un dipole axial. 133
- 4.24 Lignes de champs magnétiques dans une simulation typique, pour $Re = 300$ et $Pm = 0.6$. On note que le champ magnétique est assez fluctuant mais principalement axisymétrique. La structure est un dipole axial associé avec un fort champ toroïdal. 134
- 4.25 Évolution temporelle de quelques modes magnétiques pour une simulation avec $Re = 1800$ et $Pm = 1$. On note l'aspect très fluctuant du champ et les renversements chaotiques de la polarité du dipole axial. . 135
- 4.26 Comparaison des spectre de l'énergie magnétique (en rouge) et de l'énergie cinétique(en noir) pour une simulation à $Re = 1800$. Les courbes en pointillés indiquent des ajustements en $k^{-5/3}$. La simulation est réalisée pour $Pm = 1$ 135
- 4.27 Évolution temporelle des modes magnétiques pour $Rm = 220$, $Pm = 1$ et $C = 1.5$. En noir : composante dipolaire $m = 0$. En rouge : partie équatorial du champ magnétique ($m = 1$). En bleu : quadrupole axial $m = 0$ 138
- 4.28 Agrandissement de la figure 4.27 autour d'un renversement donné. On notera le caractère très fluctuant des modes magnétiques. 139
- 4.29 Évolution temporelle du dipole axial magnétique (noir), du quadrupole axial (bleu) et du dipole équatorial (rouge). Simulation effectuées pour $Re = 330, Pm = 0.5$ et $C = 1.5$ 141
- 4.30 Évolution temporelle du dipole axial magnétique (noir), du quadrupole axial (bleu) et du dipole équatorial (rouge). Simulation effectuées a $Re = 360, Pm = 0.5$ et $C = 2$ 142

- 4.31 Facteur de corrélation temporelle du dipole axial avec différents modes en fonction du nombre de Prandtl magnétique. 143
- 4.32 Évolution temporelle du mode dipolaire magnétique(en noir), du mode quadrupolaire (bleu) et du mode de vitesse brisant la symétrie R_π . Simulation pour $Re = 330$, $Pm = 0.5$ et $C = 1.5$. On voit clairement le transfert vers le quadrupole durant le renversement. 145
- 4.33 Intégration numérique du modèle à trois modes pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. En haut : Évolution temporelle de l'amplitude Q . Au milieu : agrandissement autour d'un renversement donné. On notera le transfert entre dipole et quadrupole. En bas : trajectoire dans l'espace des phases. 149
- 5.1 Diagramme de stabilité du point trivial $D_O = Q_O = 0$ et $V_O = \Gamma \cdot F$ indique le point de bifurcation de codimension 2, et $\Gamma = 1$ 154
- 5.2 Intégration numérique du modèle pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. On voit en rouge la section de Poincaré utilisé pour l'application du premier retour. 156
- 5.3 Diagramme de bifurcation de x^n en fonction de μ à partir de l'application du premier retour. Lorsque μ décroît de 0.15 jusqu'à 0.1, on observe une transition vers le chaos par doublement de période. . . . 157
- 5.4 Intégration numérique du modèle pour différentes valeurs de μ illustrant la transition vers le chaos (de haut en bas : $\mu = 0.14$, $\mu = 0.135$ et $\mu = 0.13$. À gauche : application de premier retour du système. À droite : espace des phase (D,Q). On voit clairement le doublement de période entre $\mu = 0.135$ et $\mu = 0.13$ 158
- 5.5 Évolution de l'exposant de Lyapunov λ du système en fonction de μ . On voit que la série de bifurcations par doublements de période correspond à une augmentation de λ , traduisant la transition vers un état chaotique. 159
- 5.6 Intégration numérique du modèle pour $\mu = 0.12$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. Pour ce jeu de paramètres, on observe une dynamique chaotique. En haut : Application discrète. En bas, à gauche : évolution temporelle de l'amplitude Q . En bas, à droite : évolution du système dans le plan de phase (D,Q). Pour cette condition initiale, le système reste autour du point M_+ 160

- 5.7 Comportement du modèle pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. L'application discrète (en haut) montre une situation très similaire à celle vue pour $\mu = 0.12$, de sorte que le chaos y est identique. On note toutefois une petite ouverture permettant la connexion avec l'autre point fixe opposé. 161
- 5.8 Évolution du temps caractéristique d'attente entre deux renversements à l'approche du point de bifurcation de la crise. A gauche : Évolution en fonction de μ , qui suggère $\mu_c = 0.11928$. L'encadré montre $1/\tau$ en fonction de μ . A droite : Évolution en échelle logarithmique de τ en fonction de $\mu - \mu_c$. On trouve numériquement un exposant $\gamma \sim 1/2$ 162
- 5.9 Bassin d'attraction des deux attracteurs chaotiques projetés dans le plan de Poincaré. Les parties blanches et noires distinguent les deux bassins. On montre en rouge les attracteurs. En haut : le système se trouve avant la crise, pour $\mu = 0.1194$ (gauche) et $\mu = 0.1193$ (à droite). En bas : Pour $\mu = 0.11928 \approx \mu_c$, on observe une collision entre les attracteurs et le bord limite des bassins. 164
- 5.10 Évolution au cours du temps de la distance entre deux trajectoires initialement distantes de 10^{-15} . l'exposant de Lyapunov est d'environ 0.1. 165
- 5.11 En haut : Espace des phases pour $\mu = 0.101$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. L'évolution n'est plus chaotique pour ces valeurs. On observe une connexion périodique entre les deux points fixes. En bas : évolution temporelle des trois modes. 166
- 5.12 Espace des phases pour $\mu = 0.06$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.9$. Le système tend vers la solution stable O . La trajectoires fait apparaître une orbite périodique instable. 167
- 5.13 Évolution temporelle de l'amplitude Q pour différentes valeurs de μ . De gauche à droite, on a $\mu = 0.09$, $\mu = 0.08$ et $\mu = 0.065$. On note le caractère asymétrique des renversements. 167
- 5.14 Évolution du système pour $\mu = \nu = 0.35$, $\Gamma = 0.1$, lorsque les quatre points fixes non-triviaux sont présents. A gauche : évolution dans l'espace des phases (D, Q) . A droite : évolution au cours du temps de l'amplitude Q 168
- 5.15 Évolution du système pour $\mu = 0.3$, $\nu = 0.2$ et $\Gamma = 5$. A gauche : évolution dans l'espace des phases (D, Q) . A droite : évolution au cours du temps de l'amplitude Q 169

5.16	Comparaison de l'évolution temporelle du champ magnétique terrestre [85] (en haut) avec des modèles de basse dimension (au milieu à gauche : Rikitake. A droite : Lorenz. En bas : le modèle de Melbourne et al.)	170
5.17	Évolution de la série temporelle du dipole magnétique de la Terre moyennée en temps sur une fenêtre glissante de 5000 ans. A gauche : évolution au cours du temps. A droite : évolution dans l'espace des phases obtenu par la méthode des délais (avec un temps de retard $\tau = 15000$ ans).	173
5.18	A gauche : Evolution pour $\tau = 15000$ ans de la proportion de faux voisins en fonction de la dimension. La chute brutale de la courbe suggère une dimension de plongement $d_e = 8$. A droite : dimension de plongement d_e en fonction de τ	174
5.19	En haut : évolution de la distribution $C(R)$ en fonction de la distance entre points R . On compare le modèle (à gauche) avec les données géophysiques (à droite). En bas : évolution de la dimension de corrélation en fonction de la dimension de plongement. Pour le modèle, on trouve une dimension de corrélation légèrement supérieure à 2, tandis que la valeur est plus haute dans le cas de la Terre ($d_c \sim 2.7$)	175
5.20	Exposant de Lyapunov estimé en dimension de plongement 3.	176
5.21	A gauche : Distribution de probabilité des temps d'attente entre deux renversements géomagnétique. La loi est relativement poissonnienne. A droite : distribution de probabilité de l'intensité du dipole du champ terrestre. On observe une loi bi-normale.	177
5.22	Distribution des temps d'attente entre deux renversements pour le modèle. On observe des oscillations correspondant à la quantification aux temps courts et un comportement poissonien aux temps longs.	178
5.23	Distribution de probabilité des amplitudes D (à gauche) et Q (à droite).	179
5.24	Spectres temporels du modèle et de la géodynamo. Les données pour la Terre (à gauche) suggère un comportement en $1/f$ aux temps courts, difficilement reproductible à l'aide du modèle (à droite).	179
5.25	Comparaison des signaux temporels obtenus à partir des données paléomagnétiques (en bas) et à partir du modèle à trois modes (D, Q, V), pour $\mu = 0.119$, $\nu = 0.1$ et $\Gamma = 0.1$ (en haut).	180

