Algèbres, Intégrabilité et
Modèles Exactement Solubles

Examen du jeudi 9 juin 2011, de 9h45 à 12h45.

Les notes du cours ainsi que les notes personnelles sont autorisées.

Les deux exercices proposés sont indépendants.
En cas de besoin, il est permis de faire référence aux résultats démontrés dans les notes de cours.

1 Exercice sur l'intégrabilité

Dans le cours, nous avons étudié des modèles intégrables basés sur l'algèbre Temperley-Lieb $TL_N(n)$, dont la matrice R s'écrit :

$$\check{R}_m(u) = f(u)I + g(u)E_m \tag{1}$$

avec E_m le générateur TL agissant sur les brins m et $m+1$. Le poids d'une boucle vaut n. Nous avons notamment trouvé une solution trigonométrique $f(u) = \sin(\gamma - u)$, $g(u) = \sin(u)$, $n = 2\cos(\gamma)$. Le but de l'exercice est d'étudier des solutions polynomiales à une algèbre qui généralise $TL_N(n)$.

1.1

Montrer que pour une valeur de n adéquate qu'on déterminera, (1) avec $f(u) = 1 - u$ et $g(u) = u$ satisfait les relations de Yang-Baxter.

1.2

On généralise désormais $TL_N(n)$ à l'algèbre $B_N(n)$ qui contient, en plus des générateurs I et E_m, les opérateurs P_m qui permutent les brins m et $m+1$. Les boucles décrites par $B_N(n)$ peuvent donc s'intersecter. Le poids d'une boucle vaut toujours n.

Montrer graphiquement qu'on a les relations

$$P_m P_{m\pm1} P_m = P_{m\pm1} P_m P_{m\pm1} \qquad E_m P_m = P_m E_m = E_m\,. \tag{2}$$

On ne cherchera pas à déterminer l'ensemble de relations algébriques satisfaites dans $B_N(n)$.

1.3

On remplace désormais (1) par

$$\check{R}_m(u) = f(u)I + g(u)E_m + h(u)P_m\,, \tag{3}$$

où f, g et h sont des fonctions *polynomiales* de u à déterminer.

En utilisant la relation d'inversion, montrer que f/h est une fonction impaire.

1.4

On suppose de nouveau que $f(u) = 1 - u$ et $g(u) = u$. Montrer que

$$\frac{h(u) - h(-u)}{u} = 2 - n\,. \tag{4}$$

Déterminer ensuite $h(u)$ complétement.

1.5

Ecrire graphiquement la relation de Yang-Baxter projetée sur le mot $I \otimes E_2 \in B_3(n)$. Montrer que la solution trouvée pour $\check{R}(u)$ satisfait cette relation.

1.6

On cherche à relier le modèle (3) au modèle à six vertex.

Argumenter qu'une telle relation ne peut exister que pour $n = 2$.

1.7

Déterminer ensuite les poids $\omega_1, \ldots, \omega_6$ du modèle à six vertex correspondant, ainsi que le paramètre d'anisotropie Δ.

2 Exercice sur les théories conformes

Le but de l'exercice est de calculer une fonction à quatre points d'un champ holomorphe particulier.

2.1

Soit I l'opérateur identité et L_n les générateurs de l'algèbre de Virasoro. Montrer que $L_{-1}I = 0$ et que $L_{-2}I = T$, où $T(z)$ est le tenseur énergie-impulsion. Quelle est l'interprétation physique de L_{-1} ?

2.2

Soient z_1, z_2, z_3 trois points arbitraires dans le plan complexe. Déterminer explicitement une transformation conforme projective $w(z)$ avec les propriétés

$$w(z_1) = \infty\,, \qquad w(z_2) = 1\,, \qquad w(z_3) = 0\,. \tag{5}$$

2.3

Soit $\psi(z)$ un champ primaire holomorphe de poids conforme Δ. On suppose que le développement du produit d'opérateurs (OPE) de $\psi(z_1)\psi(z_2)$ ne produit que I et ses descendants. Nous avons donc l'OPE :

$$\psi(z_1)\psi(z_2) = \frac{C^I_{\psi\psi}}{(z_1 - z_2)^{a_1}} \left(I + \beta(z_1 - z_2)^{a_2}\, T(z_2) + \cdots\right)\,. \tag{6}$$

Expliciter les puissances a_1 et a_2 ainsi que la constante de structure $C^I_{\psi\psi}$. Le coefficient $\beta = \beta(c, \Delta)$ sera déterminé dans la suite.

2.4

On voudra étudier la fonction à quatre points

$$C(z) = \lim_{z_1 \to \infty} (z_1)^{a_3} \langle \psi(z_1)\psi(1)\psi(z)\psi(0)\rangle\,, \tag{7}$$

où l'on a utilisé le résultat de 2.2. Déterminer la puissance a_3 pour que $C(z)$ ait une limite finie lorsque $z \to \infty$.

2.5

En extrayant les singularités à $z \to 1$ et à $z \to 0$ on trouve

$$C(z) = \frac{f(z)}{(1 - z)^{a_4} z^{a_5}}\,, \tag{8}$$

où la fonction $f(z)$ sera déterminée par la suite. Expliciter a_4 et a_5. Quel type de fonction est $f(z)$?

2.6

Les 4 questions suivantes servent à déterminer le coefficient $\beta = \beta(c, \Delta)$.

Montrer d'abord que pour un produit d'opérateurs primaires $\Phi_1(z_1)$ et $\Phi_2(z_2)$, de poids conformes Δ_1 et Δ_2 respectivement, on a

$$L_n \left(\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\right) = \Big((n+1)(z_1 - z_2)^n \Delta_1 + (z_1 - z_2)^{n+1}\partial_{z_1}\Big) \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2) \,. \tag{9}$$

2.7

Dans le cas de (6), expliciter ce résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.

2.8

Au lieu de (9) on pourrait utiliser l'OPE (6) d'abord et agir avec L_n ensuite. Expliciter ce que cela donne pour $n = 1$ et $n = 2$.

2.9

En comparant les résultats des deux questions précédantes, fixer $\beta(c, \Delta)$.

2.10

On s'attaque maintenant à la détermination de $C(z)$.

Calculer le développement limité de $f(z)$ dans la limite $z \to 0$, à l'ordre $\mathcal{O}(z^2)$ compris. *Indication* : faire les OPE dans le bon ordre !

2.11

Supposons que $\Delta = \frac{1}{2}$. Déterminer $C(z)$ complétement et calculer la charge centrale c. *Indication* : confronter les résultats pour $f(z)$ dans les limites $z \to 0$ et $z \to \infty$. *Question facultative* : vérifier aussi la limite $z \to 1$.

2.12

Quel modèle statistique pourrait décrire la théorie conforme en question ? (Plusieurs arguments différents sont possibles.) Quel est l'interprétation physique de $\Psi(z)$?