UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention "Physique" de la Licence de Sciences et Technologies (L2)
(Année 2006/2007)

Contrôle continu de Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)

(13 novembre 2006 – durée : 1h30)

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants
2 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours
Des rappels sont donnés en fin de texte.

Barème (sur 24 points !) :

Exercice I	:	8
Exercice II	:	3
Exercice III	:	8
Exercice IV	:	5

Exercice I

Convergence d'intégrales

1. Soit l'intégrale :

$$I \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad . \tag{1}$$

   (a) Cette intégrale est-elle convergente (justifier la réponse) ? **[$1\frac{1}{2}$]**

   (b) Effectuer le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ dans l'intégrale (1), et comparer l'expression ainsi obtenue à la forme originale (1) **[$1\frac{1}{2}$]**

   (c) En déduire la valeur de I **[$\frac{1}{2}$]**

   (d) Soit l'intégrale :

$$I(a) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a>0) \quad . \tag{2}$$

   À l'aide d'un changement de variable simple, exprimer $I(a)$ en fonction de I, et en déduire la valeur de $I(a)$ **[$1\frac{1}{2}$]**

   Rép : (a) CV ; (b) $I = -I$; (c) $I = 0$; (d) $I(a) = \frac{\pi}{2}\frac{\ln a}{a}$

2. Précisez les propriétés de convergence des intégrales suivantes :

$$J \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x \;, \quad K \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ln(x-a)\,\mathrm{d}x \quad (a>0) \;, \quad L \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{Arctan}\,x\,\mathrm{d}x \quad . \tag{3}$$

[1+1+1]

Rép : J CV; K CV en a et à l'∞; L CV en 0, DV à l'∞.

Exercice II

Convergence de séries

Pour chacune des séries de terme général ci-dessous, établir si elle est convergente, absolument convergente ou divergente :

$$u_n \;=\; \frac{(-1)^n}{n^2+\tan\frac{n\pi}{3n+1}} \;, \qquad v_n \;=\; \frac{1}{n^2}\tanh n \;, \qquad w_n \;=\; \frac{\ln n}{n\,2^n} \;. \tag{1}$$

Rép : u_n Abst CV (ne pas invoquer AbeLeibniz !); v_n (Abst) CV ; w_n (Abst) CV. **[1+1+1]**

Exercice III

Équations différentielles

1. Quelle est la solution générale de l'équation :

$$f'''(x)-4f''(x)+f'(x) \;=\; 0 \;\; ? \tag{1}$$

Rép : $f = Ae^{\alpha_+ x}+Be^{\alpha_- x}+C$ **où** $\alpha_\pm = 2\pm\sqrt{3}$ **[$1\frac{1}{2}$]**

2. Soit l'équation différentielle :

$$f''(x)-2\cosh\phi\, f'(x)+f(x) \;=\; 0 \;\;, \tag{2}$$

où ϕ est une constante réelle.

(a) Écrire la solution générale de cette équation
Rép : $f = Ae^{e^{\phi}x}+Be^{e^{-\phi}x}$ **[$1\frac{1}{2}$]**

(b) Trouver la solution satisfaisant les conditions initiales $f(0)=0$, $f'(0)=2$
Rép : $f = \frac{e^{e^{\phi}x}-e^{e^{-\phi}x}}{\sinh\phi}$ **[1]**

(c) Par la limite appropriée, trouver la solution quand $\phi = 0$.
Rép : $\lim_{\phi\to 0}\frac{e^{e^{\phi}x}-e^{e^{-\phi}x}}{\sinh\phi} = 2xe^x$ **[1]**

3. Soit l'équation :

$$x^2f'(x)+xf(x) = x^4[f(x)]^3 \;\;, \tag{3}$$

avec la condition $f(1)=\frac{1}{2}$

(a) On pose $g(x)=\frac{1}{[f(x)]^2}$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par la fonction $g(x)$?
Rép : $x^2g'-2xg = -2x^4$ **[1]**

(b) On pose maintenant $g(x)=x^2h(x)$; trouver la fonction $h(x)$
Rép : $-\dfrac{1}{2}x^4h' = x^4$ donc $h=-2x+C$ **[1]**

(c) En déduire $f(x)$ et préciser son intervalle de définition.
Rép : $g(x)=x^2(-2x+C)$, $g(1)=C-2=4$ donc $C=6$, $f(x)=\left[(6-2x)x^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ dans l'intervalle $(6-2x)x^2\geq 0$ soit $x\leq 3$. **[1]**

Exercice IV

Mouvement d'une fusée

Une fusée est propulsée verticalement par un moteur fournissant une force de poussée *constante* P. La combustion du carburant se fait à taux constant, de sorte que la masse de la fusée $m(t)$ décroît linéairement en temps : $m(t) = m_0(1-\gamma t)$, entre $t = 0$ et $t = t_1 < \gamma^{-1}$. La force de freinage dans l'air, F, est supposée proportionnelle à la vitesse $v(t)$: $F = -\alpha v$ $(\alpha > 0)$. On posera $\mu = \frac{\alpha}{m_0\gamma}$, paramètre supposé inférieur à 1. Enfin, les variations d'altitude étant petites par rapport au rayon terrestre, on négligera les variations du champ de pesanteur, dont l'intensité est notée g.

1. Écrire l'équation de la dynamique de la fusée **[1]**

   Rép : Attention ! avec une masse variable, l'équation de la dynamique s'écrit $\frac{d}{dt}(m(t)v(t)) = \sum$ forces, donc ici $m_0(1-\gamma t)(\ddot{x}+g) + (\alpha - \gamma m_0)\dot{x} = P$ soit encore $m_0(1-\gamma t)\dot{v} + (\alpha-\gamma m_0)v = P - m_0(1-\gamma t)g$

2. Trouver $v_{\mathrm{h}}(t)$, solution générale de l'équation homogène (on désignera par C la constante d'intégration) **[1]**

   Rép : $v_h(t) = C(1-\gamma t)^{\mu-1}$, où $\mu = \alpha/m_0\gamma$

3. L'équation du mouvement a une solution particulière de la forme $v_{\mathrm{p}}(t) = At + B$; trouver les deux constantes A et B **[$\mathbf{1\frac{1}{2}}$]**

   Rép : $A = \frac{g}{\mu-2}$, $B = \frac{P}{\alpha} - \frac{g}{\gamma(\mu-2)}$

4. En déduire la vitesse de la fusée pour $0 \le t \le t_1$ sachant qu'elle était nulle à $t = 0$. **[$\mathbf{1\frac{1}{2}}$]**

   Rép : $C = \frac{g}{(\mu-2)\gamma} - \frac{P}{\alpha - m_0\gamma}$, $v = \frac{P}{\alpha-m_0\gamma}\left[1-(1-\gamma t)^{\mu-1}\right] - \frac{g}{(2-\mu)\gamma}\left[(1-\gamma t)^{\mu-1} - (1-\gamma t)\right]$

Rappels

$$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \ , \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \ , \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$