UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention "Physique" de la Licence de Sciences et Technologies (L2)

(Année 2007/2008)

Contrôle continu de Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)

(29 octobre 2007 – durée : 1h30)

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
2 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours
Les différents exercices sont indépendants

Barème approximatif :

Exercice I	:	20%
Exercice II	:	25%
Exercice III	:	20%
Exercice IV	:	35%

Exercice I *Convergence d'intégrales*

Étudier la convergence de chacune des intégrales suivantes en chacun des points singuliers et éventuellement à l'infini :

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}} dx$$

$$J = \int_1^\infty \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$K = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\tan(\pi x)} dx$$

Exercice II *Convergence de séries*

Pour chacune des séries de terme général ci-dessous, établir si elle est convergente, absolument convergente ou divergente :

$$u_n = \left(\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+1)}\right)^n \quad , \qquad v_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) \quad . \tag{1}$$

Exercice III *Refroidissement d'un corps*

La loi du *refroidissement* de Newton s'énonce ainsi: "La vitesse du refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et celle du milieu ambiant."

1. Écrire l'équation différentielle que satisfait la température $T(t)$ d'un tel corps si la température ambiante est constante et égale à T_a et la résoudre avec la condition initiale qu'au temps $t = 0$, $T(0)$ est fixée.

2. On suppose que la température de l'air ambiant est constante et égale à 25°C. Dans ces conditions, la température d'un corps donné, passe de 100 à 70 °C en 15 minutes. Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40 °C ?

Exercice IV *Croissance de plantes*

On repique des plants de 10cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de la plante est de 1m. On note $f(t)$ la taille, en mètres, d'un plant après t jours. (On a donc $f(t = 0) = 0.1$).

Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance du plant évolue suivant la relation :

$$f'(t) = a\, f(t)\, (1 - f(t)) \tag{1}$$

où a est une constante dépendant des conditions expérimentales.

1) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $z(t) = 1/f(t)$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par z puis la résoudre. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f(t) = \frac{1}{9e^{-at} + 1}\ . \tag{2}$$

2) On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer a à 10^{-2} près, en utilisant un développement limité du logarithme au premier ordre non trivial. On rappelle que $\ln 2 \approx 0,693$.

3) Étudier la limite de $f(t)$ quand $t \to +\infty$ et préciser son sens de variation.

4) Représenter graphiquement la fonction f.

5) Au bout de combien de jours la plante dépassera-t-elle 90cm de haut ? On donne $\ln 3 \approx 1,1$.