UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention "Physique" de la Licence de Sciences et Technologies (L2)

(Année 2007/2008)

Contrôle continu de Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)

(29 octobre 2007 – durée : 1h30)

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
2 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours
Les différents exercices sont indépendants

Barème approximatif :		
Exercice I	:	22%
Exercice II	:	22%
Exercice III	:	22%
Exercice IV	:	34%

Exercice I *Convergence d'intégrales*

Étudier la convergence de chacune des intégrales suivantes en chacun des points singuliers et éventuellement à l'infini :

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}dx$$

$$J = \int_1^\infty \left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$K = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\tan(\pi x)}dx$$

Rép. I div. à l'∞ **[1]**; J conv.à l'∞ comme $\int dx/x^2$ **[$1\frac{1}{2}$]** ; K conv. en 0 **[$\frac{3}{4}$]** et div. en 1 **[$1\frac{1}{4}$]**

Exercice II *Convergence de séries*

Pour chacune des séries de terme général ci-dessous, établir si elle est convergente, absolument convergente ou divergente :

$$u_n = \left(\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+1)}\right)^n \quad , \qquad v_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) \quad . \tag{1}$$

Rép. $u_n = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)^n \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\sum u_n$ conv. par comparaison avec série géom. conv., ou encore, critère de Cauchy, $u_n^{1/n} \to \frac{1}{2} < 1$. **[$1\frac{1}{2}$]**
$\frac{n}{n+1} < 1$, $\cos\frac{\sqrt{2}}{n} < 1$ et tous deux tendent vers 1 par valeurs inférieures, donc $\ln(\cdots) \to 0_-$ en décroissant en valeur absolue, on peut appliquer le lemme d'Abel à la série alternée, $\sum v_n$ est convergente. **[2]**
Par contre, l'argument du log $\sim 1 + O(1/n)$, donc $|v_n| \sim 1/n$ la série n'est pas abst conv. **[1]**

Exercice III *Refroidissement d'un corps*

La loi du *refroidissement* de Newton s'énonce ainsi: "La vitesse du refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et celle du milieu ambiant."

1. En appelant k le coefficient de proportionnalité de la loi de Newton, écrire l'équation différentielle que satisfait la température $T(t)$ d'un tel corps si la température ambiante est constante et égale à T_a. Résoudre cette équation avec la condition initiale qu'au temps $t = 0$, $T(0)$ est fixée.

Rép. Soit $\tau = T - T_\mathrm{a}$, l'équation différentielle est $\dot\tau = -k\tau$ (ou $\dot T = -k(T - T_\mathrm{a})$) $[\frac{3}{4}]$

Rép. dont la solution est $\tau(t) = \tau(0)e^{-kt}$ $[1\frac{3}{4}]$

2. On suppose que la température de l'air ambiant est constante et égale à 25°C. Dans ces conditions, la température d'un corps donné, passe de 100 à 70 °C en 15 minutes. Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40 °C ? (On simplifiera les expressions obtenues sans chercher à évaluer numériquement les logarithmes.)

Rép. On écrit $T(1) - T_\mathrm{a} = 70 - 25 = 45 = (100 - 25)e^{-15k}$ et $40 - 25 = 15 = (100 - 25)e^{-kt}$, soit $-15k = \ln\frac{45}{75}$ et $-tk = -\ln\frac{15}{75}$ et en éliminant k

$$\frac{t}{15} = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 3} \quad \text{soit} \quad t = 15\frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 3} \qquad [2]$$

Exercice IV *Croissance de plantes*

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de la plante est de 1 m. On note $f(t)$ la taille, en mètres, d'un plant après t jours. (On a donc $f(t = 0) = 0,1$).

Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance du plant évolue suivant la relation :

$$f'(t) = a\, f(t)\, (1 - f(t)) \tag{1}$$

où a est une constante dépendant des conditions expérimentales.

1) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $z(t) = 1/f(t)$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par z puis la résoudre. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f(t) = \frac{1}{9e^{-at} + 1}\ . \tag{2}$$

Rép. $f' = af(1 - f) \Leftrightarrow\ -\frac{z'}{z^2} = a\frac{z-1}{z^2}$ $[1]$
donc $z' = -a(1 - z)$ qui s'intègre en $\ln|z - 1| = -at + c$, $z = 1 + Ce^{-at}$. À $t = 0$, $z = 10$, donc $C = 9$, $z = 1 + 9e^{-at}$, $f = \frac{1}{1+9e^{-at}}$. $[1\frac{1}{2}]$

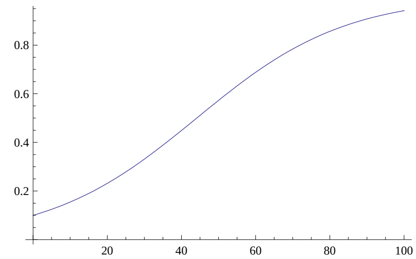
2) On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 0,19 m. Calculer a avec deux chiffres significatifs, en utilisant un développement limité du logarithme au premier ordre non trivial. On rappelle que $\ln 2 \approx 0,693$.

Rép. $f = \frac{19}{100} = \frac{1}{1+9e^{-15a}}$ donc $9 \times 19e^{-15a} = 100 - 19 = 81$, $e^{-15a} = \frac{9}{19}$, $15a = \ln\frac{19}{9} = \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{18})$ et $a \simeq \frac{\ln 2}{15} + \frac{1}{15\times 18} = \frac{0.69}{15} + \frac{1}{270} \approx 0.046 + 0.003 = 0.049$ jour^{-1}. $[1\frac{1}{2}]$

3) Préciser le sens de variation (croissance ou décroissance) de $f(t)$ et étudier sa limite quand $t \to +\infty$.

Rép. Quand $t \to \infty$, $f \to 1$. La fonction $1 + 9e^{-at}$ est décroissante, son inverse f est croissante, ou (meilleur argument) la dérivée de f, donnée par l'équation différentielle, est évidemment positive. $[1]$

4) Représenter graphiquement la fonction f.



Rép. Qualitativement, f part de 0.1, est croissante et tend vers 1. En outre la courbe a un point d'inflexion quand $f = \dfrac{1}{2}$ car en dérivant l'équa diff $f'' = af'(1-2f)$ qui s'annule et change de signe pour $f = \dfrac{1}{2}$. Voir figure ci-après. Notation **[1]** si courbe avec concavité vers le bas; **[$1\frac{1}{2}$]** si point d'inflexion OK.

5) Au bout de combien de jours la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut ? On donne $\ln 3 \approx 1,1$.

Rép. $f = \frac{9}{10} = \frac{1}{1+9e^{-at}}$, donc $at = 4\ln 3$, et $t = \frac{15\times 4\ln 3}{\ln 19/9} \approx 60\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 95$ jours (88 si on prend $a = \ln(19/9)/15$). **[1]**

.