Contrôle continu du 28 octobre 2009

Corrigé détaillé

Exercice 1- (3,5 points)

1.
$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, \quad S_{n-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 2\sqrt{n-1},$$

et donc
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right).$$

Or
$$\sqrt{n-1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1\right) = \sqrt{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\,n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$$

donc $u_n = O(1/n^{3/2})$ et la série $\sum u_n$ converge d'après Riemann ($3/2 > 1$).
On aurait aussi pu écrire

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\,\frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})}$$
$$= \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})^2} = -\frac{1}{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})^2} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

2. Calculons la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} u_k$. On trouve $u_1 + \sum_{k=2}^{n} [S_k - S_{k-1}] = S_n - S_1 + u_1 = S_n$.
Donc la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ qui converge quand $n \to \infty$, donc S_n converge aussi.

Exercice 2- (7,5 points)

1. Cette série, à termes positifs, converge **si et seulement si** (condition necessaire et sufisante) $\alpha > 1$. (elle diverge dès que $\alpha \leqslant 1$). Elle converge absolument (respectivement diverge absolument) dans les mêmes conditions.
2. Il s'agit d'une **série alternée**. On utilise le critère de Leibnitz : la série est convergente **si** (condition suffisante mais pas necessaire) la suite des valeurs absolues (soit ici $1/n^\alpha$) est **décroissante et de limite nulle** (deux conditions à vérifier), c.-à-d.si $\alpha > 0$. Elle ne converge absolument que si $\alpha > 1$, elle est **semi convergente** pour $0 < \alpha \leqslant 1$.
Pour $\alpha \leqslant 0$, $(-1)^{n+1}/n^\alpha$ ne tend même pas vers 0 : la série n'est donc pas convergente.
3. *a.* Attention, cette série n'est pas alternée.
Si $\alpha = 0$, u_n n'est pas définie pour n impair. Si $\alpha < 0$, u_n ne tend pas vers zero donc la série diverge. Pour faire un développement limité quand $n \to \infty$, on factorise au dénominateur ce qui est grand, soit ici n^α puisque $\alpha > 0$ (pour le numérateur $(-1)^{n+1}$ qui vaut alternativenment ± 1 on ne peut pas faire de développement limité ... et surtout pas écrire $(-1)^{n+1} = \exp{(n+1)}\ln(-1)$.)

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\,\frac{1}{1 + (-1)^n/n^\alpha} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} + v_n$$

avec $v_n = 1/n^{2\alpha} + o(1/n^{2\alpha})$.

On pouvait aussi calculer directement

$$v_n = u_n - \frac{(-1)^{n+1)}}{n^\alpha} = \frac{(-1)^{n+1}[n^\alpha - (n^\alpha + (-1)^n)]}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)} = \frac{1}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)} = 1/n^{2\alpha} + o(1/n^{2\alpha})$$

b. $\sum v_n$, série à termes positifs, est convergente si et seulement si $\alpha > 1/2$. Mais comme $\sum(-1)^{n+1}/n^\alpha$ est convergente ssi $\alpha > 0$, $\sum u_n$ est convergente si $\alpha > 1/2$, divergente si $\alpha \in]0, 1/2]$. On a vu que si $\alpha = 0$, u_n n'est pas définie pour n impair et que si $\alpha < 0$, u_n tend vers -1, donc $\sum u_n$ diverge.

Exercice 3 - (7 points)

1. L'énoncé limite le domaine de variation à $[0, +\infty[$ mais f n'est définie que pour $e^{a\,x} \neq 1$, c.-à-d.pour $x \neq 0$. Son domaine de définition est donc $]0, +\infty[$.
 x^3 et $e^{a\,x} - 1$ sont des fonctions continues sur $]0, +\infty[$, donc leur quotient aussi puisque $e^{a\,x} - 1 \neq 0$.
 Au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + a\,x + a^2\,x^2/2 + o(x^2) - 1} = \frac{x^3}{a\,x + a^2\,x^2/2 + o(x^2)}$$

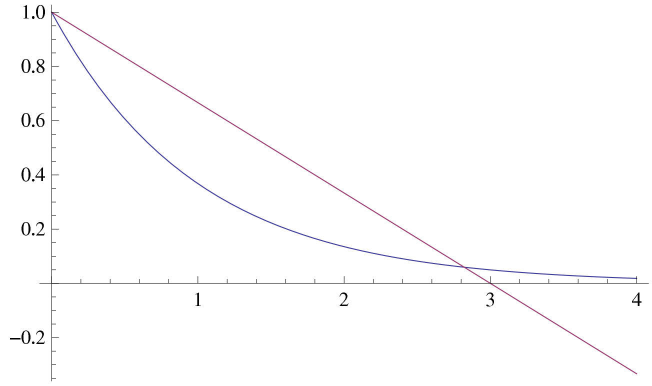
 On factorise le terme dominant ax au dénominateur (ET PAS $a^2\,x^2/2$ qui est plus petit ...). On obtient donc :

$$f(x)\frac{x^2/a}{1 + a\,x/2 + o(x)} = \frac{x^2}{a}\cdot(1 - \frac{a\,x}{2} + o(x)) = \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

 On a donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2\,x/a - 3\,x^2/2 + o(x^2)) = 0$ (le développement de f à l'ordre 2 aurait suffi). Quand x tend vers 0, la courbe tend vers l'origine et sa tangente vers l'horizontale (on a une allure parabolique à l'origine).
2. Dans le résultat du calcul de la dérivée, on **factorise bien sur un terme** x^2 et on regroupe les termes en exponentielle puisqu'on aura besoin de chercher les zeros de la dérivée.

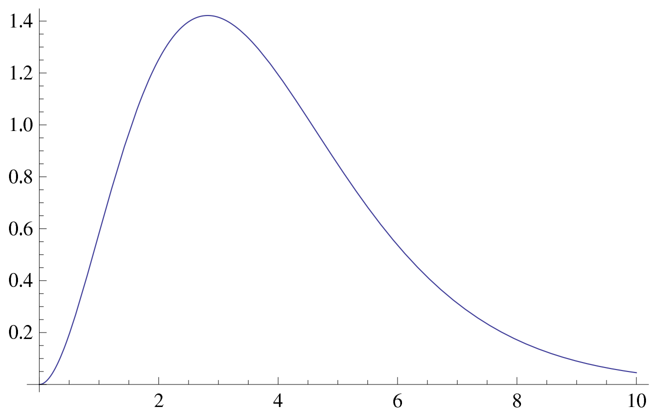
$$f'(x) = \frac{3\,x^2}{(e^{a\,x} - 1)^2}\cdot\left(e^{a\,x}\cdot\left(1 - \frac{a\,x}{3}\right) - 1\right).$$

 Les extrémums éventuels **pour x > 0** obéissent donc à l'équation $e^{a\,x}\cdot\left(1 - \frac{a\,x}{3}\right) = 0$ où encore plus simplement $e^{-a\,x} = 1 - a\,x/3$.
3. On va tracer les deux courbes $e^{-a\,x}$ et $1 - a\,x/3$ et chercher leur point d'intersection. Elles partent toutes les deux du point $x = 0$, $y = 1$. Pour tracer les graphes, il nous faut comparer leurs tangentes. La dérivée de $e^{-a\,x}$ vaut $-a$ en 0, tandis que celle de $1 - a\,x/3$ vaut $-a/3$: $e^{-a\,x}$ décroit donc plus rapidement que $1 - a\,x/3$ au voisinage de 0. En revanche, $\forall\, x$, $e^{-a\,x} > 0$, tandis que $1 - a\,x/3 \geqslant 0$ pour $x \leqslant 3/a$ et est < 0 pour $x > 3/a$. Les courbes de $e^{-a\,x}$ et de $1 - a\,x/3$ se recoupent donc en un point $x_{\mathrm{m}} \in]0, 3/a[$.



Courbes de $e^{-a\,x}$ et de $1 - a\,x/3$ en fonction de x pour $a = 1$.

4. Grâce à l'étude graphique précédente, $f'(x) \geqslant 0$ sur $]0, x_{\mathrm{m}}]$, donc f est croissante sur cet intervalle. Elle décroit ensuite et tend exponentiellement vers 0 en $+\infty$ (croissance comparée).



Courbe de $f(x)$ en fonction de x pour $a = 1$.

Exercice 4 - (7 points + 6 points hors barème)

1. *a.*

$$x = 2\arctan u, \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad I_n = \int_{u=0}^{1} \frac{2\,u}{1+u^2} \cdot \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^n \mathrm{d}u.$$

ne pas oublier de faire le changement de variable dans les bornes aussi !

b.

$$I_0 = \int_{u=0}^{1} \frac{2\,u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\ln(1+u^2)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

2. *a.* Pour obtenir une relation entre I_n et I_{n-1} il faut diminuer la puissance du dénominateur en $(1+u^2)^{n+1}$ et donc **intégrer** ce terme. On utilise à cette fin le facteur $2\,u$ présent au numérateur, qui correspond à la dérivée de $(1+u^2)$. Posons donc

$$f' = \frac{2\,u}{(1+u^2)^{n+1}} \quad \text{et} \quad g = \left(1-u^2\right)^n.$$

On a

$$f = \frac{-1}{n\cdot(1+u^2)^n} \quad \text{et} \quad g' = -2\,n\,u\cdot\left(1-u^2\right)^{n-1},$$

donc

$$I_n = \left[\frac{-1}{n}\,\frac{\left(1-u^2\right)^n}{(1+u^2)^n}\right]_0^1 - \int_{u=0}^{1} \frac{2\,u\cdot\left(1-u^2\right)^{n-1}}{(1+u^2)^n} = \frac{1}{n} - I_{n-1}.$$

b. La relation de récurrence étant donnée il suffit de la vérifier :

Par la question précédente (2.a.) on a $I_1 = 1 - I_0$ et par (1.b.) on obtient $I_1 = 1 - \ln 2$, donc l'expression est vérifiée à l'ordre 1. Supposons qu'elle le soit à l'ordre $n-1$, c.-à-d.que

$$I_{n-1} = (-1)^{n-1}\cdot\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

Comme $I_n = 1/n - I_{n-1}$, on a

$$I_n = \frac{1}{n} - (-1)^{n-1}\cdot\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = (-1)^n\cdot\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$

donc l'expression est vérifiée à l'ordre n, et, par récurrence, pour tout entier.

3. **Question hors-barème. (6 points)**

a.

$$\forall\, x \in [0,1],\ g_n(x) = \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n, \quad \text{donc} \quad A_n \leqslant \int_0^{c_n} x^n\,\mathrm{d}x = \frac{c_n^{n+1}}{n+1} = M_n.$$

b. On calcule

$$
\begin{aligned}
(c_n)^{n+1} &= \exp\left((n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{3/4}}\right)\right) = \exp\left((n+1)\cdot\left(-\frac{1}{(n+1)^{3/4}} + O\left(\frac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-(n+1)^{1/4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) \simeq \exp\left(-(n+1)^{1/4}\right)
\end{aligned}
$$

On a donc

$$M_n \simeq \frac{\exp\left(-n^{1/4}\right)}{n}.$$

c. De façon évidente

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+c_n},$$

donc

$$\frac{1}{2}\int_{x=c_n}^{1} x^n \, \mathrm{d}x \leqslant B_n \leqslant \frac{1}{1+c_n}\int_{x=c_n}^{1} x^n \, \mathrm{d}x,$$

d'où

$$\frac{1}{2\cdot(n+1)}\cdot\left(1 - c_n^{n+1}\right) \leqslant B_n \leqslant \frac{1}{(1+c_n)\cdot(n+1)}\cdot\left(1 - c_n^{n+1}\right).$$

d'où

$$\frac{2\,n}{2\cdot(n+1)}\cdot\left(1 - c_n^{n+1}\right) \leqslant (2\,n\,B_n) \leqslant \frac{2\,n}{(1+c_n)\cdot(n+1)}\cdot\left(1 - c_n^{n+1}\right).$$

Or $c_n \to 1$ et $c_n^{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$, donc par le théorème des gendarmes

$$2\,n\,B_n \to 1 \Leftrightarrow B_n \simeq \frac{1}{2\,n}.$$

Par ailleurs, $I_n = A_n + B_n$, avec $0 \leqslant A_n \leqslant M_n$ et $M_n = o(B_n)$ (à cause de l'exponentielle dans M_n, $A_n \ll B_n$), donc

$$I_n \simeq B_n \simeq \frac{1}{2\,n}.$$