UNIVERSITE
PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention "Physique" de la
Licence de Sciences et Technologies
(L2)
(Année 2006/2007)

Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)
(17 janvier 2007 – durée : 2h)

Barème approximatif :		
Exercice I	:	13 pts
Exercice II	:	7 pts

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants
2 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours

Exercice I

Système non linéaire

1. On considère la fonction
$$f(u) = u(1-u^2)^2 \tag{1}$$
pour des valeurs de $u \geq 0$.
   (a) Quel est le développement limité de $f(u)$ au 3ème ordre (terme en u^3 inclus) au voisinage de $u = 0$?
   (b) Quel est le développement limité de $f(u)$ au 2ème ordre au voisinage de $u = 1$?
   (c) Quel est le comportement de $f(u)$ pour $u \to \infty$?
   (d) En utilisant les informations précédentes, dessiner sommairement le graphe de $f(u)$, $u \geq 0$.

2. On considère maintenant le système dynamique décrit par la paire d'équations
$$\dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2)^2 \tag{2}$$
$$\dot{y} = x + y(1-x^2-y^2)^2 \,. \tag{3}$$
   (a) En combinant les deux équations avec des facteurs 1 et i montrer qu'on obtient une équation différentielle simple pour $z = x + iy$.
   (b) Passant alors en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$ et supposant $r \neq 0$, montrer qu'on a une paire d'équations
$$\dot{r} = f(r) \tag{4}$$
$$\dot{\theta} = \cdots \tag{5}$$
   où f est la fonction de l'équation (1) et où on complétera l'équation en θ.
   (c) Que signifie cette équation en θ ?
   (d) Quelles sont les solutions statiques de l'équation en r ?
   (e) En utilisant le graphe dessiné en 1(d), discuter la stabilité de ces solutions stationnaires.
   (f) Étudier la linéarisation de l'équation en r au voisinage de chacune de ces solutions stationnaires. Montrer que cette linéarisation rencontre une difficulté au voisinage de la solution stationnaire non triviale. Comment cette difficulté est-elle reliée à la discussion de la question précédente 2(e) ?
   (g) Qu'arrive-t-il au point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ dans la limite $t \to \infty$ si au temps $t = 0$, le point $M(0)$ est à l'intérieur du cercle unité ? à l'extérieur ?

3. On se propose maintenant de résoudre exactement l'équation différentielle (4).

    (a) Montrer qu'elle est à variables séparées et qu'un changement de variable $v = r^2$ réduit sa résolution à l'intégration d'une fraction rationnelle simple.

    (b) En utilisant l'identité

    $$\frac{1}{v(1-v)^2} = \frac{1}{v} + \frac{1}{(1-v)^2} + \frac{1}{1-v} \tag{6}$$

    et en observant que $r^2(t) - 1$ ne change pas de signe au cours du temps, terminer l'intégration de l'équation différentielle en obtenant une relation entre $r^2(t)$, $r^2(0)$ et t.

    (c) Montrer que pour $r(0) < 1$, le comportement de $r(t)$ quand $t \to \infty$ est compatible avec celui trouvé à la question 2(g).

Exercice II

Série de Fourier

On considère une fonction g, paire, périodique de période 2π, et définie entre 0 et π par

$$g(x) = \pi \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

$$= 2(\pi - x) \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\ . \tag{8}$$

1. En tracer sommairement le graphe pour $-\pi \leq x \leq \pi$.
2. On se propose de calculer le développement de Fourier de cette fonction (voir rappels ci-dessous). Que peut-on dire *a priori* des coefficients a_n et b_n et de leur comportement asymptotique ?
3. Calculer alors les coefficients du développement de Fourier.
4. La série de Fourier converge-t-elle pour toute valeur de x ?
5. Si oui, converge-t-elle vers la fonction $g(x)$?

Rappel sur les séries de Fourier.

Si $G(t)$ est une fonction périodique de période T, sa série de Fourier s'écrit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

dont les coefficients s'obtiennent par

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T G(t) \cos \frac{2\pi n t}{T}\, dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T G(t) \sin \frac{2\pi n t}{T}\, dt\ .$$