UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention "Physique" de la Licence de Sciences et Technologies (L2)

(Année 2006/2007)

Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)

Corrigé et barème

(17 janvier 2007 – durée : 2h)

Barème :		
Exercice I	:	13.5 pts
Exercice II	:	7 pts

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants

2 pages imprimées

Par défaut, les notations sont celles du cours

Exercice I

Système non linéaire

1. On considère la fonction
$$f(u) = u(1-u^2)^2 \tag{1}$$
pour des valeurs de $u \geq 0$.
   (a) Quel est le développement limité de $f(u)$ au 3ème ordre (terme en u^3 inclus) au voisinage de $u = 0$?
   $f(u) = u(1-2u^2) + \cdots$ **[0.5]**
   (b) Quel est le développement limité de $f(u)$ au 2ème ordre au voisinage de $u = 1$?
   $f(u) = 4(u-1)^2 + \cdots$ **[0.5]**
   (c) Quel est le comportement de $f(u)$ pour $u \to \infty$?
   $f(u) \sim u^5$ **[0.5]**
   (d) En utilisant les informations précédentes, dessiner sommairement le graphe de $f(u)$, $u \geq 0$. **[1]**

2. On considère maintenant le système dynamique décrit par la paire d'équations
$$\dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2)^2 \tag{2}$$
$$\dot{y} = x + y(1-x^2-y^2)^2 \ . \tag{3}$$
   (a) En combinant les deux équations avec des facteurs 1 et i montrer qu'on obtient une équation différentielle simple pour $z = x + iy$.
   $\dot{z} = iz + z(1-|z|^2)^2$ **[0.5]**
   (b) Passant alors en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$ et supposant $r \neq 0$, montrer qu'on a une paire d'équations
$$\dot{r} = f(r) \tag{4}$$
$$\dot{\theta} = \cdots \tag{5}$$
   où f est la fonction de l'équation (1) et où on complétera l'équation en θ.
   $(\dot{r} + ir\dot{\theta}) = ir + r(1-r^2)^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = f(r) \quad , \quad r\dot{\theta} = r \quad \Rightarrow$ si $r \neq 0$, $\dot{\theta} = 1$ **[1]**
   (c) Que signifie cette équation en θ ?
   $\dot{\theta} = 1$, rotation à vitesse angulaire constante =1, dans le sens (trigonométrique) positif **[1]**
   (d) Quelles sont les solutions statiques de l'équation en r ?
   solutions statiques = zéros de $f(r)$: $r_s = 0$ et $r_s = 1$ **[1]**

(e) En utilisant le graphe dessiné en 1(d), discuter la stabilité de ces solutions stationnaires.

dessiner le diagramme de flot, d'où : $r_s = 0$ instable (répulsive) ; $r_s = 1$ attractive du côté $r < 1$, répulsive du côté $r > 1$. **[1]**

(f) Étudier la linéarisation de l'équation en r au voisinage de chacune de ces solutions stationnaires. Montrer que cette linéarisation rencontre une difficulté au voisinage de la solution stationnaire non triviale. Comment cette difficulté est-elle reliée à la discussion de la question précédente 2(e) ?

Linéarisation au voisinage de $r_s = 0$: $\dot{r} = r$, donc $r_s = 0$ instable ; mais au voisinage de $r_s = 1$, $r = 1 + \hat{r}$, $\dot{\hat{r}} = 0$, l'équation linéarisée est insuffisante, il faudrait développer à l'ordre suivant. Ceci est lié au comportement en $(r-1)^2$ de $f(r)$ en ce point et est compatible avec le caractère attractif/répulsif de $r_s = 1$ selon la direction d'approche. **[1.5]**

(g) Qu'arrive-t-il au point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ dans la limite $t \to \infty$ si au temps $t = 0$, le point $M(0)$ est à l'intérieur du cercle unité ? à l'extérieur ?

Selon la discussion précédente, si $r(0) < 1$, $r(t) \to r_s = 1$, le point attractif ; si $r(0) > 1$, $r(t) \to \infty$, car $r_s = 1$ est répulsif. On le lit aussi sur le graphe de $f(r)$ et le diagramme de flot. **[1]**

3. On se propose maintenant de résoudre exactement l'équation différentielle (4).

(a) Montrer qu'elle est à variables séparées et qu'un changement de variable $v = r^2$ réduit sa résolution à l'intégration d'une fraction rationnelle simple.

$\frac{dr}{r(1-r^2)^2} = dt$ à variables séparées et le changement de variable $v = r^2$ permet d'écrire **[1]**

$$\int dt = \int \frac{dr}{r(1-r^2)^2} = \int \frac{rdr}{r^2(1-r^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v(1-v)^2} \ .$$

(b) En utilisant l'identité

$$\frac{1}{v(1-v)^2} = \frac{1}{v} + \frac{1}{(1-v)^2} + \frac{1}{1-v} \tag{6}$$

et en observant que $r^2(t) - 1$ ne change pas de signe au cours du temps, terminer l'intégration de l'équation différentielle en obtenant une relation entre $r^2(t)$, $r^2(0)$ et t.

$$\begin{aligned}
\int dt &= \int \frac{dr}{r(1-r^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v(1-v)^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)} \\
&= \frac{1}{2}\ln \frac{v}{|1-v|} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-v}
\end{aligned}$$

et comme $(1 - r^2(t))$ ne change pas de signe, on peut écrire

$$\frac{1}{2}\ln \frac{r^2(t)}{1-r^2(t)} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-r^2(t)} = t + C \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{r^2(t)}{1-r^2(t)} e^{1/(1-r^2(t))} = C' e^{2t}$$

où C, C' sont les valeurs du membre de gauche pour $t = 0$. **[2]**

(c) Montrer que pour $r^2(0) < 1$, le comportement de $r^2(t)$ quand $t \to \infty$ est compatible avec celui trouvé à la question 2(g).

Selon le résultat de la question 2(g), si $r(0) < 1$, quand $t \to \infty$, $1 - r(t)^2 \to 0_+$ et ceci est compatible avec l'équation précédente puisque le membre de gauche et celui de droite tendent bien vers $+\infty$. **[1]**

Exercice II

Série de Fourier

On considère une fonction g, paire, périodique de période 2π, et définie entre 0 et π par

$$\begin{aligned} g(x) &= \pi && \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} && (7)\\ &= 2(\pi - x) && \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi\ . && (8) \end{aligned}$$

1. En tracer sommairement le graphe pour $-\pi \le x \le \pi$.

   Graphe sur une période = pyramide tronquée (ou trapèze) **[1]**

2. On se propose de calculer le développement de Fourier de cette fonction (voir rappels ci-dessous). Que peut-on dire *a priori* des coefficients a_n et b_n et de leur comportement asymptotique ?

   La fonction est paire, donc $b_n \equiv 0$, elle est continue mais pas dérivable (points anguleux...), donc $a_n \sim 1/n^2$ pour n grand. **[1]**

3. Calculer alors les coefficients du développement de Fourier.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \pi\cos nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 2(\pi - x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{2}{n}\left[\sin nx\right]_0^{\pi/2} + \frac{4}{n}\left[\sin nx\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos nx\,dx \qquad \text{si } n \neq 0, \text{ (puis intégration par parties)} \\ &= -\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx \\ &= -\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{4}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$
[2]

   (ou encore $a_{4p} = 0$, $a_{4p+2} = -\frac{2}{(2p+1)^2}$, $a_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$),

   et **attention !** il faut calculer à part a_0

   $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{3\pi}{2}$ (= aire du trapèze) . **[1]**

4. La série de Fourier converge-t-elle pour toute valeur de x ?

   La série est absolument convergente pour tout x (coefficient en $1/n^2$). **[1]**

5. Si oui, converge-t-elle vers la fonction $g(x)$?

   La fonction f est continue, sa série de Fourier converge en tout point vers elle. **[1]**

Rappel sur les séries de Fourier.

Si $G(t)$ est une fonction périodique de période T, sa série de Fourier s'écrit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

dont les coefficients s'obtiennent par

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T G(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T G(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt\ .$$