UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention "Physique" de la Licence de Sciences et Technologies (L2)
(Année 2006/2007)

Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)
(7 février 2007 – durée : 2h)

Barème approximatif :

Exercice I	:	3 pts
Exercice II	:	6 pts
Exercice III	:	11 pts

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants
2 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours

Exercice I

Convergence d'une intégrale

En justifiant la réponse, préciser la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x \ , \qquad (1)$$

Exercice II

Série d'exponentielles

1. Soit la série géométrique $1 + v + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} v^n$, où v est un nombre complexe de module strictement inférieur à 1.
   (a) On considère d'abord la somme partielle $s_N = 1 + v + \cdots + v^N$. Montrer que dans la différence $s_N - vs_N$, presque tous les termes se compensent et que $s_N - vs_N = 1 - v^{N+1}$. En déduire l'expression de s_N.
   (b) La suite s_N a-t-elle une limite quand $N \to \infty$? Pourquoi ? Que peut-on en conclure sur la convergence de la série s et sur sa somme ?

2. En utilisant le résultat de la question 1, calculer la somme $S(t)$:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \ , \qquad r \in \mathbb{R}, \quad r \in]-1, 1[\qquad (2)$$

3. En égalant les parties réelles de l'expression (2) et de sa somme, déterminer la série de Fourier de

$$F(t) = \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} \ .$$

4. Un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et d'amortissement négligeable est soumis à la force $F(t)$. Il satisfait donc l'équation

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \ . \qquad (3)$$

(a) Donner une solution particulière de cette équation sous forme d'un développement en série de Fourier.

(b) Montrer que quand $\omega_0 \to 3$, un terme de ce développement diverge. Lequel ? Quel est le phénomène en jeu ?

Exercice III

Bifurcation

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur un cercle fixe de rayon a placé dans un plan vertical. Ce point est soumis d'une part à son poids, de l'autre à la force de rappel d'un ressort de raideur k fixé au point A le plus haut sur le cercle (voir Figure 1a). La longueur au repos du ressort est ℓ, supposée plus petite que le diamètre $2a$ du cercle.

On rappelle sur la Figure 1b quelques propriétés géométriques simples : si l'angle $\widehat{BOM} = \theta$, alors l'angle $\widehat{BAM} = \theta/2$, et $\widehat{BMA}$ est un angle droit. On rappelle aussi les identités trigonométriques

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \ .$$

1. (a) Calculer la longueur du ressort AM en fonction de a et de θ ; en déduire le module de la force de rappel s'exerçant sur M.

   (b) Quelle est la composante sur un axe Mx orthogonal à OM de la somme des forces appliquées à M ?

   (c) En déduire que le principe fondamental de la dynamique s'exprime par l'équation suivante pour θ :

$$ma\ddot{\theta} = k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell\right)\sin\frac{\theta}{2} - mg\sin\theta \ . \tag{4}$$

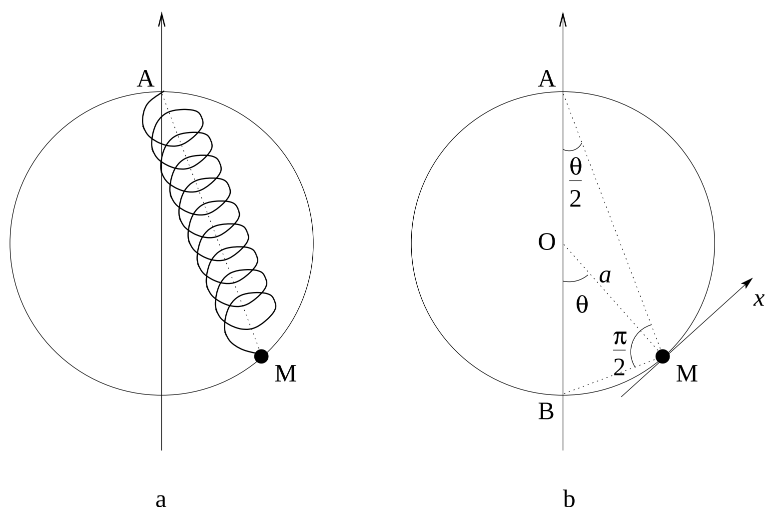

Figure 1: Le point matériel M sur son cercle.

2. On supposera dans la suite que $k > mg/a$. Quelle est l'équation en $\frac{\theta}{2}$ satisfaite par les solutions stationnaires (indépendantes du temps) de l'équation (4) ?

   Montrer que cette équation admet une ou plusieurs solutions selon la valeur de k, et donner les valeurs $\theta_{\rm s}$ correspondantes.

3. Écrire le développement limité au premier ordre inclus du membre de droite de (4) autour d'une valeur quelconque θ_0.

4. En déduire la linéarisation de l'équation (4) autour de ses solutions stationnaires $\theta_{\rm s}$ et discuter la stabilité de chacune d'entre elles.

5. En utilisant cette équation linéarisée, donner la pulsation des oscillations au voisinage de chacune des solutions stables.

6. Tracer le schéma (ou diagramme) de bifurcation donnant la solution stable en fonction de k.