UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention "Physique" de la
Licence de Sciences et Technologies
(L2)
(Année 2006/2007)

Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)

Corrigé et barème
(7 février 2007 – durée : 2h)

Barème approximatif :	
Exercice I :	3 pts
Exercice II :	6 pts
Exercice III :	12 pts

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants
2 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours

Exercice I
Convergence d'une intégrale

En justifiant la réponse, préciser la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x \quad , \tag{1}$$

Il y a convergence en 0, divergence à l'infini. **[1.5+1.5]**

Exercice II
Série d'exponentielles

1. Soit la série géométrique $1 + v + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} v^n$, où v est un nombre complexe de module strictement inférieur à 1.

   (a) On considère d'abord la somme partielle $s_N = 1 + v + \cdots + v^N$. Montrer que dans la différence $s_N - vs_N$, presque tous les termes se compensent et que $s_N - vs_N = 1 - v^{N+1}$. En déduire l'expression de s_N.
   $s_N = 1 + v + \cdots + v^N$, $vs_N = v + \cdots + v^N + v^{N+1}$, donc $s_N - vs_N = (1-v)s_N = 1 - v^{N+1}$, $s_N = \frac{1-v^{N+1}}{1-v}$. **[1]**

   (b) La suite s_N a-t-elle une limite quand $N \to \infty$? Pourquoi ? Que peut-on en conclure sur la convergence de la série s et sur sa somme ?

   $|v| < 1 \Rightarrow v^{N+1} \to 0$ quand $N \to \infty$. Donc $s_N \to \frac{1}{1-v}$. La série $\sum v^n$ converge absolument pour $|v| < 1$ puisque la somme partielle a une limite et sa somme est $s = \frac{1}{1-v}$. **[1]**

2. En utilisant le résultat de la question 1, calculer la somme $S(t)$:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad , \qquad r \in \mathbb{R}, \quad r \in]-1, 1[\tag{2}$$

   $S(t) = \frac{1}{1-re^{it}} = \frac{1-r\cos t}{|1-re^{it}|^2}$ **[1]**

3. En égalant les parties réelles de l'expression (2) et de sa somme, déterminer la série de Fourier de

$$F(t) = \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} \ .$$

$\Re e\big(S(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nt = \frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t+r^2} = F(t)$: le n-ième coefficient de Fourier de $F(t)$ vaut r^n. **[1]**

4. Un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et d'amortissement négligeable est soumis à la force $F(t)$. Il satisfait donc l'équation

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \ . \tag{3}$$

   (a) Donner une solution particulière de cette équation sous forme d'un développement en série de Fourier.
   $x(t) = \sum x_n \cos nt$ avec $(\omega_0^2 - n^2)x_n = r^n$. **[1]**

   (b) Montrer que quand $\omega_0 \to 3$, un terme de ce développement diverge. Lequel ? Quel est le phénomène en jeu ?
   Quand $\omega_0 \to 3$, x_3 diverge : c'est le phénomène de résonance, ici non amorti. **[1]**

Exercice III

Bifurcation

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur un cercle fixe de rayon a placé dans un plan vertical. Ce point est soumis d'une part à son poids, de l'autre à la force de rappel d'un ressort de raideur k fixé au point A le plus haut sur le cercle (voir Figure 1a). La longueur au repos du ressort est ℓ, supposée plus petite que le diamètre $2a$ du cercle.

On rappelle sur la Figure 1b quelques propriétés géométriques simples : si l'angle $\widehat{BOM} = \theta$, alors l'angle $\widehat{BAM} = \theta/2$, et $\widehat{BMA}$ est un angle droit. On rappelle aussi les identités trigonométriques

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \ .$$

1. (a) Calculer la longueur du ressort AM en fonction de a et de θ ; en déduire le module de la force de rappel s'exerçant sur M.
   Le triangle AOM est isocèle, donc longueur du ressort $= AM = 2a\cos(\theta/2)$; force de rappel le long de AM : $k(2a\cos(\theta/2) - \ell)$. **[1]**

   (b) Quelle est la composante sur un axe Mx orthogonal à OM de la somme des forces appliquées à M ?
   $k(2a\cos\theta/2 - \ell)\sin(\theta/2) - mg\sin\theta$ **[1]**

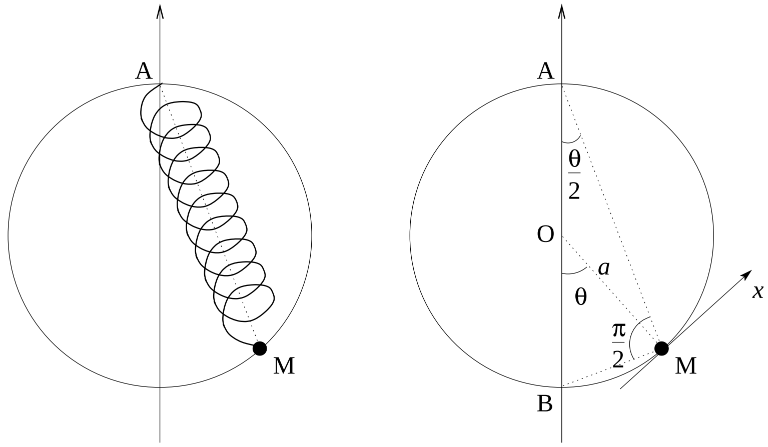
   (c) En déduire que le principe fondamental de la dynamique s'exprime par l'équation suivante pour θ :

$$ma\ddot{\theta} = k\Big(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell\Big)\sin\frac{\theta}{2} - mg\sin\theta \ . \tag{4}$$

[0.5]

2. On supposera dans la suite que $k > mg/a$. Quelle est l'équation en $\frac{\theta}{2}$ satisfaite par les solutions stationnaires (indépendantes du temps) de l'équation (4) ?
   $k(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell)\sin\frac{\theta}{2} - 2mg\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0$ soit $\sin\frac{\theta}{2}\big(2(ak - mg)\cos\frac{\theta}{2} - k\ell\big) = 0$ **[1]**
   Montrer que cette équation admet une ou plusieurs solutions selon la valeur de k, et donner les valeurs $\theta_{\rm s}$ correspondantes.
   $\theta_s/2 = 0$, donc $\theta_s = 0$, est toujours solution. L'autre solution $\frac{1}{2}\theta_s = \text{Arccos}\frac{k\ell}{2(ak-mg)}$ existe ssi $k\ell \leq 2(ak - mg)$, soit $k > 2mg/(2a - \ell)$ **[0.5+1]**

3. Écrire le développement limité au premier ordre inclus du membre de droite de (4) autour d'une valeur quelconque θ_0.
   $(ka - mg)\sin\theta - k\ell\sin\frac{\theta}{2} = (ka - mg)\sin\theta_0 - k\ell\sin\frac{\theta}{2}_0 + \Big((ka - mg)\cos\theta_0 - \frac{1}{2}k\ell\cos\frac{\theta_0}{2}\Big)(\theta - \theta_0) + \cdots$ **[1]**



a b

Figure 1: Le point matériel M sur son cercle.

4. En déduire la linéarisation de l'équation (4) autour de ses solutions stationnaires θ_s et discuter la stabilité de chacune d'entre elles.
   Si on pose $\theta = \theta_s + \alpha$, l'équation linéarisée est $ma\ddot{\alpha} = \left[(ka - mg)\cos\theta_s - \frac{1}{2}k\ell\cos\frac{\theta_s}{2}\right]\alpha$. **[1]**
   Il y a stabilité de la solution θ_s triviale $\theta_s = 0$ si $[\cdots] = (ka - mg) - \frac{1}{2}k\ell < 0$ c'est-à-dire si $k < \frac{2mg}{2a-\ell}$; **[1]**
   Il y a stabilité de la solution θ_s non triviale ssi $[\cdots] < 0$, soit en reportant $\cos\frac{\theta_s}{2} = \frac{k\ell}{2(ak-mg)}$ et en utilisant la deuxième identité trigonométrique ci-dessus, $(ka - mg)\left(\frac{k^2\ell^2}{2(ka-mg)^2} - 1\right) - \frac{1}{2}\frac{k^2\ell^2}{2(ak-mg)} = \frac{k^2\ell^2}{4(ka-mg)} - (ka - mg)$ qui est < 0 ssi $k\ell < 2(ka - mg)$ soit $k > \frac{2mg}{2a-\ell}$. **[1]**

5. En utilisant cette équation linéarisée, donner la pulsation des oscillations au voisinage de chacune des solutions stables.
   Le carré de la pulsation au voisinage d'une solution θ_s est donné par $\omega^2 = -\frac{1}{ma}[\cdots]$, donc pour la solution $\theta_s = 0$, $\omega_0^2 = -\frac{k(a-\frac{1}{2}\ell)-mg}{ma}$ et pour la solution non triviale $\omega_s^2 = \frac{1}{ma}\left((ka - mg) - \frac{k^2\ell^2}{4(ak-mg)}\right)$. **[1+1]**

6. Tracer le schéma (ou diagramme) de bifurcation donnant la solution stable en fonction de k.

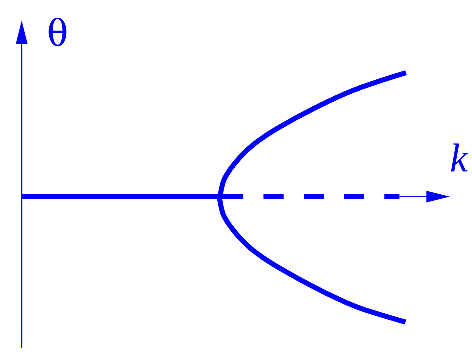


Figure 2: Bifurcation de la solution triviale vers la non triviale.

[1]