UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention “Physique” de la
Licence de Sciences et Technologies
(L2)
(Année 2007/2008)

Examen de Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)
(21 décembre 2007 – durée : 2h)

Barème approximatif :	
Exercice I	25%
Exercice II	35%
Exercice III	55%

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
2 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours
Les exercices sont indépendants

Exercice I
Équation de Bernoulli

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$-f'(x) + f(x) + [f(x)]^m = 0 \ , \tag{1}$$

avec la condition $f(0) = 1$; m est un nombre réel supposé inférieur à 1, et on s'intéresse à la solution quand x est positif ou nul : $x \geq 0$.

1. On pose $g(x) = 1/[f(x)]^{m-1}$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $g(x)$.
2. Résoudre cette équation. Tracer rapidement le graphe de $g(x)$.
3. En déduire $f(x)$ et donner l'allure de son graphe.

Exercice II
Séries de Fourier

Soit la fonction 2π-périodique définie comme suit :

$$f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 0 \ , & -\pi < x < 0 \\ x \ , & 0 < x < \pi \end{cases} \ . \tag{2}$$

1. Tracer le graphe de $f(x)$.
2. Calculer les coefficients de Fourier f_0, c_n et s_n (voir le *Rappel* en fin d'énoncé).
3. Écrire la série de Fourier (en sinus et cosinus) de $f(x)$.
4. Vers quelle valeur la série de Fourier de $f(x)$ converge-t-elle en $x = \pi$?
5. Établir la relation :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ . \tag{3}$$
6. Soit la fonction $g(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$.
   (a) Tracer le graphe de $g(x)$ sur $]-\pi, +\pi[$.

(b) Avec le moins de calculs possible, donner les coefficients de Fourier de $g(x)$.

(c) Commenter le type de décroissance de ces coefficients en le reliant aux propriétés de la fonction $g(x)$.

Rappel : la série trigonométrique d'une fonction 2π-périodique $f(x)$ peut être écrite[1] :

$$f(x) \overset{\text{p.p}}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n \cos nx + s_n \sin nx) \ , \tag{4}$$

$$\text{avec :} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\cos nx \ , \qquad s_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\sin nx \ . \tag{5}$$

Exercice III

Itération

Soit la suite de nombres x_n ($n \in \mathbb{N}$) définie par :

$$x_{n+1} = f(x_n) \ , \qquad f(x) = ax(x^2 - 3x + 2) \ , \tag{6}$$

avec a réel non nul.

1. Quelles sont les valeurs x_i pour lesquelles $f(x_i) = 0$?
2. Dans cette seule question, on prend $a = \frac{4}{3}$.
   Tracer le graphe de $f(x)$ et la première bissectrice en veillant à leur position respective à l'origine.
   Tracer alors sur le même graphe une suite de points partant d'un certain x_0 situé dans l'intervalle $]1, 2[$.
3. Écrire l'équation donnant les points fixes x^*.
4. Donner l'expression en fonction de a des points fixes **réels**. On montrera qu'il existe deux points fixes non nuls quand $a < -4$ ou $a > 0$.
5. Quelle condition sur la dérivée de $f(x)$ assure la stabilité d'un point fixe x^* ?
   Calculer la dérivée de $f(x)$.

   Dans toute la suite, on s'intéresse à la nature stable ou instable des points fixes. Pour cela, on se place dans le cas $a > \frac{1}{2}$.
6. Montrer que la condition du 5) implique que le point fixe $x^* = 0$ est instable.
7. Sans aucun calcul, et en s'appuyant sur un graphe comme celui tracé à la question 2, déterminer la nature stable ou instable du plus grand des deux points fixes non nuls.
8. On désigne désormais par x^* le plus petit des deux points fixes non nuls. En utilisant l'équation satisfaite par x^* obtenue en 3, exprimer $f'(x^*)$ sous la forme d'une expression du *premier* degré en x^*.
9. En y reportant l'expression de x^* obtenue à la question 4, montrer que $f'(x^*) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}(a+6) - \sqrt{a(a+4)}\right)$.
10. Par une discussion graphique très simple, en déduire le signe de $f'(x^*)$. On notera a_0 la valeur de a pour laquelle $f'(x^*)$ change de signe, sans la calculer explicitement.
11. Expliciter la condition de stabilité dans les deux cas :

    (a) $\frac{1}{2} < a < a_0$ (b) $a > a_0$
12. En déduire que le point fixe x^* est stable si $\frac{1}{2} < a < \frac{-5+3\sqrt{17}}{4}$, instable dans le cas contraire.

[1] Le symbole $\overset{\text{p.p}}{=}$ signifie *"égal presque partout"*.