UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Mention "Physique" de la Licence de Sciences et Technologies (L2)

(Année 2007/2008)

Examen de Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)
(21 décembre 2007 – durée : 2h)

Barème approximatif :	
Exercice I	25%
Exercice II	35%
Exercice III	55%

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
2 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours
Les exercices sont indépendants

Exercice I
Équation de Bernoulli

[TOTAL 5]

Soit à résoudre l'équation différentielle

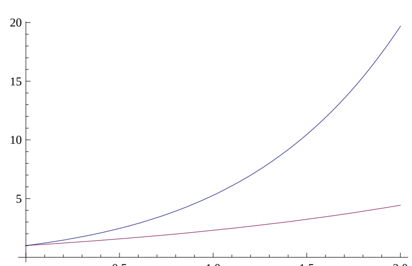
$$-f'(x) + f(x) + [f(x)]^m = 0 \ , \tag{1}$$

avec la condition $f(0) = 1$; m est un nombre réel supposé inférieur à 1, et on s'intéresse à la solution quand x est positif ou nul : $x \geq 0$.

1. On pose $g(x) = 1/[f(x)]^{m-1}$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $g(x)$.
   Rép. $g'(x) = -\frac{m-1}{f^m(x)} f'(x)$; en divisant l'équation par f^m on a $g' + (m-1)(g+1) = 0$ **[$1\frac{1}{2}$]**

2. Résoudre cette équation.
   Rép. $g(x) = -1 + A\exp((1-m)x)$ avec $g(0) = 1 \Rightarrow A = 2$, donc $g(x) = 2\exp((1-m)x) - 1$, $g(x) \geq 1$ pour $x \geq 0$ et $1 - m > 0$ **[$1\frac{1}{2}$]**
   Tracer rapidement le graphe de $g(x)$.
   Rép. voir ci-dessous **[1]**

3. En déduire $f(x)$ et donner l'allure de son graphe.
   Rép. $f(x) = \left(2e^{(1-m)x} - 1\right)^{\frac{1}{1-m}}$ avec la courbe de f dominante/dominée par celle de g selon que $m > / < 0$**[1]**



Exercice II
Séries de Fourier

[TOTAL $7\frac{1}{2}$]

Soit la fonction 2π-périodique définie comme suit :

$$f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 0\ , & -\pi < x < 0 \\ x\ , & 0 < x < \pi \end{cases} \quad . \tag{2}$$

1. Tracer le graphe de $f(x)$. **[1]**

2. Calculer les coefficients de Fourier f_0, c_n et s_n (voir le *Rappel* en fin d'énoncé).
Rép. $f_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{4}$, $c_n = \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}$, $s_n = -\frac{(-1)^n}{n}$. **[$\frac{1}{2}$+1+1]**

3. Écrire la série de Fourier (en sinus et cosinus) de $f(x)$.
Rép. $f(x) \stackrel{\text{p.p}}{=} \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^\infty \frac{-2}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$ **[$\frac{1}{2}$]**

4. Vers quelle valeur la série de Fourier de $f(x)$ converge-t-elle en $x = \pi$?
Rép. La fonction est discontinue en π, la série converge vers la demi-somme des valeurs à gauche et à droite, donc $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$. **[1]**

5. Établir la relation :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad . \tag{3}$$
Rép. On trouve la relation soit en évaluant la fonction en π, soit en l'évaluant en $x = 0$. **[1]**

6. Soit la fonction $g(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$.
   (a) Tracer le graphe de $g(x)$ sur $]-\pi, +\pi[$.
   Rép. ... **[$\frac{1}{2}$]**
   (b) Avec le moins de calculs possible, donner les coefficients de Fourier de $g(x)$.
   Rép. Les termes impairs se tuent, reste $g(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^\infty \frac{-2}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$ **[$\frac{1}{2}$]**
   (c) Commenter le type de décroissance de ces coefficients en le reliant aux propriétés de la fonction $g(x)$.
   Rép. Les coefficients décroissent comme $1/n^2$, ce qui découle de la continuité de $g(x)$ et de la discontinuité de $g'(x)$. **[$\frac{1}{2}$]**

Rappel : la série trigonométrique d'une fonction 2π-périodique $f(x)$ peut être écrite[1] :

$$f(x) \stackrel{\text{p.p}}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n \cos nx + s_n \sin nx) \ , \tag{4}$$

$$\text{avec :} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx \ , \qquad s_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx \quad . \tag{5}$$

[1] Le symbole $\stackrel{\text{p.p}}{=}$ signifie *"égal presque partout"*.

Exercice III

Itération

[Total 11]

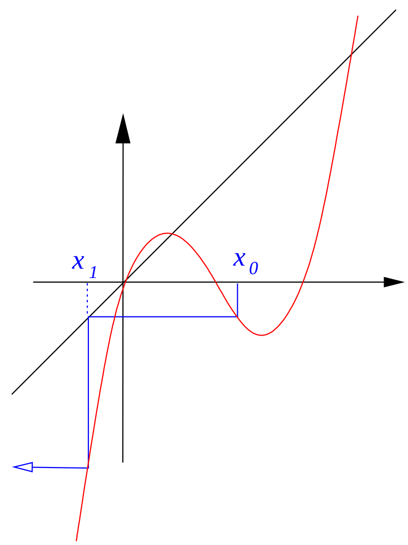
Soit la suite de nombres x_n ($n \in \mathbb{N}$) définie par :

$$x_{n+1} = f(x_n) \ , \qquad f(x) = ax(x^2 - 3x + 2) \ , \tag{6}$$

avec a réel non nul.

1. Quelles sont les valeurs x_i pour lesquelles $f(x_i) = 0$?
Rép. $x = 0, \ 1, \ 2$ **[$\frac{1}{2}$]**

2. Dans cette seule question, on prend $a = \frac{4}{3}$.
Tracer le graphe de $f(x)$ et la première bissectrice en veillant à leur position respective à l'origine.
Tracer alors sur le même graphe une suite de points partant d'un certain x_0 situé dans l'intervalle $]1, 2[$.
Rép. **[$1+\frac{1}{2}$]**



3. Écrire l'équation donnant les points fixes x^*.
Rép. $ax^*(x^{*2} - 3x^* + 2 - \frac{1}{a}) = 0$ **[$\frac{1}{2}$]**

4. Donner l'expression en fonction de a des points fixes **réels**. On montrera qu'il existe deux points fixes non nuls quand $a < -4$ ou $a > 0$.
Rép. $x^* = \frac{3 \pm \sqrt{1+\frac{4}{a}}}{2}$ **[$\frac{1}{2}$]**
Discriminant $\Delta = 1 + \frac{4}{a} = \frac{a+4}{a} \geq 0$, soit $a \leq -4$ ou $a \geq 0$ **[1]**

5. Quelle condition sur la dérivée de $f(x)$ assure la stabilité d'un point fixe x^* ?

Rép. $|f'(x^*)| < 1$ **[1, avec -$\frac{1}{4}$ s'il manque la valeur absolue et -$\frac{1}{4}$ si $\leq$]**
Calculer la dérivée de $f(x)$.
Rép. $f'(x) = a(3x^2 - 6x + 2)$ **[$\frac{1}{4}$]**

Dans toute la suite, on s'intéresse à la nature stable ou instable des points fixes. Pour cela, on se place dans le cas $a > \frac{1}{2}$.

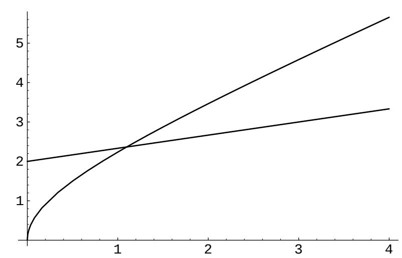
6. Montrer que la condition du 5) implique que le point fixe $x^* = 0$ est instable.
Rép. $f'(0) = 2a$ d'où ... **[$\frac{1}{4}$]**

7. Sans aucun calcul, et en s'appuyant sur un graphe comme celui tracé à la question 2, déterminer la nature stable ou instable du plus grand des deux points fixes non nuls.
Rép. Au point x^* le plus grand, la courbe recoupe la première bissectrice au point x^* avec une pente > 1 puisqu'elle la croise de bas en haut. Ce point x^* est donc instable. **[$\frac{1}{2}$]**

8. On désigne désormais par x^* le plus petit des deux points fixes non nuls. En utilisant l'équation satisfaite par x^* obtenue en 3, exprimer $f'(x^*)$ sous la forme d'une expression du *premier* degré en x^*.
Rép. $f'(x) = a\left(3x^2 - 6x + 2\right)$, et $x^{*2} = 3x^* - 2 + \frac{1}{a}$ donc $f'(x^*) = a(3(3x^* - 2 + \frac{1}{a}) - 6x^* + 2) = a(3x^* - 4 + \frac{3}{a})$ **[1]**

9. En y reportant l'expression de x^* obtenue à la question 4, montrer que $f'(x^*) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}(a+6) - \sqrt{a(a+4)}\right)$.
Rép. $x^* = \frac{3 - \sqrt{1 + \frac{4}{a}}}{2}$ donc $f'(x^*) = \cdots = \frac{a}{2}\left(1 - 3\sqrt{1 + \frac{4}{a}} + \frac{6}{a}\right) = \dfrac{1}{2}\left(a + 6 - 3\sqrt{a(a+4)}\right)$ **[1]**

10. Par une discussion graphique très simple, en déduire le signe de $f'(x^*)$. On notera a_0 la valeur de a pour laquelle $f'(x^*)$ change de signe, sans la calculer explicitement.
Rép. On trace les deux courbes $y = \frac{1}{3}(a+6)$ et $y = \sqrt{a(a+4)}$. La première est une droite de pente 1/3 qui coupe l'axe vertical en 2, la seconde est une courbe passant par 0, asymptote à une droite de pente 1. Ces deux courbes se coupent donc en un point $a_0 > 0$. La différence est positive quand la première est au dessus de la seconde, soit $a < a_0$, et vice versa. **[1]**



11. Expliciter la condition de stabilité dans les deux cas :

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{2} < a < a_0 \qquad\qquad \text{(b)} \quad a > a_0$$

Rép. Si $a < a_0$, stabilité si $f'(x^*) < 1$; si $a > a_0$, stabilité si $f'(x^*) > -1$. **[$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$]**

12. En déduire que le point fixe x^* est stable si $\frac{1}{2} < a < \frac{-5+3\sqrt{17}}{4}$, instable dans le cas contraire.
Rép. Si $a \le a_0$, $2f'(x^*) = a + 6 - 3\sqrt{a(a+4)} < 2 \ \Leftrightarrow a + 4 < 9a$ donc $\dfrac{1}{2} < a \le a_0$.
Si $a \ge a_0$, $2f'(x^*) = a + 6 - 3\sqrt{a(a+4)} = -2 \ \Leftrightarrow 2a^2 + 5a - 16 = 0$ dont les racines sont $a = (-5 \pm \sqrt{153})/4 = \frac{-5+3\sqrt{17}}{4}$. La racine positive est $a_1 = (-5 + 3\sqrt{17})/4 = 32/(5 + 3\sqrt{17})$, et la condition $2f'(x^*) > -2$ est satisfaite pour $a_0 \le a < a_1$. Soit au total stabilité pour $\dfrac{1}{2} < a < a_1$. **[1]**