Mention “Physique” de la
Licence de Sciences et Technologies
(L2)
(Année 2007/2008)

Examen de Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)
(24 janvier 2008 – durée : 2h)

Barème approximatif :	
Exercice I :	25%
Exercice II :	25%
Exercice III :	50%

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
3 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours
Les exercices sont indépendants

Exercice I
Convergences

On considère la fonction, définie pour $x \geq 0$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \tag{1}$$

1. (a) Quel est le comportement de $f(x)$ pour $x \approx 0$? pour $x \to \infty$?
   (b) Utiliser ces informations pour tracer *sommairement* le graphe de la fonction entre 0 et ∞.
2. Étudier la convergence de chacune des intégrales suivantes en chacun des points singuliers et éventuellement à l'infini :

$$I = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \ , \qquad K = \int_1^{+\infty} x^2[f(x)]^2\,\mathrm{d}x \ . \tag{2}$$

3. Pour chacune des séries de terme général ci-dessous, établir si elle est convergente, absolument convergente ou divergente.

$$v_n = (-1)^n (n f(n))^2 \ , \qquad w_n = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{f(n)} \tag{3}$$

   (On pourra chercher la limite de w_n quand $n \to \infty$, puis étudier $\tan w_n$.)

Exercice II
Série de Fourier

Soit la fonction $f(t) = |\sin\frac{\omega t}{2}|$.

1. Dessiner le graphe de $f(t)$ pour $t \in [-\frac{2\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}]$.
2. Quelle est la période T de $f(t)$?
3. Calculer le développement de Fourier trigonométrique de cette fonction, voir plus bas le Rappel.
4. Quel est le comportement asymptotique des coefficients de ce développement ?
   Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

5. La série de Fourier est-elle convergente ? Si oui, vers quelle fonction converge-t-elle ?
6. Déduire de cette série de Fourier la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \ . \tag{4}$$

Rappels : la série trigonométrique d'une fonction $f(t)$ de période T peut être écrite[1] :

$$f(t) \overset{\text{p.p}}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + s_n \sin\frac{2\pi nt}{T}) \ , \tag{5}$$

avec : $$f_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \ , \qquad c_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\cos\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t \ , \qquad s_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\sin\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t \ . \tag{6}$$

On rappelle aussi la formule d'addition

$$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \ . \tag{7}$$

Exercice III

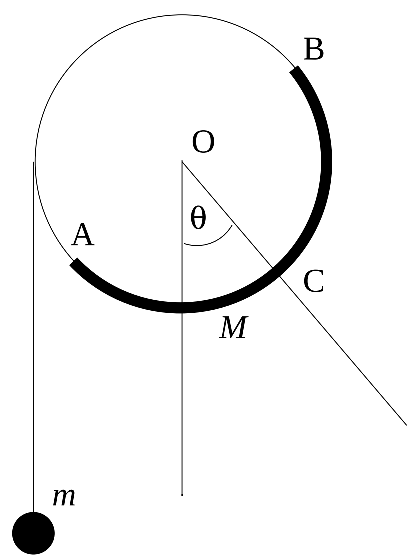
Bifurcation

A. En s'aidant éventuellement du graphe de la fonction $\sin x$ pour $x \in I = [0,\pi]$, donner le nombre des solutions en x de l'équation

$$\sin x = u \tag{8}$$

pour x dans l'intervalle I, selon la valeur de $u \geq 0$.
Donner l'expression en termes de la fonction Arcsin de chacune d'elles.

B. On considère le système mécanique constitué d'une poulie de rayon a et de poids négligeable, qui peut tourner dans un plan vertical autour d'un de son axe horizontal. Cette poulie porte sur son bord une masse M, répartie uniformément sur une demi-cercle AB. Une corde de poids négligeable à laquelle est suspendue une masse m passe dans la gorge de la poulie et est accrochée en B au bord de la poulie, voir figure.



On note C le milieu de l'arc AB et θ l'angle que fait le diamètre passant par C avec la verticale. On admettra que la dynamique de ce système est régie par l'équation

$$(M+m)\,a^2\,\ddot{\theta} = ag\,(m - \frac{2}{\pi}M\sin\theta) \tag{9}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

[1]Le symbole $\overset{\text{p.p}}{=}$ signifie *"égal presque partout"*.

1. A quelle équation satisfont les positions d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires de l'équation (9) ?
2. En utilisant les résultats de la question A, trouver les conditions sur $k = m/M$ pour que de telles solutions existent.
3. Linéariser l'équation (9) au voisinage d'une solution d'équilibre θ_s.
4. Discuter la stabilité de cette solution.
5. Dessiner sommairement le diagramme de bifurcation du système dans le plan (k, θ).
6. Quelle est la période des petites oscillations de la poulie au voisinage d'une solution stable θ_s ?
7. Que se passe-t-il quand k est très grand ?