Mention “Physique” de la
Licence de Sciences et Technologies
(L2)
(Année 2007/2008)

Examen de Méthodes mathématiques pour physiciens

(LP 206)
(24 janvier 2008 – durée : 2h)

Barème approximatif :
Exercice I : 25%
Exercice II : 25%
Exercice III : 50%

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
3 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours
Les exercices sont indépendants

Exercice I
Convergences

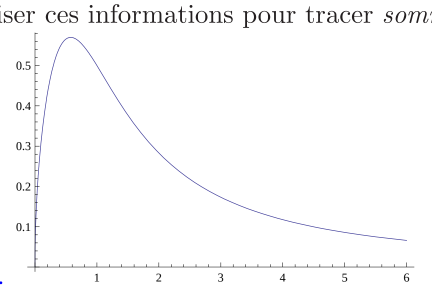
[TOTAL $5\frac{1}{2}$]

On considère la fonction, définie pour $x \geq 0$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \tag{1}$$

1. (a) Quel est le comportement de $f(x)$ pour $x \approx 0$? pour $x \to \infty$?
Rép. $f(x) \sim \sqrt{x}$ pour $x \to 0$; $f(x) \sim x^{-3/2}$ pour $x \to \infty$ [$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{2}$]

(b) Utiliser ces informations pour tracer *sommairement* le graphe de la fonction entre 0 et ∞.

Rép. 

[$\frac{1}{2}$]

2. Étudier la convergence de chacune des intégrales suivantes en chacun des points singuliers et éventuellement à l'infini, et conclure si l'intégrale converge :

$$I = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \ , \qquad K = \int_1^{+\infty} x^2[f(x)]^2\,\mathrm{d}x \ . \tag{2}$$

Rép. I CV ; J cv en 0, div à l'∞ donc DV ; K div à l'∞ [$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{2}$]

3. Pour chacune des séries de terme général ci-dessous, établir si elle est convergente, absolument convergente ou divergente.

$$u_n = f(n) \ , \qquad v_n = (-1)^n (nf(n))^2 \ , \qquad w_n = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{f(n)} \tag{3}$$

(On pourra chercher la limite de w_n quand $n \to \infty$, puis étudier $\tan w_n$.)
Rép. $u_n = f(n) \sim n^{-3/2}$ donc $\sum u_n$ CV ; v_n alternée, décroît vers 0 donc (Abel) $\sum v_n$ CV ; $w_n \to 0_+$ donc $w_n \sim \tan w_n = \mathrm{cotan}\,(\mathrm{Arctan}\,1/f(n)) = f(n)$, série CV [$\frac{1}{2}$+1+1]

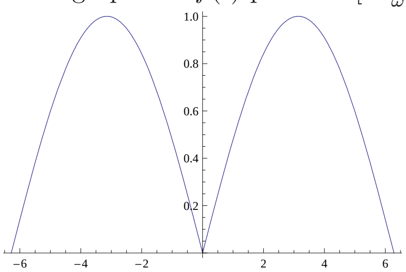
Exercice II

Série de Fourier

[TOTAL $5\frac{1}{2}$]

Soit la fonction $f(t) = |\sin\frac{\omega t}{2}|$.

1. Dessiner le graphe de $f(t)$ pour $t \in [-\frac{2\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}]$.

   Rép. 

   [$\frac{1}{2}$]

2. Quelle est la période T de $f(t)$?
   Rép. $T = 2\pi/\omega$ **[$\frac{1}{2}$]**

3. Calculer le développement de Fourier trigonométrique de cette fonction, voir plus bas le Rappel.
   Rép. fonction paire $s_n = 0$; $\forall n$ $c_n = \cdots = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$ [en particulier $f_0 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{2}{\pi}$] **[$1\frac{1}{2}$]**

4. Quel est le comportement asymptotique des coefficients de ce développement ?
   Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?
   Rép. $c_n \sim 1/n^2$ ce qui est attendu pour une fonction continue dont la dérivée est discontinue **[1]**

5. La série de Fourier est-elle convergente ? Si oui, vers quelle fonction converge-t-elle ?
   Rép. La série converge en tout point, et f étant continue, la série converge vers $f(x)$ en tout point **[1]**

6. Déduire de cette série de Fourier la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \ . \tag{4}$$

   Rép. Évaluant la série en $t = 0$ on trouve l'identité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$ **[1]**

Rappels : la série trigonométrique d'une fonction $f(t)$ de période T peut être écrite[1] :

$$f(t) \overset{\text{p.p}}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + s_n \sin\frac{2\pi nt}{T}) \ , \tag{5}$$

avec : $$f_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \ , \qquad c_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t \ , \qquad s_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t \ . \tag{6}$$

On rappelle aussi la formule d'addition

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \ . \tag{7}$$

[1] Le symbole $\overset{\text{p.p}}{=}$ signifie *"égal presque partout"*.

Exercice III

Bifurcation

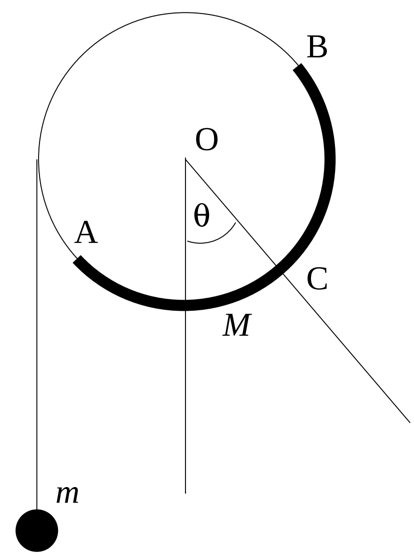
[Total 10]

A. En s'aidant éventuellement du graphe de la fonction $\sin x$ pour $x \in I = [0, \pi]$, donner le nombre des solutions en x de l'équation

$$\sin x = u \tag{8}$$

pour x dans l'intervalle I, selon la valeur de $u \geq 0$.
Donner l'expression de chacune d'elles en termes de la fonction Arcsin.
Rép. pas de solutions réelle si $u > 1$, 2 solutions si $0 \leq u \geq 1$ [solution double si $u = 1$], données par $x = \operatorname{Arcsin} u$ et $x = \pi - \operatorname{Arcsin} u$ **[$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{2}$]**

B. On considère le système mécanique constitué d'une poulie de rayon a et de poids négligeable, qui peut tourner dans un plan vertical autour d'un de son axe horizontal. Cette poulie porte sur son bord une masse M, répartie uniformément sur une demi-cercle AB. Une corde de poids négligeable à laquelle est suspendue une masse m passe dans la gorge de la poulie et est accrochée en B au bord de la poulie, voir figure.



On note C le milieu de l'arc AB et θ l'angle que fait le diamètre passant par C avec la verticale. On admettra que la dynamique de ce système est régie par l'équation

$$(M + m)\, a^2\, \ddot{\theta} = ag\, (m - \frac{2}{\pi} M \sin\theta) \tag{9}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

1. A quelle équation satisfont les positions d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires de l'équation (9) ?
   Rép. $m - 2\pi^{-1} M \sin\theta_s = 0$ **[1]**

2. En utilisant les résultats de la question A, trouver la condition sur $k = m/M$ pour que de telles solutions existent.
   Écrire alors ces solutions.
   Rép. Si $\frac{\pi m}{2M} > 1$ pas de solution réelle θ_s ; si $\frac{\pi m}{2M} \leq 1$, soit $k \leq \frac{2}{\pi}$, deux solutions (ou une solution double) **[$\frac{1}{2}$]**
   $\theta_s = \operatorname{Arcsin} \frac{k\pi}{2}$ ou $\theta_s = \pi - \operatorname{Arcsin} \frac{k\pi}{2}$ **[$\frac{1}{2}$]**

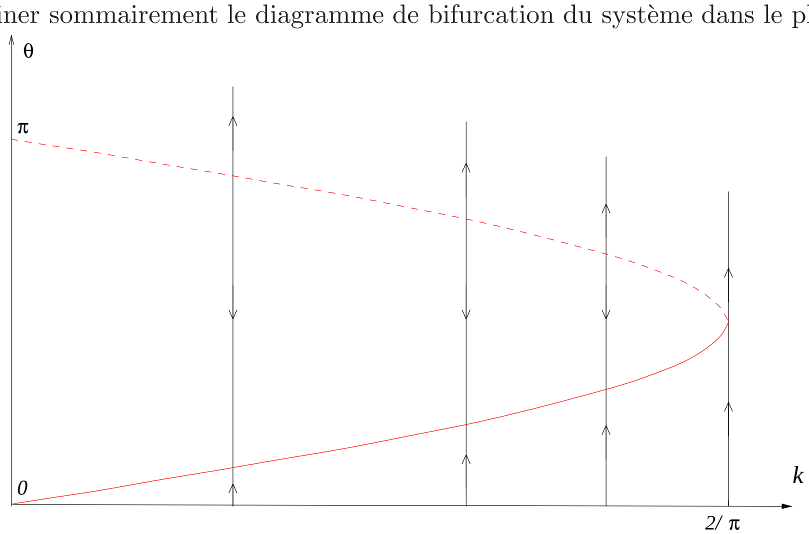
3. Montrer que la linéarisation de l'équation (9) au voisinage d'une solution d'équilibre θ_s est de la forme

$$\ddot{\alpha} + K\alpha = 0 \tag{10}$$

et donner l'expression de K.
Rép. On pose $\theta = \theta_s + \alpha$ et on linéarise en α : $(M+m)a^2\ddot{\alpha} = -2\pi^{-1}agM\cos\theta_s\alpha$, donc $\ddot{\alpha} + K\alpha$ avec $K := \frac{2\pi^{-1}a^{-1}gM\cos\theta_s}{M+m}$ **[1$\frac{1}{2}$]**

4. Discuter la stabilité du système selon le signe de K dans (10).
En déduire laquelle des solutions est stable.
Rép. L'équation linéarisée $\ddot{\alpha} + K\alpha$ décrit de petites oscillations α autour de θ_s si $K > 0$; par contre sa solution générique est non bornée si $K \leq 0$. La solution θ_s est donc stable si $K > 0$, c'est-à-dire $\cos\theta_s > 0$, $\theta_s < \frac{\pi}{2}$, instable si $\theta_s >< \frac{\pi}{2}$. **[1]**
La solution $\theta_s = \operatorname{Arcsin}\frac{k\pi}{2}$ est donc stable, $\pi - \operatorname{Arcsin}\frac{k\pi}{2}$ instable. **[$\frac{1}{2}$]**

5. Quelle est la période des petites oscillations de la poulie au voisinage d'une solution stable θ_s ?
Rép. On écrit $K = \omega^2$ **[$\frac{1}{2}$]**
d'où $\omega = \sqrt{K} = \left(\frac{2}{\pi}\frac{a^{-1}gM\cos\theta_s}{M+m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\pi}\frac{a^{-1}gM}{M+m}\sqrt{\frac{4M^2-m^2\pi^2}{4M^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ puis $T = \frac{2\pi}{\omega} = \cdots$ **[1]**

6. Dessiner sommairement le diagramme de bifurcation du système dans le plan (k,θ).


Rép. **[1$\frac{1}{2}$]**

7. Décrire qualitativement ce qui se passe quand k est très grand.
Rép. Pour m grand, la poulie se place dans une position où le point B est le plus bas possible. Ou bien encore, selon la façon dont la corde est fixée en B, elle se déroule jusqu'au bout… **[1]**