

Examen du 29 janvier 2010

Deuxième session

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1 (≈ 6 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = x^2.$$

Exercice 2 (≈ 18 points)

1. Montrer que la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

converge.

2. Soit f la fonction 2π -périodique et impaire valant 1 sur $]0, \pi[$.
a. En utilisant le développement en série de Fourier de f , calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

- b. Calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Exercice 3 (≈ 12 points)

On se propose d'étudier l'équation différentielle (dite « de Bernoulli »)

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^n(x), \quad (1)$$

où y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x ; p et q sont des fonctions réelles de x connues, et $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ est une constante.

1. Montrer que la fonction $v(x) = y^{1-n}(x)$ satisfait une équation différentielle *linéaire* que l'on précisera.
2. On souhaite trouver une solution non nulle de l'équation différentielle

$$y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0 \quad (2)$$

pour $x > 0$.

- a. Mettre l'équation (2) sous la forme (1) et en déduire l'équation satisfaite par $v(x)$.
- b. Trouver la solution $v(x)$ la plus générale de cette dernière équation.
- c. Déterminer ensuite la solution $y(x)$ de l'équation (2) qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$.

Exercice 4 (≈ 24 points)

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ t \longmapsto f(t) = \frac{\ln t}{1-t}$$

et sa primitive

$$I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto I(x) = \int_{t=1}^x f(t) dt.$$

1. Donner le domaine de définition de f et discuter sa continuité.
2. Que vaut la limite de f en $t = 1$?

■

On prolonge désormais la fonction $f : t \mapsto f(t)$ par continuité en $t = 1$ (c'est-à-dire qu'on pose

$$f(1) := \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \neq 1}} f(t).$$

3. Donner le domaine de définition de I .
4. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{u \cdot (1-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u},$$

où A et B sont des constantes que l'on précisera.

En déduire que

$$I(1/x) = -I(x) - \frac{1}{2} \ln^2 x.$$

5.
 - a. Rappeler l'expression du développement en série entière de $\ln(1+u)$ au voisinage de $u = 0$. Quel est son rayon de convergence ?
 - b. En déduire un développement en série de $f(t)$ au voisinage de $t = 1$.
6. Exprimer $I(x)$ sous forme d'un développement en série au voisinage de $x = 1$. Montrer que ce développement est valable pour tout $x \in]0, 2[$. On justifiera soigneusement les calculs.
7. On admet les théorèmes suivants :

Théorème 1

- Si une série de fonctions $S_N(x)$ converge uniformément vers une fonction $S(x)$ sur un intervalle $]a, b[$ quand l'entier N tend vers l'infini,
- si pour tout N , $S_N(x)$ converge simplement vers une limite finie ℓ_N quand x tend vers a
- et si ℓ_N converge simplement vers une limite finie quand N tend vers l'infini,

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} S_N(x) \right).$$

Théorème 2

Si une série de fonction $S_N(x) = \sum_{n=0}^N g_n(x)$ converge normalement sur un intervalle K (c'est-à-dire si $\sum_{n=0}^N \sup_{x \in K} |g_n(x)|$ converge simplement), alors $S_N(x)$ converge uniformément sur K .

En déduire $I(0)$ sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

8. Donner un équivalent asymptotique de $I(x)$ quand x tend vers l'infini.