Examen du 7 janvier 2011

Première session

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

1. Soit $r(x)$ la quantité définie par
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n-1}\, x^{2\,n-2} + r(x) \tag{1}$$
pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de $r(x)$.
2. Donner l'expression (sans symboles d'intégration) du terme S_n défini par
$$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = S_n + \int_{x=0}^{1} r(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Prouver les inégalités
$$0 \leqslant \int_{x=0}^{1} \frac{x^{2\,n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\,n+1}.$$
4. Montrer que la série
$$S_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}$$
converge et calculer sa limite.

Exercice 2

On considère un disque D, horizontal et parfaitement lisse, tournant à une vitesse angulaire ω constante autour d'un point O fixe dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. À l'instant $t = 0$, une personne immobile sur le disque dépose un palet P sur D (c.-à-d. que la vitesse initiale de P par rapport à D est nulle). Le palet glisse sans frottement sur D et décrit donc un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre.

L'objet du problème est de déterminer le mouvement de P dans le référentiel du disque. La position du palet à un instant t quelconque est représentée par ses coordonnées cartésiennes $(x(t),\ y(t))$ dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{u}_x,\ \vec{u}_y)$ fixe par rapport à D.

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique appliquée au palet dans le référentiel non galiléen du disque, on peut montrer que le mouvement de P est déterminé par les équations
$$\ddot{x} - 2\,\omega\,\dot{y} - \omega^2\,x = 0 \tag{2}$$
et
$$\ddot{y} + 2\,\omega\,\dot{x} - \omega^2\,y = 0. \tag{3}$$

1. On pose $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$.
   Écrire une équation différentielle (notée (4)) en $z(t)$.
2. Montrer que la solution générale de (4) est de la forme $z(t) = (\lambda + \mu\,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t}$, où $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{C}^2$.
3. Le palet est déposé à l'instant initial au point de coordonnées $(x(0) = \xi,\ y(0) = 0)$.
   Calculer $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0,\ \pi/2]$ et ayant la propriété $f(x+\pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Dessiner la restriction de f à l'intervalle $x \in [-\pi,\ \pi]$.
   Donner une expression pour $f(x)$ valable pour $x \in [\pi/2,\ \pi]$.
   Déterminer la plus petite période de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que les coefficients de Fourier b_n peuvent s'écrire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot (1 - [-1]^n) \int_{x=0}^{\pi/2} x \sin(n\,x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Donner l'expression explicite des coefficients b_n.
5. Écrire le développement en série de Fourier $\widetilde{f}$ de f.
   Sur quel domaine $\widetilde{f}$ converge-t-elle ? Et sur quel domaine converge-t-elle vers f ? (Justifier les réponses.)
6. Calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,p+1)^2}.$$

7. Calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,p+1)^4}.$$

Exercice 4

1. Rappeler le développement en série entière de $\cos x$ et $\operatorname{ch} x$, ainsi que leur rayon de convergence.
2. Trouver les solutions développables en série entière (c.-à-d. de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$) satisfaisant

$$4\,x\,y'' + 2\,y' - y = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

   (on définira les coefficients a_n par récurrence).
   Préciser leur domaine de validité.
3. Vérifier que $a_n = 1/(2\,n)!$ si $n \geqslant 1$.
   En déduire l'expression des solutions trouvées à la question précédente en termes de fonctions simples.