

Corrigé de l'examen du 25 janvier 2011

Exercice 1

1.

$$\frac{d(1)}{dt} + \omega \cdot (2) \longrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 2 \omega^2 \xi \cos(\omega t).$$

2.

$$x_h(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

3.

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = -2 k \omega \sin(\omega t + \phi) = 2 \omega^2 \xi \cos(\omega t),$$

donc $k = -\omega \xi$ et, en identifiant $\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t) \cos \phi + \cos(\omega t) \sin \phi$ et $\cos(\omega t)$, $\phi = \pi/2$.

$$x_p(t) = -\omega \xi t \cos(\omega t + \pi/2) = \omega \xi t \sin(\omega t).$$

4. a. $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Il reste à déterminer A et B en fonction des conditions initiales.
 $x(0) = \xi$, donc $A = \xi$.

$$(\dot{x}(t))_{t=0} = (-A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t) + \omega \xi \sin(\omega t) + \omega^2 \xi t \cos(\omega t))_{t=0} = B \omega = 0,$$

donc $B = 0$.

On obtient finalement

$$x(t) = \xi \cdot (\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)).$$

b. En utilisant (1), on obtient

$$y(t) = \frac{\dot{x} - \omega \xi \sin(\omega t)}{\omega} = \xi \cdot (\omega t \cos(\omega t) - \sin(\omega t)).$$

Exercice 2

1. a.

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\pi} x \sin(n x) dx &= \left[-\frac{x \cos(n x)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(n x)}{n} dx = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot [\sin(n x)]_{x=0}^{\pi} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\pi} x^2 \sin(n x) dx &= \left[-\frac{x^2 \cos(n x)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-2 x \cos(n x)}{n} dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n} \cdot \left(\left[\frac{x \sin(n x)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(n x)}{n} dx \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^2} \cdot \left[-\frac{\cos(n x)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} \cdot ([-1]^n - 1). \end{aligned}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ car f est impaire.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} x \cdot (\pi - x) \sin(n x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\pi \cdot \left[\frac{\pi \cdot (-1)^{n+1}}{n} \right] - \left[\frac{\pi^2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3} \cdot ([-1]^n - 1) \right] \right) \\ &= \frac{4}{\pi n^3} \cdot (1 - [-1]^n). \end{aligned}$$

On obtient donc $b_{2p} = 0$ et

$$b_{2p+1} = \frac{8}{\pi \cdot (2p+1)^3},$$

soit

$$\tilde{f}(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin([2p+1]x)}{(2p+1)^3}.$$

2. f est C^1 par morceaux, donc $\tilde{f}(x) = (f[x^-] + f[x^+])/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après le théorème de Dirichlet. f est en outre continue en $\pi/2$ donc $\tilde{f}(\pi/2) = f(\pi/2)$, soit

$$\frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^2}{4},$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3. f est continue par morceaux, donc le théorème de Parseval s'applique :

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

soit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi \cdot (2p+1)^3} \right)^2.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} x^2 \cdot (\pi - x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2 x^3}{3} - \frac{\pi x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{30}.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^4}{30} \times 2 \left(\frac{\pi}{8} \right)^2 = \frac{\pi^6}{960}.$$

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto f_{\alpha}(x)$ est décroissante pour $x \geq 2$. Nous avons donc, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\int_{x=n}^{n+1} f_{\alpha}(x) dx \geq f_{\alpha}(n+1) \int_{x=n}^{n+1} dx = f_{\alpha}(n+1).$$

Par utilisation de la règle $\int_{\alpha}^c g = \int_{\alpha}^b g + \int_b^c g$, il vient que

$$\int_{x=2}^N f_{\alpha}(x) dx \geq \sum_{n=3}^N f_{\alpha}(n),$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée.

2. a.

$$\int^{x'=x} \frac{1}{x' \cdot (\ln x')^\alpha} dx' = -\frac{1}{(\alpha - 1) \cdot (\ln x)^{\alpha-1}}.$$

b. Prenons la limite de l'inégalité (3). Quand $\alpha > 1$, $\lim_{N \rightarrow \infty} (\ln N)^{\alpha-1} = \infty$, donc $\int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x) dx$ converge. Comme $f_\alpha \geq 0$,

$$\int_{x=2}^N f_\alpha(x) dx \leq \int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x) dx.$$

De l'inégalité

$$\sum_{n=2}^N f_\alpha(n) \leq f_\alpha(2) + \int_{x=2}^N f_\alpha(x) dx,$$

on déduit que

$$\sum_{n=2}^N f_\alpha(n) \leq f_\alpha(2) + \int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x) dx.$$

La suite $N \mapsto \sum_{n=2}^N f_\alpha(n)$ est croissante ($f_\alpha(n) \geq 0$) et majorée par $f_\alpha(2) + \int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x) dx$, donc S_α est convergente pour $\alpha > 1$ et

$$S_\alpha \leq f_\alpha(2) + \int_{x=2}^{\infty} f(x) dx.$$

Remarque. — Si l'on n'avait pas explicitement demandé d'utiliser (3), on aurait aussi pu appliquer directement le théorème de comparaison série-intégrale : « Si f est une fonction positive décroissante, $\sum^\infty f(n)$ converge $\iff \int^\infty f(x) dx$ converge. ».

3. a.

$$\int^{x'=x} \frac{1}{x' \ln x'} dx' = \ln(\ln x).$$

b. On peut appliquer la même démarche qu'à la question 1. f_α étant décroissante, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\int_{x=n}^{n+1} f_\alpha(x) dx \leq f_\alpha(n) \int_{x=n}^{n+1} dx = f_\alpha(n).$$

On en déduit que

$$\int_{x=2}^{N+1} f_\alpha(x) dx \leq \sum_{n=2}^{N+1} f_\alpha(n).$$

Supposons que $\sum_{n=2}^{\infty} f_\alpha(n)$ converge. Comme $f_\alpha \geq 0$, on a alors

$$\sum_{n=2}^{N+1} f_\alpha(n) \leq \sum_{n=2}^{\infty} f_\alpha(n),$$

d'où

$$\int_{x=2}^{N+1} f_\alpha(x) dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} f_\alpha(n).$$

L'intégrale étant croissante (f_α) et majorée, $\int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x) dx$ converge, ce qui est absurde puisque $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(\ln(N+1)) = +\infty$. L'hypothèse de départ est donc fautive : S_1 diverge.

4. Pour $\alpha < 1$,

$$\frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha} \geq \frac{1}{n \cdot (\ln n)}.$$

S_1 étant une série à termes positifs divergente, S_α est divergente pour $\alpha < 1$ ($u_n \geq v_n \geq 0$ et $\sum v_n$ diverge $\implies \sum u_n$ diverge).

Exercice 4

1. Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On a

$$x^2 y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n,$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

et

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n x^{n-2}.$$

$$x^2 y'' + 4x y' + (2 - x^2) y = 1 = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n,$$

soit $1 = 2 a_0$, $0 = 6 a_1$, et

$$(n \cdot [n-1] + 4n + 2) a_n = a_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

2. $a_1 = 0$, donc $a_n = 0$ pour tout n impair.

$a_0 = 1/2$ et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-2}}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{a_{n-4}}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \dots = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{2 a_0}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{(n+2)!} \end{aligned}$$

pour tout n pair.

3.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n,$$

où l'on a posé $b_n = a_{2n}$ et $\xi = x^2$. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(2n+4)!}{1/(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+4)} = 0 =: \ell.$$

La limite ℓ étant bien définie, le rayon de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n$ est $R_\xi = 1/\ell = \infty$ d'après la règle de d'Alembert. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n$ converge pour tout $\xi \in]-R_\xi, R_\xi[$, donc pour tout $x \in]-\sqrt{R_\xi}, \sqrt{R_\xi}[$, soit sur \mathbb{R} tout entier.

4.

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p+2)!} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} \right) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \right) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} - 1 \right) = \frac{\text{ch } x - 1}{x^2}.$$