TP d'informatique avec *Mathematica*

Feuille d'exercices n° 1

Conseils

- Que ce soit pour se protéger des sorties brutales en cas de blocage, ou tout simplement pour garder une trace de vos calculs, **il est indispensable de sauvegarder votre travail régulièrement**.
- Il y a généralement plusieurs façons de répondre aux questions. L'élégance de votre méthode et l'emploi judicieux des outils enseignés (ainsi que d'autres) seront appréciés.

A. Calculs simples

A.1. Calculs symboliques

1. Afficher le résultat de $2\,a\,b - 3\,b\,a/2 - (a\,b^2)^3$.
2. Afficher le résultat de $\cos(\alpha + \pi) + \sin(\beta + \pi/2)$.
3. Reprendre le calcul du n° 1 en divisant le tout par a. Afficher $\cos^2 a + \sin^2 a$ puis $\ln e^x - e^{\ln x}$.
4. Dans le cas de $\ln e^x - e^{\ln x}$, essayer de nouveau en précisant que x est réel (**`Simplify[%, Element[x, Reals]]`**). Interpréter le résultat.

A.2. Calculs numériques

1. Calculer $1/2 + 5/8 + \sqrt{8 + 4}$, puis $\cos(2 + \pi) + \sin(\pi/4) - \ln(3/2)$.
2. Affecter le premier calcul du n° 1 à la variable a et élever celle-ci au carré.
3. Répéter le premier calcul du n° 1, en remplaçant seulement le premier nombre entier « 1 » par « 1. » (avec point décimal). Reprendre en changeant aussi le « 4 » par « 4. ». Interpréter les résultats.
4. Obtenir le même résultat en appliquant la fonction **`N`** à la variable a définie au n° 2. Afficher le résultat avec 20 chiffres significatifs en utilisant le deuxième argument de la commande **`N`**.

B. Tracer et dériver des fonctions

1. Définir les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto e^{-x^2} \cos(5\,x).$$

   Tracer chacune dans un intervalle intéressant avec la commande **`Plot`**.

   La fonction g est sans doute tronquée en ordonnée. Consulter la documentation de **`Plot`** (taper « **`? Plot`** ») pour la tracer complètement sur l'intervalle demandé.

   Calculer ensuite les dérivées premières de f et g ; on les définira à l'aide de la commande d'affectation différée, « **`:=`** ».

   Les tracer, ainsi que f et g, dans les mêmes intervalles. Que se passe-t-il ?

Le problème vient de ce que la dérivée n'est pas immédiatement évaluée quand on utilise « **:=** », ce qui est souvent souhaitable, mais pas ici. En effet, lorsque **Plot** veut tracer la dérivée, il attribue *d'abord* à x des valeurs dans l'intervalle. Il tente *ensuite* de calculer la dérivée, mais x n'est alors plus une variable.

Pour remédier à ce problème, il y a deux solutions :

- Dans l'instruction **Plot**, calculer d'abord la dérivée en appliquant à celle-ci la commande **Evaluate**.

  Remarque : si on trace une *liste* de fonctions (par exemple **{f1[x], f2[x]}**) avec **Plot**, **Evaluate** doit être appliqué à la liste, pas à chaque fonction séparément ;
- Lors de la définition de la dérivée, utiliser la commande d'affectation immédiate, « **=** », et non « **:=** ». L'expression est alors immédiatement évaluée et peut servir d'argument à **Plot**.

Appliquer la première méthode à la dérivée de f et la deuxième à celle de g.

2. Définir la fonction

$$h\colon (x, y) \mapsto \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

La tracer en trois dimensions avec **Plot3D** dans l'intervalle $[-5\,\pi, 5\,\pi]$ en x et en y. On fera apparaître le pic central en utilisant l'option appropriée de **Plot3D**.

C. Intégration

C.1. Intégrales propres

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \sin(2\,x)\cos(3\,x)\,\mathrm{d}x\,; \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,\mathrm{d}x\,;$$

$$I_3 = \int \arctan x\,\mathrm{d}x\,; \qquad I_4 = \int t^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t/\tau}\,\mathrm{d}t \quad \text{(i est l'unité imaginaire).}$$

C.2. Intégrales impropres

Calculer les intégrales impropres ci-dessous afin de déterminer leur nature (convergente ou divergente). Tracer les intégrands afin de visualiser le comportement problématique. Au cas où *Mathematica* retourne une expression non évaluée, essayer d'obtenir un résultat numérique.

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\,\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x\,; \qquad J_2 = \int_1^\infty \frac{x}{(1+x^2)\,\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$J_3 = \int_0^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\,; \qquad J_4 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\,\mathrm{d}x\,; \qquad J_5 = \int_0^\infty \frac{x\ln(\operatorname{th} x)}{(1-x)}\,\mathrm{d}x.$$

Que s'est-il passé avec les intégrales J_4 et J_5 ? (Nous y reviendrons aux D.5 et D.6.)

D. Limites et développements limités

1. Calculer les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right); \qquad L_2 = \lim_{x\to0^+} x^{1/\ln(3\,x)}\,;$$

$$L_3 = \lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}\,; \qquad L_4 = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/x}-1}\,; \qquad L_5 = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/x}-1}.$$

Que se passe-t-il si on ne précise pas le côté (0^+ ou 0^-) dans L_4 et L_5 ? Commenter.

2. Donner les développements limités au voisinage de 0 de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4 et de $\tan x$ à l'ordre 5.
3. Trouver le développement limité de $\sqrt{1+x^2}$ à l'infini à l'ordre 3.
4. Trouver les développements limités de $f\colon x \mapsto \ln(1+e^x)$ au voisinage de $x = 0$ aux ordres 1, 2 et 3.

   Les tracer, ainsi que f, sur une même figure. Commenter le résultat. Estimer (qualitativement) dans quel intervalle chacun des développements d'ordre 1 et 2 donne une approximation raisonnable de la fonction.
5. Peut-on dire, à l'aide d'un développement limité en 0 et à l'infini, pour quelle raison l'intégrale J_4 de C.2 diverge ?
6. À l'aide d'un développement limité au premier ordre autour de $x = 1$, montrer que l'intégrale J_5 de C.2 diverge.

E. Équations

1. Résoudre l'équation $e^x/4 + a\,e^{-2x} = 0$, où a est un réel quelconque (il n'a rien à voir avec le a défini au A.2.2). On pourra utiliser les fonctions **`Solve`** et **`Reduce`**.
2. On veut trouver tous les zéros réels du polynôme

$$P(x) = 2\,x^5 - 21\,x^4 + 89\,x^3 - 211\,x^2 + 298\,x - 180.$$

   Qu'obtient-on avec **`Solve`** ?

   Déterminer la valeur numérique des zéros de P à l'aide de **`FindRoot`** (indice : les zéros se trouvent dans l'intervalle [0, 5] ; un graphe peut aider à trouver les valeurs approchées à passer à **`FindRoot`**).

   Retrouver ces valeurs à l'aide de **`NSolve`**.
3. Résoudre le système d'équations linéaires

$$2\,x + y + z = 3, \qquad x - y - z = 0, \qquad x + y + 2\,z = 0.$$

4. Trouver numériquement tous les points d'intersection des fonctions $x \mapsto 2\cos(\pi\,x + 1)$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x$ (il est conseillé de s'aider d'un graphe).

F. Étude de fonctions

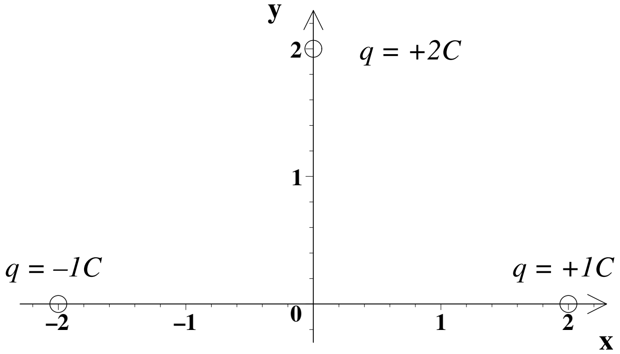
1. Trouver le minimum absolu de $x \mapsto e^{-x^2}\cos(5\,x)$.
2. On s'intéresse maintenant à la fonction

$$y\colon x \mapsto \frac{x^4 - 2\,x + 3}{x^3 + 1}.$$

   a. Tracer la fonction dans un intervalle intéressant.
   b. Trouver les extrémums (valeurs de x et de y).
   c. Calculer la dérivée seconde de y en ces points. En déduire leur nature (minimum ou maximum) et comparer au graphique.
   d. **(Facultatif.)**
   Trouver les points d'inflexion.
   e. **(Facultatif.)**
   Tracer sur un même graphique la fonction et les droites tangentes aux points d'inflexion. Faire un agrandissement de la région intéressante.

G. Problème d'électrostatique

On se propose de visualiser le potentiel et le champ électriques créés par un système de trois charges fixes : une de +1 C située sur l'axe des x en $x = 2$ m ; une autre de −1 C située sur ce même axe en $x = -2$ m ; une dernière de +2 C, placée sur l'axe des y en $y = 2$ m.



G.1. Potentiel

On rappelle que le potentiel électrique créé par une charge q à une distance r de celle-ci est donné par $V(r) = k\, q/r$, où $k = 1/(4\,\pi\,\epsilon_0)$. On posera ici $k = 1$.

Par défaut, *Mathematica* utilise la notation (**Xx**, **Yy**, **Zz**) pour les coordonnées cartésiennes. La valeur du gradient dépendant du systèmes de coordonnées, on adoptera cette notation.

1. Définir le potentiel **vplus2** créé par la charge +2 C en tout point du plan xOy en fonction de **Xx** et **Yy**. Définir de même **vplus1** et **vmoins1** pour les deux charges de ±1 C. En déduire le potentiel total, **pot**, en tout point du plan.
2. Tracer, en 3 dimensions, l'allure du potentiel total pour **Xx** et **Yy** compris dans l'intervalle $[-3, 3]$ à l'aide de **Plot3D**.

   Le tracer une deuxième fois sous forme de courbes de niveau (on pourra utiliser l'option **MeshFunctions** de **Plot3D**).
3. Obtenir par un développement limité une expression approchée du potentiel le long de l'axe des x pour $x \gg 1$ m. Faire de même pour l'axe des y. Commenter. En quoi ce résultat diffère-t-il de celui qu'on aurait pour un dipôle électrique ?

G.2. Champ

On rappelle que le champ électrique $\vec{E}$ est relié au potentiel électrique V par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{u}_z\right).$$

1. Pour calculer le gradient (fonction **Grad**), charger l'extension **VectorAnalysis** en tapant **Needs["VectorAnalysis`"]**. Calculer le champ électrique total, **champ**, dans le plan xOy.

   Remarque : on pourrait aussi calculer les dérivées partielles de V à l'aide de **D** et en déduire $\vec{E}$.
2. Tracer le champ de vecteurs à l'aide de la commande **VectorPlot**, toujours pour **Xx** et **Yy** dans $[-4, 4]$, avec une grille de 10×10 points (option **VectorPoints**).