UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

LP206: Mathématiques pour physiciens 1 - Année 2010-2011

TP d'informatique avec `Mathematica` - feuille d'exercices N°2

Conseils

- Que ce soit pour se protéger des sorties brutales en cas de blocage, ou tout simplement pour garder une trace de vos calculs, **il est indispensable de sauvegarder votre travail régulièrement**.

- Certaines questions vous invitent à répondre par un commentaire ou un court texte dans la feuille de calcul `Mathematica`. De façon plus générale, il faut commenter ce que vous faites afin que le correcteur puisse vérifier votre compréhension.

A Le corps noir

A1 Introduction

Un corps noir est un corps en équilibre avec le rayonnement électromagnétique qu'il émet et absorbe continuellement. Le spectre en énergie ne dépend que de sa température T (température absolue, mesurée en degrés Kelvin). Plus précisément, soit $u(\nu,T)d\nu$ la puissance du rayonnement du corps noir par unité de surface, pour des fréquences comprises entre ν et $\nu+d\nu$. On démontre que u est de la forme :

$$u(\nu,T)=\nu^3\frac{a\alpha}{e^{\alpha\frac{\nu}{T}}-1}\ , \qquad (1)$$

où $a=\dfrac{8\pi k_B}{c^2}$ et $\alpha=h/k_B$.
$h=6,62\,10^{-34}$ J.s est la constante de Planck, $k_B=1,38\,10^{-23}$ J.K^{-1} est la constante de Boltzmann, et $c=3\ 10^8$ m/s la vitesse de la lumière.
Dans cet exercice on cherche à étudier le spectre d'un corps noir.

A2 Études préliminaires

1) Définir tout d'abord le u de l'équation (1) comme fonction (au sens de `Mathematica`) des deux variables ν et T. Introduire ensuite les expressions de a et α. Afficher $u(\nu, T)$.

2) On veut maintenant tracer le spectre d'un corps noir à la température ambiante ($T = 300$°K). Pour cela il vous faut introduire les valeurs numériques des constantes h, k_B et c. Afficher d'abord la valeur de u pour cette température et pour $\nu = 10^{13}$ Hz et s'aider de cette valeur pour déterminer l'échelle du graphe, puis tracer u.

3) Faire un zoom au voisinage de $\nu = 0$ et interpréter le résultat observé en utilisant l'équation(1).

4) Chercher la fréquence du maximum de u en résolvant numériquement une équation : essayer tout d'abord avec **NSolve** puis, après avoir trouvé graphiquement une valeur approchée, résoudre numériquement en utilisant **FindRoot**. Affecter, en utilisant la commande appropriée, une variable à la valeur ainsi trouvée.

5) Trouver la longueur d'onde correspondante [1] en Å ($\lambda = \frac{c}{\nu}$, 1Å= 10^{-10}m). Vérifiez que cette longueur d'onde correspond bien à un rayonnement infrarouge.

6) Le Soleil est approximativement un corps noir. Reprendre les questions 2)-5) ci-dessus pour une température de la surface du Soleil (≈ 6000°K). On doit trouver cette fois-ci que la longueur d'onde au maximum est dans le spectre visible.

A3 Puissance totale rayonnée : Loi de Stephan

On cherche maintenant l'expression de la puissance totale rayonnée par unité de surface du corps noir à une température T.

1) Comme nous sommes intéressés par l'expression symbolique, il faut tout d'abord enlever les valeurs numériques assignées à h, k_B et c en utilisant la commande appropriée.

[1] La longueur d'onde qui correspond à la fréquence au maximum ($\lambda = c/\nu_{max}$) n'est pas le maximum λ_{max} que l'on trouve quand on trace le spectre en fonction de λ. En fait, $\lambda_{max} = 0.5683\frac{c}{\nu_{max}}$.

2) Préciser ensuite que ces trois constantes ainsi que la température sont réelles et supérieures à 0, puis calculer $\int_0^\infty u(\nu, T) d\nu$, et constater que sa valeur ne dépend que des constantes physiques et est proportionelle à T^4. Donner l'expression du coefficient de proportionalité σ (constante de Stephan) en fonction des constantes physiques.

3) Justifier la nécessité des conditions de réalité et de positivité.

A4 La loi de Wien

Nous allons maintenant trouver la loi de Wien, qui fournit une relation entre la température du corps noir et la fréquence d'émission maximale.

1) Enlever les hypothèses faites plus haut pour h, k_B, c et T à l'aide de l'instruction convenable.

2) Résoudre symboliquement une équation pour trouver la fréquence du maximum en fonction de T (loi de Wien). Affectez une fonction $\nu_{max}[T]$ à la solution convenable.

3) Déterminer la fonction réciproque qui donne la température pour laquelle ce maximum est à une fréquence donnée ν. Assigner cette expression, qui dépend de ν, à la variable $Tmax$. Il y a plusieurs méthodes pour réaliser ceci.

4) Obtenir enfin la fonction qui décrit la valeur de u qui passe par les maxima des spectres en évaluant $u(\nu, Tmax)$.

5) Tracer sur le même graphe la fonction obtenue au 4) et les spectres de trois étoiles : rouge ($T = 4000$°K), jaune ($T = 6000$°K) et bleue ($T = 8000$°K).

B Quelques équations différentielles

Résoudre les équations suivantes, **à chaque fois d'abord en omettant les conditions initiales, et ensuite en les prenant en compte**.

B1 Équation du premier ordre

$$\frac{d}{dt}x\,(t) + t\,(x\,(t) + 1) = 0 \qquad ; \qquad x(0) = 0$$

Tracer le graphe de la solution.

B2 Équation du second ordre

$$\frac{d^2}{dt^2}x\,(t) + 4\,\frac{d}{dt}x\,(t) + 4\,x\,(t) = 0$$

Tracer sur le même graphe les solutions obtenues pour $x(0) = 0.5$ avec $\frac{d}{dt}x(0) = 0$ puis avec $\frac{d}{dt}x(0) = 1$. Commenter la réalisation graphique des différentes conditions initiales.

C Système d'équations linéaires du premier ordre

Résoudre le système

$$\frac{d}{dt}x\,(t) = -3\,x\,(t) - y\,(t)$$
$$\frac{d}{dt}y\,(t) = x\,(t) - y\,(t)$$

et comparer la solution obtenue pour $x(t)$ avec celle obtenue en B2) ci dessus.
Trouver une relation simple entre $x(t)$ et $y(t)$.

D Oscillateur harmonique

D1 Oscillateur amorti libre

On considère un oscillateur harmonique amorti décrit par l'équation

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{2}$$

Pourquoi cette équation décrit-elle un oscillateur **harmonique? amorti ?** Quelle est la dimension de la constante τ ? Comment l'amortissement dépent-il de τ ?

1) Résoudre cette équation différentielle, d'abord sans conditions initiales, puis en supposant l'oscillateur au repos et dans une position x_0 à l'instant $t = 0$.

2) Assigner cette dernière solution à une fonction en utilisant la commande `Mathematica` convenable.

3) Résoudre l'équation algébrique en τ qui donne les zéros du discriminant du polynôme caractéristique de l'équation différentielle. Cette valeur de τ, dite critique, signale un changement de régime de l'oscillateur.

Dans la suite de cette sous-section, on utilisera les valeurs numériques $\omega_0 = 1$ *et* $x_0 = 1$.

4) Afficher l'expression de la fonction $x(t)$ pour ces valeurs de ω_0 et x_0.

5) Obtenir la solution pour la valeur critique ($\tau = \frac{1}{2}$) en prenant la limite appropriée.

6) Tracer sur un même graphe les fonctions $x(t)$ pour les trois régimes : sous-amorti ($\tau = 10$), sur-amorti ($\tau = 1/10$) et critique. On choisira d'abord un intervalle grand $t \in [0, 10]$, puis, en effectuant un zoom au voisinage de $t = 0$, on vérifiera que les conditions initiales sont bien satisfaites.

D2 Oscillateur amorti excité

On considère ce même oscillateur amorti (même $\omega_0 = 1$), soumis à une excitation sinusoïdale

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = A\cos\omega t\ . \tag{3}$$

Dans le régime permanent, atteint après une période transitoire, $x(t)$ dépend linéairement de la source $A\cos\omega t$. Quand ce régime est atteint, le mouvement de l'oscillateur est à la fréquence de la source et l'amplitude des oscillations est constante. **Vous vérifierez ceci dans les situations suivantes** mais on s'intéresse ici principalement au régime transitoire.

1) **Solution générale**

Résoudre l'équation différentielle pour un oscillateur **qui se trouve à l'instant** $t = 0$ **au repos dans sa position d'équilibre** avec $A = 1$ (On gardera $\omega_0 = 1$). Affectez cette solution à une fonction.

Quand la fréquence excitatrice $\omega \approx \omega_0$, l'oscillateur est résonant. Nous allons maintenant tracer la solution pour plusieurs cas de figure en ce qui concerne la valeur de l'amortissement, déterminé par τ, et "l'écart " de ω à la fréquence de résonance ω_0.

2) **Amortissement très faible, loin de la résonance**

1. Sans résoudre de nouveau l'équation différentielle, afficher l'expression de la solution pour $\tau = 1000$ et $\omega = \frac{1}{2}$.
2. Appliquer la commande `ComplexSimplify` à la solution. Expliquer le résultat. Pour mieux voir, on peut évaluer numériquement le résultat de la dernière instruction à l'aide de `FullSimplify` et avec différentes valeurs pour la précision.
3. Tracer la solution pour $t \in [0, 1]$ et vérifier que les conditions initiales sont bien satisfaites.
4. Dans le cas de figure actuel, le régime permanent est atteint au bout d'un temps assez long. Pour voir différentes phases du régime transitoire, tracer la solution dans différents intervalles de temps : $t \in [0, 100]$, $t \in [1000, 1100]$, $t \in [3000, 3100]$ puis $t \in [10000, 10100]$.

   Commentez les résultats observés par rapport à ce à quoi vous vous attendiez, en temps d'amortissement comme en solution de régime permanent.

3) **Près de la résonance ($\omega = 1.1$), pour divers amortissements**

Tracer la solution pour un amortissement très faible $\tau = 1000$, puis pour un amortissement plus fort $\tau = 20$, dans l'intervalle $t \in [0, 200]$.

4) **A la résonance ($\omega = \omega_0$), pour divers amortissements**

Reprendre le 3) ci-dessus pour $\omega = 1$. Comparer l'amplitude des oscillations à grand t avec celle observée au 3) dans le cas $\tau = 20$. Interpréter ce résultat.