Mention Physique - L2 - Année 2010-2011
Licence de Sciences et Technologies

LP206: Mathématiques pour physiciens 1

TD N°0 : Rappels

Dérivation

a) Si f et g sont deux fonctions dérivables, donner, dans l'intersection de leurs domaines de définition, les règles de dérivation pour l'addition, le produit, le quotient et la composition de ces fonctions.

b) Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes de la variable x : x^α, e^{ax}, a^x, $\ln x$, $\sin(kx+\phi)$, $\cos(kx+\phi)$, $\tan x$, $\sin(kx+\phi)\cos(kx+\phi)$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, $\cosh x$, $\sinh x$ et $\tanh x$.

c) En appliquant la règle de dérivation d'une fonction composée à la fonction $f^{-1}\circ f$ (où f^{-1} dénote la fonction réciproque à f) montrer que $(\arccos)'(\cos x) = \frac{-1}{\sin x}$ et en déduire la dérivée de $\arccos x$. Donner la dérivée de $\arcsin x$ et de $\arctan x$.

Étude de fonctions

Étudier les fonctions suivantes, dont certaines sont souvent rencontrées en physique. Pour cela étudier leur parité, leurs extrémums, leurs asymptotes, leurs limites quand x tend vers $\pm\infty$, le signe de leurs dérivées premières et secondes, puis les représenter graphiquement.

$$\frac{1+x^2}{1-x} \qquad \frac{x^2+3x+1}{x^3}$$

$$\ln(\mathrm{e}^{2x}+1) \qquad x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Intégration

a) Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule trigonométrique appropriée :

$$\int \sin(2\,x)\cos(3\,x)\;\mathrm{d}x \qquad \int \sin x \sin(2\,x)\;\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2\,x)\,\mathrm{d}x$$

b) En effectuant un changement de variable que vous déterminerez, calculer les intégrales suivantes:

$$\int \cos(3\,x)\;\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{1/2} \tan(2\,x+3)\;\mathrm{d}x \qquad \int \left(3\,x^2+5\right)^{-1}\;\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{2\mathrm{e}^{2\,x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4\,x}+1}}\,\mathrm{d}x$$

c) En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int x\mathrm{e}^{2\,x}\mathrm{d}x \qquad \int \ln x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi/4} (3-5\,x)\cos(4\,x)\,\mathrm{d}x \qquad \int \arctan x\,\mathrm{d}x$$

d) En utilisant la méthode de votre choix, calculer l'intégrale:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^5\,\mathrm{d}x\,.$$

Nombres complexes

a) Soit le nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$. Montrer que le module de z vaut : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Montrer que le complexe conjugué de z, noté $\bar{z}$, vaut $\sqrt{a^2+b^2}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$ avec $\tan\phi = b/a$. Montrer que $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$.

b) Soit le nombre complexe $z = \dfrac{a_1+\mathrm{i}b_1}{a_2+\mathrm{i}b_2}$. Montrer que $z = \sqrt{\dfrac{a_1^2+b_1^2}{a_2^2+b_2^2}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\tan\phi = \dfrac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$.

c) Rappeler la formule de Moivre et les formules d'Euler.

d) Donner la forme algébrique du nombre complexe $(2-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$. Donner la forme polaire du nombre complexe $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

e) Déterminer les racines de l'équation $z^2-(5-4\mathrm{i})z+3(1-3\mathrm{i}) = 0$.