Mention Physique - L2 - Année 2010-2011
Licence de Sciences et Technologies

LP206: Mathématiques pour physiciens 1

TD N°1 : Suites et séries numériques

Suites numériques

A) En utilisant la définition de la convergence d'une suite montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2. \tag{1}$$

B) Déterminer la limite, lorsque $n \to +\infty$, des suites suivantes:
$u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n, \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+\sqrt{n}}.$

C) Montrer que si les suites (u_n) et (v_n) ont les limites u et v respectivement, alors la suite $(u_n v_n)$ a comme limite uv.

D) On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_n = \sqrt{2+u_{n-1}}$.
1) Démontrer que (u_n) est croissante.
2) Démontrer que (u_n) est bornée supérieurement par le majorant $M = 2$.
3) En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

E) Déterminer la valeur limite des expressions infinies suivantes en les définissant par des suites récurrentes:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}} \qquad 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\dots}}} \quad . \tag{2}$$

F) On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k} \tag{3}$$

1) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée à 10^{-3} près par défaut.
2) Démontrer que $\forall n \geq 2$: $u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$.
3) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4) Démontrer que (u_n) tend vers $+\infty$ avec n.

Séries numériques

A) Achille et la tortue

Le philosophe grec Zenon d'Élée niait l'existence du mouvement par le paradoxe suivant : Achille s'élance vers la tortue, qui est à dix mètres et s'éloigne de lui à la vitesse de 1cm/s. Malgré sa vitesse de 10m/s, Achille ne pourra pas rattraper la tortue : au bout d'une seconde, il aura parcouru les 10m, mais la tortue sera 1cm plus loin. Au bout d'1/1000 ème de seconde supplémentaire, il aura parcouru le centimètre, mais entre temps la tortue se sera à nouveau éloignée, etc. Montrer que la connaissance des séries géométriques et de leur somme infinie aurait permis à Zenon de lever son paradoxe.

B) Décimales périodiques.

On considère les développements décimaux périodiques:

$$a_1 = 0,636363\ldots \quad \text{et} \quad a_2 = 3,432432\ldots \tag{4}$$

En faisant intervenir des séries géométriques, déterminer les fractions irréductibles quotient de deux entiers qui représentent ces développements.

C) Séries à termes positifs.

1) Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$u_n = \frac{n^2+n+1}{n^3+1}\ , \qquad u_n = \frac{n^2+n+1}{n^4+1}\ , \qquad u_n = \frac{n}{\sqrt{1+n^2+n^6}}\ , \qquad u_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

2) Est-ce que la série suivante

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) + \ldots$$

converge ou diverge ? Que se passe-t-il si l'on déplace les parenthèses ?

3) Soit $f(n) = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$. On considère alors la suite $u_n = \log f(n+1) - \log f(n)$. Montrer par un développement limité que u_n est d'ordre $1/n^2$ pour n grand. Que peut-on dire de la série $\sum_1^\infty u_n$? En déduire que $f(n)$ a une limite finie C quand $n \to \infty$. On démontre par ailleurs que $C = \sqrt{2\pi}$ et on obtient donc la très utile formule de Stirling pour le comportement asymptotique de n!

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\,.$$

D) Séries à termes de signe quelconque

On rappelle le critère de Leibniz : une suite *alternée* u_n telle que $|u_n|$ décroît vers zéro converge.

Discuter la convergence absolue, la semi-convergence ou la divergence des séries suivantes :

$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{n}\ ;$$

$$u_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}\ ; \qquad u_n = \frac{1}{(-1)^n\, n + \sqrt{n}}\ , \qquad u_n = \sin(\sqrt{n^2+a^2}\pi)\ .$$

E) Série harmonique alternée.

a) Montrer que la série

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

converge pour $|x| < 1$.

b) Pour $x = 1$, montrer que la série alternée $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge encore. Montrer que sa limite, c'est-à-dire $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$, est $\log 2$. Pour cela, calculer la somme de la suite géométrique $\sum_{p=1}^{n} (-x)^p$ et montrer que

$$|1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n - \frac{1}{x+1}| < |x^{n+1}|$$

pour $0 < x < 1$, puis par intégration de 0 à 1, en déduire le résultat.