Mention Physique - L2 - Année 2010-2011
Licence de Sciences et Technologies

LP206 : Mathématiques pour physiciens 1

TD N°2 : Fonctions, suites et séries de fonctions

Fonctions

A) Continuité et dérivabilité

1) Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes. En cas de non continuité et/ou de non dérivabilité, on discutera de manière séparée les limites à gauche et à droite.

$$\frac{1}{1+|x|} \text{ en } x=0 , \qquad \mathrm{E}(x)+x \text{ en } x=1 ;$$
$$\tan(x) \text{ en } x=\pi/2 , \qquad \sqrt{x^{n+1}+x^n} , \ n \in \mathbb{N}^*, \ \text{ en } x=0 .$$

La notation $E(x)$ signifie la partie entière de x.

2) Donner le domaine de définition et dériver les fonctions suivantes

$$\sqrt{(x^2+1)^3} , \qquad \frac{x}{x^2+x^{-2}} , \qquad \arcsin\frac{1}{x} , \qquad \frac{1}{\ln^2 x} , \qquad (1+x)^{-x} .$$

3) Soit une fonction croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

B) Développements limités

1) Donner les développements limités des expressions suivantes, au voisinage de $x=0$.

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} \text{ à l'ordre } O\left(x^2\right) , \qquad \ln\cos x \text{ à l'ordre } O\left(x^5\right) \ ;$$
$$\frac{1}{\tan x} \text{ à l'ordre } O\left(x^2\right) , \qquad (1+\tanh(x^2))^{1/3} \text{ à l'ordre } O\left(x^4\right) \ .$$

2) Le potentiel d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses m_1 et m_2 séparés d'une distance r s'écrit

$$V = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r} ,$$

où $\mathcal{G}$ est la constante gravitationnelle mesurée à $6,674\,28(67)\cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}. En modélisant la Terre par une boule de rayon $R_\mathrm{T} = 6\,400$ km et de masse $M_\mathrm{T} = 6 \cdot 10^{24}$ kg, calculer au premier ordre en $\frac{h}{R_\mathrm{T}}$ le potentiel d'interaction entre la Terre et un objet de masse m à une altitude $h \ll R_\mathrm{T}$ de sa surface. Exprimer la force exercée par la Terre sur la masse m. Identifier et estimer g, l'accélération de la pesanteur terrestre.

C) Limites

1) En utilisant la définition de la limite, montrez que $\lim_{x\to\infty} 1/\sqrt{1+x} = 0$.

2) En utilisant la méthode de votre choix (quantité conjuguée, développement limité, théorème des gendarmes, règle de l'Hospital, changement de variable,...), déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1-\mathrm{e}^x}\ , \qquad \lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x}\right)\ , \qquad \lim_{x\to\infty} x(1-\mathrm{e}^{-1/x})\ ;$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\ , \qquad \lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}\ .$$

Suites de fonctions

A) Convergences

1) Discuter la convergence de la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{n\mathrm{e}^{-x} + x^3}{n+x}\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1/n\ , \\ &= \frac{1}{n\ln(1-1/nx)} \text{ si } x > 1/n\ . \end{aligned}$$

Vérifier que f_n est continue sur $[0, +\infty[$. Étudier la convergence simple, puis uniforme de la suite (f_n).

B) Interversion des opérations

1) Soit la suite de fonctions définies par $f_n(x) = 2\,n^2\,x\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 \mathrm{d}x\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ puis $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}x\ f_n(x)$. Commenter.

2) Étudier la convergence sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin(n^2x)/n$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_{\ln\pi}^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\ f_n(x)$. Comparer $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Séries de fonctions

A) Convergences

1) Pour les séries de fonctions suivantes, étudier la convergence, la continuité et la dérivabilité de la somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)x\mathrm{e}^{-nx}\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x}\ .$$

2) Montrer que la série de terme général $f_n(x) = x\,(1-x)^n$ est simplement convergente sur $[0,1]$. Calculer la somme. La convergence est-elle uniforme ?

3) Soit une série de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Si la série converge, on définit le reste comme

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \ .$$

a) Montrer que s'il existe une série convergente de terme général u_n telle que

$$|f_n(x)| \leq u_n \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

(on parlera de “convergence normale”) alors le reste $R_n(x)$ et la série convergent uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Appliquer ce résultat pour étudier la convergence, la continuité et la dérivabilité de la série de terme général

$$f_n(x) = \frac{\cos x}{1+n^2} \ .$$

B) Séries entières

1) Déterminer de rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-3n} x^n \ , \qquad \sum_{n\geq 1} n^2 x^n \ , \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} x^n \ .$$