

**Mention Physique - L2 - Année 2009-2010
Licence de Sciences et Technologies**

LP206 : Mathématiques pour physiciens 1

TD N°3 : Intégration

Intégrales impropres

1. Appliquer un critère de convergence aux intégrales suivantes, et conclure.

$$\int_0^{+\infty} x^{15} e^{-x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2 + \sqrt{x}} dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2 + \sqrt{x}} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1} dx, \quad \int_0^1 \frac{x^3 - 2x + \sqrt{x}}{x^2} dx, \quad \int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

2. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, les calculer par un changement de variable judicieux.

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{x^4-1}} dx$$

3. Montrer par une intégration par parties que l'intégrale suivante est convergente.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{1+t^2} dt$$

4. Soit A et α deux réels non nuls, $\alpha > 0$, et soit la fonction

$$f(x) = \frac{A}{e^{\alpha x} - 1}.$$

- Quel est le comportement asymptotique de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?
- Quel est le comportement asymptotique de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$?
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^3 f(x) dx$ est-elle convergente ?

La fonction f a une grande importance dans l'étude de ce que l'on appelle en physique le « corps noir ». On désigne ainsi un corps en équilibre thermique avec le rayonnement électromagnétique qu'il émet et absorbe continuellement. L'analyse des signaux radio venant du ciel nous apprend que par le passé notre Univers était un corps noir presque parfait. (Voir la petite introduction au sujet en fin de feuille de TD.)

Calcul de primitives

1. Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^{2x} \sin 3x dx, \quad \int \ln^2 x dx, \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad \int \arctan x dx.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on souhaite calculer par récurrence

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^3 + 1)^n}.$$

(a) Vérifier la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}.$$

(b) En déduire le premier terme de la série, I_1 , à l'aide de primitives connues.

(c) En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n + \frac{1}{3n} \frac{x}{(x^3 + 1)^n}.$$

Fonction Gamma d'Euler

Soit la fonction

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, la fonction Gamma d'Euler Γ est convergente.
2. Par intégration par parties, montrer que

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

3. Vérifier que $\Gamma(1) = 1$.
4. En déduire que la fonction Γ est une extension pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, de la fonction factorielle $\text{Fact}(n) := (n - 1)!$ définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (On rappelle que l'on pose par convention $0! = 1$.)
5. Montrer que pour A et α deux réels strictement positifs, on a l'identité

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Distribution de Maxwell des vitesses

Dans un gaz parfait constitué de N atomes ou molécules identiques, et à l'équilibre thermique avec un thermostat à la température T , la probabilité $dP(\vec{v})$ qu'un atome ou une molécule ait la vitesse \vec{v} à $d\vec{v}$ près est donnée par la loi (dite loi de distribution de Maxwell des vitesses)

$$dP(\vec{v}) = C \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) d\vec{v},$$

où m est la masse de l'atome ou de la molécule, $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann, C est une constante, et $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. On rappelle la valeur de l'intégrale gaussienne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

1. Déterminer la constante de normalisation C .

2. Donner le nombre moyen $dN(\vec{v})$ d'atomes ou de molécules ayant la vitesse \vec{v} à $d\vec{v}$ près.
3. En déduire le nombre moyen $dN(v_x)$ d'atomes ou de molécules dont la composante de la vitesse suivant l'axe (Ox) est égale à v_x à dv_x près, et ce quelles que soient les composantes v_y et v_z de leur vitesse suivant les axes (Oy) et (Oz) .
4. Calculer alors la valeur moyenne $\langle v_x \rangle$ et l'écart quadratique moyen $\Delta v_x := \sqrt{\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2}$. Qu'en est-il des mêmes quantités selon les axes (Oy) et (Oz) ?
5. Donner l'expression du nombre moyen $dN(v)$ d'atomes ou de molécules dont le module de la vitesse est égal à v à dv près.
6. Calculer alors la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ et la vitesse quadratique moyenne $\langle v^2 \rangle$. Comparer cette dernière à $\langle v_x^2 \rangle$. Conclure.

Compléments sur le corps noir

Un corps noir est un corps en équilibre thermique avec le rayonnement électromagnétique qu'il émet et absorbe continuellement. Le spectre en énergie du rayonnement ne dépend que de la température T (température absolue, mesurée en Kelvin) du corps noir. Plus précisément, si $u(\nu, T) d\nu$ est l'énergie du rayonnement par unité de volume, pour des fréquences comprises entre ν et $\nu + d\nu$, alors on démontre que la densité spectrale de rayonnement u est de la forme

$$u(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right), \quad (1)$$

où f est la fonction étudiée à la question 4 du premier exercice. On a donc

$$f(x) = \frac{A}{e^{\alpha x} - 1}, \quad (2)$$

avec $A = 8\pi h/c^3$ et $\alpha = h/k_B$, où $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J · s est la constante de Planck, $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann, et $c = 3 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la lumière dans le vide. La convergence de l'intégrale étudiée dans l'exercice garantit que la densité d'énergie totale $\int_0^{+\infty} u(\nu, T) d\nu$ est finie. Sur la figure 1 on a tracé le graphique de la fonction $u(\nu)$ pour deux valeurs de la température T .

La formule donnant $u(\nu, T)$ est à la fois intéressante historiquement et d'une grande actualité. En effet, Max Planck (1900) a proposé cette formule comme interpolation des deux comportements asymptotiques pour $h\nu \ll k_B T$ et $h\nu \gg k_B T$ qui avaient été déterminés auparavant (formules dites de Rayleigh-Jeans et de Wien respectivement). Il l'a ensuite démontrée à l'aide de sa théorie des quanta, reprise et développée par Albert Einstein (1905). Il s'agit de travaux fondamentaux, à l'origine de la mécanique quantique.

Par ailleurs, des observations astrophysiques ont révélé l'existence dans l'Univers d'un rayonnement de corps noir *essentiellement isotrope* à une température proche de 3 K : c'est le fond diffus cosmologique (ou CMB pour Cosmic Microwave Background en anglais), observé d'abord avec une antenne radio dans le domaine des longueurs d'onde centimétriques par Penzias et Wilson (1965), ce qui leur valu le prix Nobel (1978), puis ces dernières années dans une gamme de longueurs d'onde plus large, avec une très haute précision, à l'aide de satellites (expériences COBE en 1989, puis WMAP en 2001, et la récente mission PLANCK lancée en mai dernier).

L'interprétation de ce phénomène fait appel à la cosmologie de l'Univers primordial. Durant les quelques 380 000 ans suivant le Big-Bang, la température de l'Univers était très élevée ($T \gg 3000$ K). Le rayonnement électromagnétique était alors en équilibre avec la matière ionisée, et l'Univers se comportait comme un corps noir. Quand la température s'est abaissée sous les 3000 K, les atomes neutres ont commencé à se former, et matière et rayonnement se sont « découplés », la matière devenant essentiellement transparente au rayonnement.

L'Univers a depuis continué son expansion. Cette expansion a pour effet de dilater toutes les échelles de longueur (y compris les longueurs d'onde des rayonnements électromagnétiques) par un même facteur a , ou de manière équivalente de *diviser* les fréquences ν par a . On montre qu'elle a également pour effet de diviser la température T par le facteur a , de sorte que le rapport ν/T reste constant. D'après l'équation (1), cela signifie que la *forme* de la densité spectrale d'énergie $u(\nu, T)$ demeure la même au cours de l'expansion. Le rayonnement que l'on observe aujourd'hui est donc le rayonnement « fossile » du corps noir à $T_0 \simeq 3000$ K transformé par l'expansion, c'est-à-dire mesuré à la température T_0/a si notre Univers a subi une dilatation d'un facteur a depuis l'époque du découplage.

Sur la courbe de la figure 2, on peut estimer le maximum de u à une énergie $h\nu \simeq 7 \times 10^{-4}$ eV (on rappelle que $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$). Vérifier que cela conduit à une estimation de la température de 2,88 K. Une analyse plus précise donne une température de 2,73 K ; cela signifie que l'Univers s'est dilaté par un facteur $a \simeq 1100$ depuis l'époque du découplage.

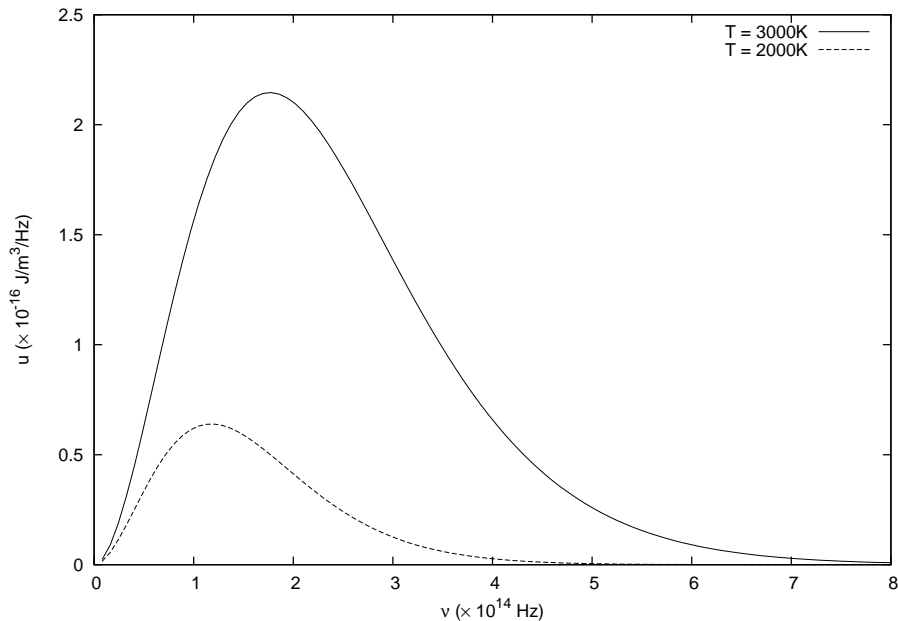


FIG. 1 – La densité spectrale d'énergie du corps noir u tracée en fonction de la fréquence ν pour deux valeurs de la température T .

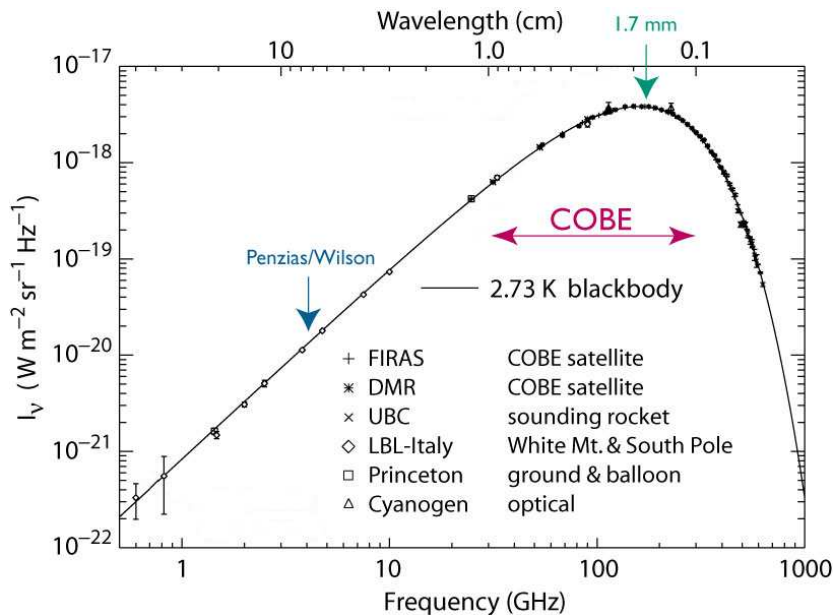


FIG. 2 – Le fond diffus cosmologique, un exemple parfait de corps noir. Ici le flux d'énergie mesuré I_ν , proportionnel à $c u$, est représenté en échelle « log-log ».

Pour en savoir plus :

- S. Weinberg, *Les trois premières minutes de l'Univers*, Seuil, 1988
- Site Web de la NASA sur la mission WMAP : <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- Site Web de l'ESA sur la mission PLANCK : <http://www.esa.int/SPECIALS/Planck/>