

Mention Physique - L2 - Année 2009-2010
 Licence de Sciences et Technologies

LP206: Mathématiques pour physiciens 1

TD N°4 : Séries de Fourier

I - Développements en série de Fourier et applications à la somme de certaines séries.

A) 1) Ecrire la série de Fourier de la fonction 2π -périodique définie par:

$$f(x) = \pi - x \quad \text{si} \quad 0 < x < 2\pi . \quad (1)$$

Etudier la convergence de la série obtenue et comparer votre réponse aux théorèmes généraux.

2) En considérant l'expression obtenue au 1) pour $x = \pi/2$, montrer que:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{4} . \quad (2)$$

B) 1) Ecrire la série de Fourier de la fonction *paire*, 2π -périodique définie par:

$$f(x) = \pi - x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi . \quad (3)$$

(fonction triangle)

Etudier la convergence de la série obtenue et comparer votre réponse aux théorèmes généraux. On comparera aussi avec le cas présenté en A).

2) Peut-on dériver cette série de Fourier ? Si oui, écrire la série dérivée et étudier sa convergence.

3) Montrer que:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} . \quad (4)$$

C) Ecrire la série de Fourier de la fonction 2π -périodique définie par:

$$f(x) = \cos(ax) \quad \text{si} \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad a \neq \text{nombre entier} , \quad (5)$$

et étudier sa convergence vers $f(x)$.

II - Egalité de Parseval et applications à la somme de certaines séries.

A) **Rappels**

1) En supposant que le développement en série de Fourier d'une fonction f , périodique de période T , converge uniformément, montrer que:

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) . \quad (6)$$

2) Interpréter *géométriquement* puis physiquement cette égalité (en considérant, par exemple, f comme l'amplitude d'une onde lumineuse de lumière blanche dispersée par un prisme).

B) **Application 1:** Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période $2l$ définie par: $f(x) = l^2 - x^2$ pour $-l \leq x \leq +l$. En déduire l'égalité:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} , \quad (7)$$

puis, via l'égalité de Parseval:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (8)$$

C) Application 2 : Intensité efficace d'un courant périodique.

L'intensité $i(t)$ d'un courant électrique périodique de période 2π est donnée par

$$i(t) = \frac{t}{\pi} + 1 \quad \text{si} \quad -\pi < t < \pi. \quad (9)$$

- 1) Écrire sa série de Fourier et en déduire le spectre énergétique de ce courant.
- 2) L'intensité efficace I_{eff} est définie par:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}. \quad (10)$$

Calculer I_{eff} :

- par un calcul direct, en utilisant l'expression analytique de $i(t)$.
- à l'aide de l'égalité de Parseval.

III - Phénomène de Gibbs.

Pour illustrer concrètement la notion de non-convergence uniforme d'une série, on va s'intéresser au comportement de la somme partielle (un nombre fini n de termes) d'une série de Fourier au voisinage d'un point de discontinuité de la fonction quand le nombre de termes $n \rightarrow \infty$.

1) Ecrire la série de Fourier de la " fonction créneau" $f(x)$, 2π -périodique, impaire, égale à $\pi/4$ si $0 < x < \pi$ et caractériser sa convergence.

2) On désigne par $f_n(x)$ la somme partielle des n premiers termes de la série. On veut étudier graphiquement la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \pi]$. En utilisant la relation $f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, tracer successivement $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ et $f_4(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Remarquer que $f_n(x)$ effectue des oscillations autour de la valeur "créneau" $y \simeq \pi/4$

3) On veut maintenant montrer que l'ordonnée y_n du premier maximum de $f_n(x)$ tend vers une valeur $M > \pi/4$, quand $n \rightarrow \infty$, illustrant ainsi de façon quantitative la non-convergence uniforme de la série de Fourier vers la fonction créneau.

- 3-a. Pour cela on commence par obtenir une expression *compacte* pour $f_n(x)$:
- calculer $f'_n(x)$ puis $2 \sin x f'_n(x)$ en utilisant la formule

$$2 \sin x \cos(2p-1)x = \sin 2px - \sin(2p-2)x;$$

- en déduire que:

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t} dt. \quad (11)$$

- 3-b. Utiliser cette expression pour obtenir la valeur x_n du premier maximum de la fonction $f_n(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$; donner alors l'ordonnée y_n correspondante sous la forme, d'une part d'une somme finie et d'autre part sous forme de l'intégrale définie suivante :

$$y_n = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt. \quad (12)$$

Obtenir en particulier les valeurs numériques de y_n pour $n = 1, \dots, 4$.

- 3-c. Esquisser le tableau de variation de $f_n(x)$ pour n quelconque et constater que $f_n(x)$ oscille en présentant n maxima sur $[0, \pi]$. Montrer de plus que la courbe est bien symétrique par rapport à $\pi/2$.
- 3-d. Remarquant que la variable t de l'intégrale précédemment trouvée reste très petite, faire un raisonnement indiquant (sans chercher à être parfaitement rigoureux dans un premier temps) que y_n tend, quand n tend vers l'infini, non pas vers $\pi/4$ mais vers la valeur:

$$M = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du = 0.926 > \frac{\pi}{4}. \quad (13)$$

Question subsidiaire : essayer de rendre rigoureuse la démonstration du résultat précédent.

IV. Cordes vibrantes : corde frappée, pincée.

On considère une corde de longueur l , fixée en ses extrémités, deux points de l'axe Ox d'abscisses $x = 0$ et $x = l$. Au repos, la corde est tendue. On va décrire ses vibrations par le déplacement transverse $u(x, t)$ au point x , $0 \leq x \leq l$, et au temps t .

A) Généralités

La propagation des vibrations transverses $u(x, t)$ d'une telle corde est régie par l'équation des ondes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad 0 < x < l \quad 0 < t < \infty \quad (14)$$

sujette aux conditions aux limites:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \end{cases} \quad 0 < t < \infty \quad (15)$$

et à des conditions initiales:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l \quad (16)$$

qui permettent de spécifier la façon dont la corde est excitée.

1) Dans (14), la vitesse v est donnée par la formule

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

où F est la tension (une force) exercée sur la corde et μ est la *masse linéique*, c'est à dire la masse par unité de longueur de la corde.

Vérifier que cette formule est compatible avec l'analyse dimensionnelle.

2) On cherche des solutions à l'équation (14) sous la forme:

$$u(x, t) = X(x).T(t). \quad (17)$$

• a) Montrer que $\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$ et $\frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$ sont égales à une même constante K . Trouver des fonctions élémentaires qui satisfont les équations en X et en T . Quel doit être le signe de K pour que la solution soit physiquement acceptable et quelle est alors la forme de $X(x)$ et de $T(t)$? On montrera qu'une solution physiquement acceptable doit avoir $K < 0$. et par conséquent que $X(x)$ et $T(t)$ doivent être des fonctions sinusoïdales. On notera ω la pulsation de T , k celle de X .

• b) Montrer que les conditions aux limites (15) imposent à ω de ne pouvoir prendre qu'une série de valeurs discrètes notées ω_n , $n \in \mathbb{N}^*$ et en donner l'expression. En déduire que pour des grandeurs l et v fixées, la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ ne peut elle-même prendre qu'une suite de valeurs λ_n . Exprimer la longueur l en fonction de λ_n . Quelle est l'interprétation de la formule obtenue? Combien la corde a-t-elle de *nœuds*, c'est à dire de points où le déplacement est constamment nul?

Tout ceci définit ce qu'on appelle le n -ième mode de vibration de la corde : le mode d'indice $n = 1$ est le *fondamental*, le mode d'indice n est le n -ième *harmonique*.

• c) Quelle est l'expression d'une solution $u_n(x, t)$ correspondant au mode de vibration d'indice n ? En déduire que la solution générale de l'équation (14) s'écrit sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right] \sin \frac{n\pi}{l} x \equiv F(x + vt) + G(x - vt). \quad (18)$$

• d) Montrer que la connaissance des conditions initiales du mouvement (eq.16) permet de calculer les coefficients a_n et b_n en fonction de $f(x)$ et $g(x)$ (on utilisera les décompositions en série de Fourier).

B) Corde de piano.

A l'instant $t = 0_-$, la corde est immobile dans la position d'équilibre $u(x, 0) = 0$. Elle est frappée avec un petit marteau de largeur e (avec $e \ll l$) situé entre les abscisses $x = a$ et $x = a + e$, qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. Dans ces conditions, la vitesse de chaque point de la corde à l'instant $t = 0_+$ est modélisée par une fonction créneau:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \dot{u}_0 & \text{pour } a \leq x \leq a + e \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \quad (19)$$

- a) Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de \dot{u}_0, e, n, l, v et a .
- b) Dans le cas $a = \frac{l}{2}$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde frappée ? Donner $u(x, t)$.
- c) On admet que l'énergie de vibration d'un mode est donnée par:

$$E_n = \frac{\pi^2 \mu v^2}{4l} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \quad (20)$$

μ étant la masse linéique de la corde.

S'assurer que cette formule est dimensionnellement correcte.

Donner les variations de l'amplitude et de l'énergie en fonction de n . Conclusion ?

C) Corde de clavecin.

La corde précédente de longueur l est à présent lâchée à $t = 0$ de telle manière que sa vitesse initiale $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$ soit nulle. L'endroit $x = a$ où le pincement a lieu joue vis à vis des harmoniques présents le même rôle que celui de la frappe. Aussi pour faire la comparaison avec le cas précédent, nous nous limitons au cas $a = \frac{l}{2}$, si bien que la position initiale de la corde est définie par la fonction triangle suivante:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{2h}{l}x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ u(x, 0) = \frac{2h}{l}(l-x) & \text{pour } \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases} \quad (21)$$

- a) Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de n, h et l et en déduire l'énergie de vibration E_n . Comment varient ces grandeurs en fonction de n ?
(on pourra se servir des résultats de l'exercice I-B)
- b) Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de clavecin et apprécier la différence de timbre sonore dans le cadre de l'étude ci-dessus.

D) Corde de guitare.

Le pincement de la corde peut être réalisé de manière plus délicate que précédemment; lorsqu'il est effectué avec le doigt comme pour une corde de guitare ou de harpe, les conditions initiales plus régulières suivantes sont adoptées:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{4h}{l^2}x(l-x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Reprendre les calculs de la question précédente.

E) Tirer les conclusions de ces trois études.