UNIVERSITE

Mention Physique - L2 - Année 2010-2011
Licence de Sciences et Technologies

LP206: Mathématiques pour physiciens 1

TD N°4 : Séries de Fourier

I - Développements en série de Fourier et applications à la somme de certaines séries.

A) 1) Ecrire la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par:

$$f(x) = \pi - x \quad \text{si} \quad 0 < x < 2\pi \ . \tag{1}$$

Etudier la convergence de la série obtenue et comparer votre réponse aux théorèmes généraux.
2) En considérant l'expression obtenue au 1) pour $x = \pi/2$, montrer que:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{4} \ . \tag{2}$$

B) 1) Ecrire la série de Fourier de la fonction *paire*, 2π-périodique définie par:

$$f(x) = \pi - x \quad \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \ . \tag{3}$$

(*fonction triangle*)
Etudier la convergence de la série obtenue et comparer votre réponse aux théorèmes généraux. On comparera aussi avec le cas présenté en A).
2) Peut-on dériver cette série de Fourier ? Si oui, écrire la série dérivée et étudier sa convergence.
3) Montrer que:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ . \tag{4}$$

C) Ecrire la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par:

$$f(x) = \cos(ax) \quad \text{si} \quad -\pi \le x \le \pi \quad a \ne \text{nombre entier} \ , \tag{5}$$

et étudier sa convergence vers $f(x)$.

II - Egalité de Parseval et applications à la somme de certaines séries.

A) **Rappels**
1) En supposant que le développement en série de Fourier d'une fonction f, périodique de période T, converge uniformément, montrer que:

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [f(t)]^2 \, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \ . \tag{6}$$

2) Interpréter *géométriquement* puis physiquement cette égalité (en considérant, par exemple, f comme l'amplitude d'une onde lumineuse de lumière blanche dispersée par un prisme).
B) **Application 1:** Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période $2l$ définie par: $f(x) = l^2 - x^2$ pour $-l \le x \le +l$. En déduire l'égalité:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ , \tag{7}$$

puis, via l'égalité de Parseval:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \; . \tag{8}$$

C) **Application 2 : Intensité efficace d'un courant périodique.**
L'intensité $i(t)$ d'un courant électrique périodique de période 2π est donnée par

$$i(t) = \frac{t}{\pi} + 1 \qquad \text{si} \qquad -\pi < t < \pi \; . \tag{9}$$

1) Écrire sa série de Fourier et en déduire le spectre énergétique de ce courant.
2) L'intensité efficace I_{eff} est définie par:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\; dt} \; . \tag{10}$$

Calculer I_{eff}:
— par un calcul direct, en utilisant l'expression analytique de $i(t)$.
— à l'aide de l'égalité de Parseval.

III - Phénomène de Gibbs.

Pour illustrer concrétement la notion de non-convergence uniforme d'une série, on va s'intéresser au comportement de la somme partielle (un nombre fini n de termes) d'une série de Fourier au voisinage d'un point de discontinuité de la fonction quand le nombre de termes $n \to \infty$.

1) Ecrire la série de Fourier de la " fonction créneau" $f(x)$, 2π-périodique, impaire, égale à $\pi/4$ si $0 < x < \pi$ et caractériser sa convergence.

2) On désigne par $f_n(x)$ la somme partielle des n premiers termes de la série. On veut étudier graphiquement la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \pi]$. En utilisant la relation $f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, tracer successivement $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ et $f_4(x)$ sur l'intervalle $[0\,,\;\pi]$.

Remarquer que $f_n(x)$ effectue des oscillations autour de la valeur "créneau" $y \simeq \pi/4$

3) On veut maintenant montrer que l'ordonnée y_n du premier maximum de $f_n(x)$ tend vers une valeur $M > \pi/4$, quand $n \to \infty$, illustrant ainsi de façon quantitative la non-convergence uniforme de la série de Fourier vers la fonction créneau.

- 3-a. Pour celà on commence par obtenir une expression *compacte* pour $f_n(x)$:
  - calculer $f_n'(x)$ puis $2\sin x f_n'(x)$ en utilisant la formule

  $$2\sin x\cos(2p-1)x = \sin 2px - \sin(2p-2)x\,;$$

  - en déduire que:

  $$f_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t} dt \; . \tag{11}$$

- 3-b. Utiliser cette expression pour obtenir la valeur x_n du premier maximum de la fonction $f_n(x)$ sur l'intervalle $[0\,,\;\pi]$; donner alors l'ordonnée y_n correspondante sous la forme, d'une part d'une somme finie et d'autre part sous forme de l' intégrale définie suivante :

  $$y_n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\; dt \, . \tag{12}$$

  Obtenir en particulier les valeurs numériques de y_n pour $n = 1, ..., 4$.

- 3-c. Esquisser le tableau de variation de $f_n(x)$ pour n quelconque et constater que $f_n(x)$ oscille en présentant n maxima sur $[0, \pi]$. Montrer de plus que la courbe est bien symétrique par rapport à $\pi/2$.

- 3-d. Remarquant que la variable t de l'intégrale précédemment trouvée reste très petite, faire un raisonnement indiquant (sans chercher à être parfaitement rigoureux dans un premier temps) que y_n tend, quand n tend vers l'infini, non pas vers $\pi/4$ mais vers la valeur:

  $$M = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\; du = 0.926 > \frac{\pi}{4} \; . \tag{13}$$

  <u>Question subsidiaire</u> : essayer de rendre rigoureuse la démonstration du résulat précédent.

IV. Cordes vibrantes : corde frappée, pincée.

On considère une corde de longueur l, fixée en ses extrémités, deux points de l'axe Ox d'abscisses $x = 0$ et $x = l$. Au repos, la corde est tendue. On va décrire ses vibrations par le déplacement transverse $u(x,t)$ au point x, $0 \leq x \leq l$, et au temps t.

A) **Généralités**
La propagation des vibrations transverses $u(x,t)$ d'une telle corde est régie par l'équation des ondes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0 < x < l \qquad 0 < t < \infty \tag{14}$$

sujette aux conditions aux limites:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty \tag{15}$$

et à des conditions initiales:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq l \tag{16}$$

qui permettent de spécifier la façon dont la corde est excitée.
1) Dans (14), la vitesse v est donnée par la formule

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ ,$$

où F est la tension (une force) exercée sur la corde et μ est la *masse linéïque*, c'est à dire la masse par unité de longueur de la corde.
Vérifier que cette formule est compatible avec l'analyse dimensionnelle.
2) On cherche des solutions à l'équation (14) sous la forme:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \ . \tag{17}$$

- a) Montrer que $\dfrac{1}{X(x)}\dfrac{d^2X(x)}{dx^2}$ et $\dfrac{1}{v^2T(t)}\dfrac{d^2T(t)}{dt^2}$ sont égales à une même constante K. Trouver des fonctions élémentaires qui satisfont les équations en X et en T. Quel doit être le signe de K pour que la solution soit physiquement acceptable et quelle est alors la forme de $X(x)$ et de $T(t)$? On montrera qu'une solution physiquement acceptable doit avoir $K < 0$. et par conséquent que $X(x)$ et $T(t)$ doivent être des fonctions sinusoïdales. On notera ω la pulsation de T, k celle de X.

- b) Montrer que les conditions aux limites (15) imposent à ω de ne pouvoir prendre qu'une série de valeurs discrètes notées ω_n, $n \in N^*$ et en donner l'expression. En déduire que pour des grandeurs l et v fixées, la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ ne peut elle-même prendre qu'une suite de valeurs λ_n. Exprimer la longueur l en fonction de λ_n. Quelle est l'interprétation de la formule obtenue ? Combien la corde a-t-elle de *nœuds*, c'est à dire de points où le déplacement est constamment nul ?

  Tout ceci définit ce qu'on appelle le n-ième mode de vibration de la corde : le mode d'indice $n = 1$ est le *fondamental*, le mode d'indice n est le n-ième *harmonique*.

- c) Quelle est l'expression d'une solution $u_n(x,t)$ correspondant au mode de vibration d'indice n ? En déduire que la solution générale de l'équation (14) s'écrit sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi v}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi v}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x \equiv F(x+vt) + G(x-vt) \ . \tag{18}$$

- d) Montrer que la connaissance des conditions initiales du mouvement (eq.16) permet de calculer les coefficients a_n et b_n en fonction de $f(x)$ et $g(x)$ (on utilisera les décompositions en série de Fourier).

B) **Corde de piano.**

A l'instant $t = 0_-$, la corde est immobile dans la position d'équilibre $u(x, 0) = 0$. Elle est frappée avec un petit marteau de largeur e (avec $e \ll l$) situé entre les abscisses $x = a$ et $x = a + e$, qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. Dans ces conditions, la vitesse de chaque point de la corde à l'instant $t = 0_+$ est modélisée par une fonction créneau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \dot{u}_0 \qquad \text{pour} \qquad a \leq x \leq a + e \\[2ex] \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad \text{partout ailleurs .} \end{cases} \tag{19}$$

- a) Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de $\dot{u}_0, e, n, l, v$ et a.
- b) Dans le cas $a = \dfrac{l}{2}$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde frappée ? Donner $u(x, t)$.
- c) On admet que l'énergie de vibration d'un mode est donnée par:

$$E_n = \frac{\pi^2 \mu v^2}{4l} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \tag{20}$$

  μ étant la masse linéïque de la corde.

  S'assurer que cette formule est dimensionnellement correcte.

  Donner les variations de l'amplitude et de l'énergie en fonction de n. Conclusion ?

C) **Corde de clavecin.**

La corde précédente de longueur l est à présent lâchée à $t = 0$ de telle manière que sa vitesse initiale $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}$ soit nulle. L'endroit $x = a$ où le pincement a lieu joue vis à vis des harmoniques présents le même rôle que celui de la frappe. Aussi pour faire la comparaison avec le cas précédent, nous nous limitons au cas $a = \dfrac{l}{2}$, si bien que la position initiale de la corde est définie par la fonction triangle suivante:

$$\begin{cases} u(x,0) = \dfrac{2h}{l} x \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq x \leq \dfrac{l}{2} \\[2ex] u(x,0) = \dfrac{2h}{l}(l - x) \qquad \text{pour} \qquad \dfrac{l}{2} \leq x \leq l \text{ .} \end{cases} \tag{21}$$

- a) Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de n, h et l et en déduire l'énergie de vibration E_n. Comment varient ces grandeurs en fonction de n ?

  (on pourra se servir des résultats de l'exercice I-B)
- b) Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de clavecin et apprécier la différence de timbre sonore dans le cadre de l'étude ci-dessus.

D) **Corde de guitare.**

Le pincement de la corde peut être réalisé de manière plus délicate que précédemment; lorsqu'il est effectué avec le doigt comme pour une corde de guitare ou de harpe, les conditions initiales plus régulières suivantes sont adoptées:

$$\begin{cases} u(x,0) = \dfrac{4h}{l^2} x(l - x) \\[2ex] \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \text{ .} \end{cases} \tag{22}$$

Reprendre les calculs de la question précédente.

E) **Tirer les conclusions de ces trois études.**