Mention Physique - L2 - Année 2009/2010
Licence de Sciences et Technologies

LP 206 : Mathématiques pour physiciens I

TD N° 5 : Équations différentielles

Rappels sur les équations différentielles linéaires

La solution générale d'une équation différentielle *linéaire* d'ordre n avec second membre (« équation inhomogène »),

$$\sum_{k=0}^{n} C_k[t] \, \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}[t] = f[t], \tag{1}$$

est la somme d'*une* solution particulière x_p de cette équation ($x_\mathrm{p} = 0$ convient si le second membre est nul) et de *la* solution générale x_h de l'équation sans second membre (« équation homogène »). Cette dernière dépend de n paramètres arbitraires.

L'équation (1) a une *unique solution* satisfaisant n conditions initiales, par exemple la donnée de $(\mathrm{d}^k x/\mathrm{d}t^k)$ en $t = 0$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Cette unique solution est obtenue en imposant ces n conditions à la solution générale de l'équation *inhomogène*.

Dans le cas d'équations différentielles à coefficients constants (c.-à-d. si les C_k sont indépendants de t), la solution générale de l'équation sans second membre est obtenue en cherchant des solutions de la forme $x[t] = \mathrm{e}^{r\,t}$. L'équation différentielle se traduit par l'équation *caractéristique*

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \, r^k = 0,$$

qui admet n solutions (« racines ») r_j ($j \in [\![1, n]\!]$), réelles ou complexes. Si toutes ces racines sont distinctes, la solution générale cherchée est la combinaison linéaire $x_\mathrm{h}[t] = \sum_{j=1}^{n} A_j \, \mathrm{e}^{r_j\,t}$. S'il y a k racines r_j de multiplicité m_j, $x_\mathrm{h}[t] = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{m_j-1} A_{j,\,i} \, t^i \, \mathrm{e}^{r_j\,t}$.

A. Équations différentielles linéaires

1. Donner la solution générale des équations différentielles suivantes :
   - *a.* $x' + a\,x = 0$.
   - *b.* $x' + 3\,x = \mathrm{e}^t$.
   - *c.* $x'' - x = 0$.
   - *d.* $x'' - 2\,x' + 2\,x = 0$.
   - *e.* $x'' - 3\,x' + 2\,x = 0$.
   - *f.* $x'' + 3\,x' + 2\,x = 4$.
   - *g.* $x'' + x' + x = t^2$.
2. Pour chacune des équations différentielles suivantes, écrire la solution générale, puis chercher la solution satisfaisant les conditions initiales indiquées :
   - *a.* $x'[t] + x[t] = \mathrm{e}^{-t/2}$, $x[0] = x_0$.
   - *b.* $x'' - 2\,x' + 5\,x = 0$, $x'[0] = 4$, $x[0] = 2$.
   - *c.* $x'' + 4\,x' + 4\,x = 0$, $x'[0] = 1$, $x[0] = 1$.
   - *d.* $x''[t] + x'[t] + x[t] = 0$, $x'[0] = v_0$, $x[0] = x_0$.
   - *e.* $x''[t] + 3\,x'[t] + 2\,x[t] = \cos[\omega\,t]$, $x'[0] = v_0$, $x[0] = x_0$.
3. Montrer que $x''' + x'' - 10\,x' - 6\,x = 0$ admet $\mathrm{e}^{3\,t}$ comme solution particulière. Quelle est la solution générale ?

B. Quelques problèmes physiques

1. Une grandeur (non-nulle) $y[t]$ évolue à une « vitesse » proportionnelle à elle-même. On sait par ailleurs que cette grandeur double au bout d'un temps t_2. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?
2. **Variation de la densité d'un gaz parfait avec l'altitude. Pression barométrique**
   a. Soient $P[z]$ la pression atmosphérique et $n[z]$ le nombre de molécules (de masse m) par unité de volume à l'altitude z. Écrire l'équation d'équilibre d'une tranche de gaz horizontale de section S et d'épaisseur $\mathrm{d}z$ sous l'action de la gravité et des forces de pression.
   b. L'air atmosphérique est supposé se comporter comme un gaz parfait, donc obéir à la loi $P[z]\ V = N\ k_{\mathrm{B}}\ T$, où V est un volume à l'altitude z, N le nombre de molécules qu'il contient, k_{B} la constante de Boltzmann et T la température, supposée uniforme. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $P[z]$.
   c. La résoudre en termes de la pression $P[0] = P_0$ et en déduire la loi de variation de la pression avec l'altitude, ou *loi barométrique*.
3. **Chute d'un corps freiné par la résistance de l'air**
   On étudie la chute libre d'un point matériel de masse m soumis à la gravité et à une force de frottement opposée et proportionnelle à sa vitesse, de norme $F = m\ v/\tau$, où $v = \|\vec{v}\|$ et τ est une constante.
   a. Montrer que la vitesse satisfait une équation linéaire du premier ordre non homogène (E).
   b. Chercher la solution générale de l'équation homogène et donner une solution particulière de l'équation non homogène.
   c. Résoudre alors l'équation (E), puis déterminer la loi $z[t]$, en supposant qu'au temps $t = 0$ le corps est lâché de l'altitude h avec une vitesse nulle.
   d. Quelle est la vitesse au bout d'un temps long devant τ ?

C. Équations à variables séparées

1. Trouver une famille à un paramètre de solutions pour les équations suivantes, en précisant bien dans quel intervalle de la variable t ces solutions existent :
   a. $\sqrt{1-t^2}\ x' = t\ \sqrt{1-x}$
   b. $1 + x^2 = (1 + t^2) \cdot x'$
   c. $x' + t \cdot (x + 1) = 0$
2. **Vitesse d'un parachutiste**
   Un parachutiste tombe à une vitesse v_0 au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps à ce moment-là. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on note $v[t]$ la vitesse (en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) du parachutiste à l'instant t. On admet que la résistance de l'air est donnée par $R = C\ P\ v^2$, où P est le poids du parachutiste avec son équipement et C une constante.
   a. Donner l'équation différentielle satisfaite par v.
   b. Résoudre cette équation différentielle.
   c. Préciser la limite de v lorsque t tend vers $+\infty$.

D. Équation de Bernoulli

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'[t] = a\ y[t] + b\ y^n[t].$$

On se propose de rechercher les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $z = y^{1-n}$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par z et la résoudre.
2. En déduire la solution $y[t]$ pour $t \geq 0$, telle que $y^{1-n}[0] = 0$.
   Que donne le cas $n = 0$?

E. Système d'équations linéaires du premier ordre

On considère un système décrit par deux degrés de liberté $x_1[t]$ et $x_2[t]$, couplés par des équations linéaires du premier ordre à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a\ x_1 + b\ x_2, \\ \dot{x}_2 = c\ x_1 + d\ x_2. \end{cases} \tag{2}$$

1. De combien de conditions initiales a-t-on besoin a priori pour déterminer complètement une solution de ce système ?
2. Montrer en dérivant et combinant ces deux équations qu'elles conduisent à l'équation du second ordre suivante pour $x = x_1$ ou x_2 :

$$\ddot{x} - (a + d) \cdot \dot{x} + (a\ d - b\ c) \cdot x = 0. \tag{3}$$

3. Si l'on cherche une solution de la forme $x[t] = X\ \mathrm{e}^{\lambda\ t}$, avec λ et X constants, quelle condition doit satisfaire λ ?
4. Écrire deux solutions linéairement indépendantes de (3). Quelle est la solution générale du système (2) ?