

**Soutien : Gaz de Lorentz et marche aléatoire**

13 mai 2015

**1 Gaz de Lorentz**

On considère un gaz bidimensionnel de particules ayant toutes la vitesse  $V = |\mathbf{v}|$ , en présence de disques durs de rayon  $a$  et de densité  $\rho$  vérifiant  $\rho a^2 \ll 1$ . On appelle  $f_t(\theta)$  la densité de probabilité qu'une particule ait la vitesse  $(V \cos \theta, V \sin \theta)$ .

On appelle  $W(\theta', \theta)dt$  densité de probabilité qu'a une particule de passer de la direction  $\theta$  à la direction  $\theta'$  pendant  $dt$  suite à un choc avec un disque dur.

- 1) Exprimer la probabilité qu'une particule ne change pas de direction pendant  $dt$  en fonction de  $W$ .
- 2) Écrire  $f_{t+dt}(\theta)$  et en déduire l'équation de Boltzmann vérifiée par la densité  $f_t(\theta)$ .
- 3) Expliquer pourquoi on peut écrire  $W(\theta, \theta')$  comme une fonction d'une seule variable. *A priori*, comment cette fonction dépend-elle des constantes dimensionnées  $a$ ,  $V$  et  $\rho$ ?
- 4) Donner la limite de  $f_t(\theta)$  aux temps longs et le temps caractéristique qu'il faut attendre pour atteindre l'équilibre.
- 5) Donner une expression explicite de  $W(\theta', \theta)$ .

**2 Carctère récurrent ou transient d'une marche aléatoire**

On considère une marche aléatoire sur le réseau hypercubique en dimension  $d$  (c'est-à-dire carré pour  $d = 2$ , cubique pour  $d = 3$ , etc.). À  $t = 0$ , le marcheur se trouve en  $\mathbf{x} = 0$  et a une probabilité  $\lambda dt$  de sauter vers chacun des  $2d$  sites voisins pendant  $dt$ .

- 1) Montrer que la probabilité  $P_t(\mathbf{x})$  qu'à l'instant  $t$  le marcheur se trouve en  $\mathbf{x}$  vérifie l'équation

$$\frac{dP_t(\mathbf{x})}{dt} = \lambda \sum_{i=1}^{2d} [P_t(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - P_t(\mathbf{x})]. \quad (1)$$

- 2) Exprimer la probabilité  $P_t(\mathbf{x})$  aux temps longs.
- 3) De quelle manière  $P_t(0)$  décroît-il aux temps longs?
- 4) Donner le temps moyen passé à l'origine lors de chaque visite.
- 5) Calculer le temps moyen passé en  $\mathbf{x} = 0$  entre  $t_0$  et  $T$ , où  $t_0$  est suffisamment grand.
- 6) En déduire que le nombre moyen de retours à l'origine d'une marche infiniment longue est infini si  $d \leq 2$  et fini si  $d > 2$ .