Examen

21 juin 2013

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

1 Question de cours sur l'équation de Langevin

On considère une particule légère dans un potentiel $U(x)$ qui croît à l'infini et soumise à la force de Langevin :

$$\gamma \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{dU}{dx} + L(t), \tag{1}$$

avec

$$\langle L(t) \rangle = 0, \qquad \langle L(t)L(t') \rangle = \Gamma\, \delta(t - t'). \tag{2}$$

1) Montrer comment obtenir l'équation de Fokker-Planck associée à cette équation stochastique.
2) Quelle est la solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck ?
3) Que faut-il supposer pour que cette solution stationnaire corresponde à un équilibre à la température T ?

2 Question de cours sur la théorie de Landau

1) On considère un système magnétique de taille N dans un champ magnétique h à l'équilibre à la température T. Quand $h = 0$ et $N = \infty$, le système présente une transition de phase à la température T_c. Quand N est grand mais fini, on suppose que pour $t = T - T_c$ et h petits l'aimantation moyenne par spin $\langle m \rangle$ peut s'écrire.

$$\langle m \rangle \simeq \frac{1}{N^x} F(N^y t, N^z h). \tag{3}$$

où F est une certaine fonction à deux paramètres. Exprimer en fonction de x et de y les valeurs des exposants critiques β, γ et δ définis par :

$$\langle m \rangle \propto (T_c - T)^\beta \text{ pour } h = 0, \quad \chi \propto |T - Tc|^{-\gamma} \text{ pour } h = 0, \quad \langle m \rangle \propto h^{1/\delta} \text{ pour } T = T_c. \tag{4}$$

2) On suppose maintenant que la fonction de grande déviation de l'aimantation m par spin a la forme

$$\text{Proba}(m) \simeq K(T, h, N) e^{-N\left[-\frac{hm}{k_B T} + A(T)m^2 + B(T)m^4 + C(T)m^6 + \cdots\right]}, \tag{5}$$

où le paramètre $K(T, h, N)$ assure la normalisation. On suppose de plus que pour T proche de T_c on a

$$A(T) \simeq a \times (T - T_c), \qquad B(T) \simeq b, \tag{6}$$

avec $a > 0$ et $b > 0$. La variable aléatoire m dépend a priori des trois paramètres N, h et $t = T - T_c$. Montrer à partir des équations (5) et (6) que l'on retrouve l'équation (3) pour h proche de zéro, T proche de T_c et N grand (mais pas infini), et donner les valeurs de x, y et z.

3 Dynamique d'une chaine d'Ising à $T = 0$ et problème de réaction-diffusion

On considère une chaine d'Ising à température T :

$$E = -J \sum_{i=1}^{L} S_i S_{i+1} \tag{7}$$

avec des conditions au bord périodiques $S_{L+1} = S_1$ et $J > 0$.

1) Pendant chaque intervalle de temps infinitésimal dt, chaque spin S_i a une probabilité dt d'être actualisé. S'il est actualisé, il prend la valeur

$$S_i(t+dt) = \begin{cases} +1 & \text{avec la proba } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\Big(\frac{J}{k_B T}[S_{i-1}(t) + S_{i+1}(t)]\Big), \\ -1 & \text{avec la proba } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\Big(\frac{J}{k_B T}[S_{i-1}(t) + S_{i+1}(t)]\Big). \end{cases} \tag{8}$$

Montrer que cette dynamique vérifie le bilan détaillé. (Toutes les questions qui suivent sont indépendantes de cette première question.)

2) À $T = 0$, montrer que cette dynamique est équivalente à celle d'un modèle de votants :

$$S_i(t+dt) = \begin{cases} S_i(t) & \text{avec la proba } 1 - dt, \\ S_{i-1}(t) & \text{avec la proba } \frac{dt}{2}, \\ S_{i+1}(t) & \text{avec la proba } \frac{dt}{2}. \end{cases} \tag{9}$$

On suppose $T = 0$ dans tout le reste de l'exercice

3) Écrire l'équation d'évolution des fonctions de corrélations $\langle S_i(t) S_j(t) \rangle$ avec $i < j$.

4) On suppose qu'à $t = 0$, les spins sont décorrélés de moyenne nulle. Expliquer pourquoi à tout temps $\langle S_i(t) S_j(t) \rangle$ avec $i < j$ ne dépend que de t et de la distance $j - i$:

$$\langle S_i(t) S_j(t) \rangle = g_t(j-i) \qquad \text{pour } i < j \tag{10}$$

Donner l'équation satisfaite par $g_t(h)$. Que valent $g_0(h)$ et $g_t(0)$?

5) Expliquer pourquoi on s'attend aux temps longs à avoir une solution de la forme

$$g_t(h) \approx f\Big(\frac{h}{\sqrt{t}}\Big). \tag{11}$$

Déterminer la fonction f.

6) Au lieu de considérer les spins, on peut décrire le système par la position des interfaces : si deux spins voisins sont opposés, on dira qu'il y a une interface que l'on identifiera à une particule A sur le lien qui les sépare. Si deux spins voisins sont alignés, le lien qui les sépare est vide. Quelle est la dynamique des particules A ?

7) En utilisant les résultats de la question 5), donner la décroissance de la densité $\rho_A(t)$ de particules aux temps longs.

8) On pose $\tau_i = 1$ s'il y a une particule sur le lien $(i, i+1)$ et $\tau_i = 0$ sinon. Écrire l'expression de $\tau_i(t)$ en fonction des $S_i(t)$, puis donner la dynamique de τ_i, c'est-à-dire les valeurs possibles de $\tau_i(t+dt)$ en fonction des $\tau_i(t)$ avec leur probabilités, comme dans l'équation (9).

9) À partir de cette dynamique, donner l'évolution de $\rho_A(t) = \langle \tau_i(t) \rangle$ dans l'approximation de champ moyen et résoudre.

10) Comparer la décroissance trouvée à la question 9) avec celle obtenue à la question 7). Quelle est l'origine de la différence ?

4 Théorème de fluctuation et relations d'Onsager

1) On considère deux réservoirs A et B qui échangent des particules entre eux. Pendant chaque intervalle de temps infinitésimal dt il y a une probabilité $w_n \, dt$ que n particules sautent ensemble du réservoir A vers le réservoir B (ce nombre n peut être positif ou négatif). Écrire l'équation d'évolution de la probabilité $P_t(Q)$ que Q particules passent du réservoir A au réservoir B pendant le temps t.
2) Montrer que
$$\left\langle e^{\lambda Q} \right\rangle \sim e^{\mu(\lambda)\, t} \tag{12}$$
et donner l'expression de $\mu(\lambda)$.
3) Quelle est la condition sur $P_t(Q)$ pour que le système soit à l'équilibre ? Qu'en déduit-on sur $\mu(\lambda)$ à l'équilibre ? Que faut-il supposer sur les w_n pour qu'ils vérifient cette condition d'équilibre ?
4) On suppose maintenant que
$$w_n = \phi(n) e^{\alpha n}$$
où ϕ vérifie $\phi(n) = \phi(-n)$. Montrer que $\mu(\lambda)$ vérifie alors une relation de type Gallavotti-Cohen (c'est à dire une relation du type théorème de fluctuation).
5) Calculer $\frac{\langle Q \rangle}{t}$ pour α petit et $\frac{\langle Q^2 \rangle}{t}$ pour $\alpha = 0$. Que constate-t-on ?
6) On suppose maintenant qu'il y a trois réservoirs : A, B_1 et B_2. Pendant chaque intervale de temps dt, il y a une probabilité $w_{n_1,n_2} dt$ que n_1 particules sautent de A vers B_1 et que n_2 particules sautent de A vers B_2. On suppose que w_{n_1,n_2} s'écrit sous la forme
$$w_{n_1,n_2} = \phi(n_1, n_2) e^{\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2},$$
avec $\phi(n_1, n_2) = \phi(-n_1, -n_2)$. Cette dynamique satisfait-elle le bilan détaillé généralisé ?
7) Donner l'expression des courants J_1 et J_2 moyens du réservoir A vers les réservoirs B_1 et B_2.
8) Pour quelles valeurs de α_1 et α_2 est-on proche de l'équilibre thermodynamique ? Retrouver dans cette limite les relations d'Onsager.