Examen de L3

Physique statistique hors équilibre et transitions de phase

Vendredi 20 Juin 2014

Notes de cours et ordinateurs interdits.
Durée de l'épreuve : 3 h.

1 Questions de cours (8 points)

1. Expliquer pourquoi un modèle d'Ising n'a pas de transition de phase tant que le système est fini.
2. On considère une chaîne de N spins d'Ising $S_i = \pm 1$ (pour $1 \leq i \leq N$) avec des conditions périodiques ($S_{N+1} \equiv S_1$). L'énergie d'une configuration est donnée par
$$E = -\sum_i (JS_iS_{i+1} + hS_i)$$
On se place à température finie, pour h très grand. On note $z = e^{-h/kT}$ et $y = e^{-J/kT}$. Donner le développement de l'énergie libre jusqu'à l'ordre z^4.
3. Retrouver le résultat de la question précédente par matrice de transfert.

2 Un spin d'Ising dans un champ dépendant du temps (7 points)

On considère un spin d'Ising $S(t) = \pm 1$. Ce spin est soumis à un champ magnétique $H(t)$ dépendant du temps. Son énergie au temps t est

$$E(t) = -H(t)S(t)$$

Pendant chaque intervalle de temps dt ce spin a une probabilité dt (avec d$t \ll 1$) d'être actualisé et si cela se produit, il prend la valeur $+1$ avec une probabilité $(1 + \tanh \frac{H(t)}{kT})/2$ et la valeur -1 avec une probabilité $(1 - \tanh \frac{H(t)}{kT})/2$.

1. Montrez que cette dynamique vérifie le bilan détaillé.
2. Quand $H(t)$ est constant ($H(t) = H$) que vaut $\langle S \rangle_{\text{eq.}}$ dans la limite des temps longs ? Si on augmente le champ d'un petit incrément $H \to H + \delta H$, quel est le coefficient $\chi(H)$ de réponse de l'aimantation ?
$$\delta \langle S \rangle_{\text{eq.}} = \chi(H)\ \delta H$$
3. Toujours pour un champ H constant, quelle est la variance de S à l'équilibre ? Montrer que le théorème de fluctuation-dissipation est vérifié.
4. Écrire l'équation d'évolution de $\langle S(t) \rangle$ et résoudre en fonction de $\langle S(0) \rangle$. En déduire les probabilités $p_+(t)$ et $p_-(t)$ que $S(t) = +$ et $S(t) = -$, en fonction de $p_+(0)$ et $p_-(0)$.
5. On suppose maintenant que $H(t)$ dépend du temps. On effectue le protocole suivant : à $t = 0$ on prépare le spin dans l'état $S(0) = +1$. Le champ $H(t)$ prend une valeur H_0 pour $0 < t < t_0$ et au temps t_0 il saute brutalement à une nouvelle valeur H_1 qui reste ensuite constante. Calculer $\langle S(t) \rangle$ pour $0 < t < t_0$. En déduire les expressions de p_+ et p_- pour que $S(t_0) = +1$ et $S(t_0) = -1$.
6. Quelles sont les valeurs que peut prendre le travail W fourni au système au moment où le champ saute de H_0 à H_1 ? En déduire $\langle \exp(-\frac{W}{kT}) \rangle$.
7. Calculer l'énergie libre $F(H)$. Pour quelle valeur de t_0 la relation de Jarzynski est elle vérifiée ?

3 Processus de contact sur réseau complet (10 points)

On s'intéresse à un processus de contact sur un réseau complet de N sites, où chaque site est relié aux $N-1$ autres. Chaque site est soit occupé par une particule, soit vide. Entre t et $t+\mathrm{d}t$ (avec $\mathrm{d}t \ll 1$), chaque site occupé a une probabilité $\mathrm{d}t$ de redevenir vide. De plus, si n est le nombre de sites occupés, chaque site vide a une probabilité $(\frac{\lambda n}{N}+h)\mathrm{d}t$ de devenir occupé (le terme proportionnel à λ représente le processus de contact tandis que h représente l'effet d'une source extérieure).

1. Pour N fini et pour $h=0$ quel est le régime stationnaire ?

2. Pour $h \neq 0$ écrire l'équation d'évolution du nombre moyen $\langle n(t)\rangle$ de sites occupés à l'instant t.

3. En effectuant une approximation de champ moyen, déduire de la question précédente qu'en l'absence de source ($h=0$) approximation de champ moyen, la fraction $\rho^* = \frac{\langle n\rangle}{N}$ de sites occupés dans l'état stationnaire est donnée par
$$\rho^* = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \rho^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad \text{si} \quad \lambda > 1 \ .$$
Comment ce résultat est-il modifié pour h petit ? (On distinguera les trois cas : $\lambda < 1, \lambda = 1$ et $\lambda > 1$)

4. Écrire, pour h quelconque, l'équation maîtresse gouvernant l'évolution de $P(n,t)$, la probabilité d'avoir n sites occupés à l'instant t. En déduire l'équation statisfaite par cette probabilité dans le régime stationnaire $Q(n) = P(n,t)$.

5. On se place à $\lambda > 1$ toujours pour h quelconque, toujours à N fini. On définit la fonction de grandes déviations $g(\rho)$ par
$$Q(n = N\rho) \sim \mathrm{e}^{Ng(\rho)}$$
Montrer, en utilisant la question précédente, que
$$\frac{\mathrm{d}g(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = \ln\left[\frac{(\lambda\rho + h)(1-\rho)}{\rho}\right] \ .$$

6. Pour $\lambda > 1$ en déduire, pour N grand, la moyenne et la variance du nombre n de sites occupés.
7. À partir du résultat de la question 5, calculer, pour $h = 0$ et $\lambda > 1$, la différence $g(\rho^*) - g(0)$? Pour un système de taille finie N, estimer le temps τ_N au bout duquel l'état stationnaire de la question 1 est atteint.