TD n° 1: Fluctuations

Février 2015

1 Distribution binomiale et de Poisson

1) On dispose de N boules. Pour chaque boule, indépendamment, on décide si on la garde (avec une probabilité p) ou si on la jette. Quelle est la distribution du nombre n de boules que l'on a gardées ?
2) À partir de cette distribution, calculer la moyenne de n, la variance de n et la fonction génératrice $\langle e^{\lambda n} \rangle$ de n.
3) Une variable de Bernoulli est une variable aléatoire qui ne peut prendre que les valeurs 1 ou 0. Montrer que l'on peut écrire n comme une somme de N variables de Bernoulli indépendantes, et donner l'interprétation de ces variables.
4) Que vaut la moyenne d'une somme de variables aléatoires ? Que vaut la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes ? En déduire un deuxième calcul de $\langle n \rangle$ et $\mathrm{var}(n)$.
5) On suppose maintenant que $p = m/N$ et on envoie N vers l'infini en gardant m constant. Calculer dans cette limite les nouvelles distribution, moyenne, variance et fonction génératrice de n.
6) (Pour ceux qui finissent avant tout le monde, et à la maison pour les autres). On revient au problème avec p fixé, et on écrit $n = Np + \sqrt{N}y$. Calculer la distribution de y quand $N \to \infty$.

2 Théorèmes de fluctuation-dissipation

2.1 Énergie

Un système a l'énergie $E(\mathcal{C})$ quand il se trouve dans la configuration $\mathcal{C}$.

1) Donner l'expression de l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ et de la capacité calorifique $C = \frac{\mathrm{d}\langle E \rangle}{\mathrm{d}T}$ dans l'ensemble canonique à la température T.
2) Donner l'expression de la variance $\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ de l'énergie. En déduire la relation de fluctuation-dissipation entre la capacité calorifique et la variance de l'énergie.

2.2 Densité

On cherche à vérifier sur deux exemples simples que les fluctuations de densité du nombre n de particules d'un gaz dans un sous-volume v sont données par

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = v\rho^2 \kappa k_B T$$

où ρ est la densité particulaire, p est la pression et κ est la compressibilité isotherme définie par

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T$$

3) Justifier la définition de κ et montrer que l'on peut le réécrire comme une dérivée de ρ par rapport à p.

On considère d'abord un gaz parfait classique de N particules dans un volume V.

4) Calculer la variance du nombre n de particules dans un volume v qui est suffisamment grand pour contenir beaucoup de particules, mais qui est beaucoup plus petit que V.
5) Calculer la compressibilité κ et vérifier la relation de fluctuation dissipation.

On considère maintenant un gaz sur réseau Chacune des N particules peut se trouver sur l'un des αV sites d'un réseau occupant le volume V. Chaque site est occupé par au plus une particule.

6) Calculer la variance de n.
7) Calculer la pression et la compressibilité.
8) Vérifier la relation de fluctuation-dissipation.

Exercices supplémentaires

Les exercices suivants ne seront pas traités en TD ; ils sont là pour que vous puissiez vous exercer à la maison. Si ces exercices vous posent problème, nous vous invitons à venir aux séances de soutien pour en discuter.

3 Densités exceptionnelles

On considère un gaz parfait de densité $\rho = N/V$ à l'équilibre thermodynamique à la température T.

1) Comment sont distribuées les vitesses des particules ? Quelle est la vitesse typique d'une particule de gaz dans la salle de TD ?
2) On considère un volume infinitésimal $\mathrm{d}V$ ($\mathrm{d}V$ est infiniment petit au sens mathématique ; ce n'est pas un volume « mésoscopique » au sens de l'hydrodynamique). Quelles sont les probabilités qu'il y ait 0 ou 1 particule dans ce volume ? Peut-il y en avoir 2 ou plus ?
3) En déduire la probabilité de trouver n particules dans un volume donné a. (Indice : on pourra découper le volume a en $a/\mathrm{d}V$ volumes infinitésimaux de taille $\mathrm{d}V$.)
4) Calculer la moyenne et la variance du nombre de particules dans le volume a.
5) On suppose que le volume a est suffisamment grand pour contenir beaucoup de particules, et on cherche maintenant à estimer la probabilité qu'il y ait une grande fluctuation conduisant à avoir plus de $q\rho a$ particules dans ce volume avec $q > 1$ (mais pas trop proche de 1). Montrer que cette probabilité est de l'ordre de celle qu'il y ait exactement $q\rho a$ particules dans le volume, puis en donner une estimation. (On doit trouver $[e^{q-1}/q^q]^{\rho a}$, à des facteurs correctifs près.)
6) On prend $q = 2$ et on donne $e/4 = 0{,}68 = 10^{-0{,}17}$. Pour l'air ambiant, calculer les probabilités qu'il y ait plus de $2\rho a$ particules dans le volume a défini par un cube de 16 nm de côté, puis par un cube deux fois plus volumineux.
7) Quel est le temps typique pour renouveler les particules à l'intérieur du volume a ? En déduire le temps typique qu'il faut attendre pour observer une fluctuation comme celle que l'on vient de décrire.
Réponse : Environ 2 ans pour le cube de 16 nm de côté, et 10^{17} *ans pour le cube deux fois plus volumineux.*

4 Processus de Poisson

On suppose que pendant chaque instant infinitésimal $\mathrm{d}t$, il y a de manière indépendante une probabilité $\alpha\,\mathrm{d}t$ qu'un événement se produise.

1) Quelle est la probabilité que pendant un intervalle de temps t, il n'y ait aucun événement ? Un unique événement ? Exactement n événements ?
2) On appelle t_k l'instant où le k-ième événement est arrivé. Calculer la distribution de t_k, puis sa moyenne et sa variance.
3) Application : un matériau radioactif contient $N \gg 1$ éléments instables. Chaque élément indépendamment a une probabilité $\alpha\,\mathrm{d}t$ de se désintégrer pendant chaque instant $\mathrm{d}t$. Relier α à la « demi-vie » du matériau. Calculer la moyenne et la variance du temps nécessaire pour que tous les éléments instables se soient désintégrés.
Réponse : $\langle T\rangle \approx (\ln N)/\alpha$ *et* $\mathrm{var}(T) \approx \pi^2/(6\alpha^2)$.

5 Distribution hypergéométrique

1) On dispose de T boules, dont une proportion p est marquée. (Donc : pT boules marquées et $(1-p)T$ boules non marquées.) On tire au hasard N boules parmi ces T et on appelle n le nombre de boules marquées que l'on a obtenues. La distribution de n doit ressembler beaucoup à une binomiale (finalement, on a tiré N boules, chacune de ces boules est marquée avec une probabilité p, et on comptabilise les marquées). Expliquer pourquoi ce n'est pas exactement une binomiale et dire dans quelle limite on retrouve la binomiale.
2) Donner la distribution de n. Vérifier que dans la bonne limite on retrouve la binomiale.
3) Montrer que l'on peut écrire n comme une somme de N variables de Bernoulli. Ces variables sont-elles indépendantes ?
4) Calculer la moyenne de n et la variance de n.
Réponse : $\langle n\rangle = Np$, $\mathrm{var}(n) = Np(1-p)\frac{T-N}{T-1}$.