Département de Physique
École normale supérieure

Année 2014–2015
Physique Statistique hors équilibre et transitions de phase

TD n° 4: Fonction de corrélation

Mars 2015

Le but de cet exercice est de montrer que pour $T > T_c$ et $h = 0$, la fonction de corrélation d'un modèle d'Ising, calculée dans l'approximation du champ moyen est de la forme pour R grand et T proche de T_c :

$$\langle S_O S_{\vec{R}} \rangle \sim \frac{1}{R^{d-2}} F\left(\frac{R}{\xi(T)}\right), \tag{1}$$

avec

$$\xi(T) \sim |T - T_c|^{-1/2}. \tag{2}$$

1) On considère un modèle d'Ising avec un champ $h_{\vec{R}}$ dépendant de la position

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle \vec{R}, \vec{R}' \rangle} S_{\vec{R}} S_{\vec{R}'} - \sum_{\vec{R}} h_{\vec{R}} S_{\vec{R}}, \tag{3}$$

où $\vec{R}$ est un vecteur adimensionné qui indexe les sites du réseau et où la première somme se fait sur toutes les paires $\vec{R}$, $\vec{R}'$ de sites voisins. Montrer la relation exacte

$$\frac{\mathrm{d}\langle S_{\vec{R}} \rangle}{\mathrm{d}h_O} = \frac{1}{kT}\Big(\langle S_{\vec{R}} S_O \rangle - \langle S_{\vec{R}} \rangle \langle S_O \rangle\Big). \tag{4}$$

2) Écrire les équations de champ moyen donnant les $\langle S_{\vec{R}} \rangle$ en fonction des h_R. Donner la valeur de T_c (en champ nul) en fonction de J et de z, le nombre de coordination.
3) En déduire les équations satisfaites par la fonction de corrélation $C(\vec{R}) = \langle S_{\vec{R}} S_O \rangle - \langle S_{\vec{R}} \rangle \langle S_O \rangle$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que tous les $h_{\vec{R}}$ sont nuls et que $T > T_c$.

4) Que deviennent les équations obtenues à la question précédente ?
5) On rappelle la définition du Laplacien discret

$$\Delta f(\vec{R}) = \sum_{\vec{R}' \in V(\vec{R})} \Big(f(\vec{R}') - f(\vec{R})\Big), \tag{5}$$

où $V(\vec{R})$ est l'ensemble des sites voisins de $\vec{R}$. Montrer que la fonction de corrélation satisfait

$$T_c \Delta C(\vec{R}) - z(T - T_c) C(\vec{R}) + zT\delta(\vec{R}, O) = 0. \tag{6}$$

6) En passant à la limite continue en dimension d on obtient pour $R \neq 0$

$$T_c \left(\frac{\mathrm{d}^2 C}{\mathrm{d}R^2} + \frac{d-1}{R}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}R}\right) - z(T - T_c) C = 0. \tag{7}$$

Montrer que pour $d = 3$ la solution est de la forme

$$C(R) = \frac{A}{R} e^{-R\sqrt{z\frac{T-T_c}{T_c}}}. \tag{8}$$

Optionnel et plus difficile : combien vaut A ?
7) On revient à la version discrète de l'équation (6) et l'on suppose que le réseau est (hyper)cubique. En passant par l'espace de Fourier, donner une expression pour $C(\vec{R})$
8) En déduire que pour R grand et $T - T_c$ petit la fonction de corrélation est bien de la forme donnée dans l'introduction.

Le modèle d'Ising en 1D et en champ moyen

Les exercices suivants ne seront pas traités en TD ; ils sont là pour que vous puissiez vous exercer à la maison. Si ces exercices vous posent problème, nous vous invitons à venir aux séances de soutien pour en discuter.

Dans le modèle d'Ising, sur chaque site i on met une variable S_i pouvant prendre les valeur ± 1. L'Hamiltonien est

$$\mathcal{H} = -B \sum_i S_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j, \tag{9}$$

où la seconde somme est sur toutes les paires i,j de sites telles que i et j soient plus proches voisins.

1 En une dimension, matrice de transfert

On considère une ligne de N spins.

1) En une minute, calculer la fonction de partition pour $J = 0$.
2) En deux minutes, calculer la fonction de partition pour $B = 0$. On introduira $\tau_i = S_i S_{i+1}$.
3) On considère maintenant $J > 0$ et $B > 0$. On pose $Z_N = Z_N^+ + Z_N^-$, où $Z_N^\pm$ est la contribution à la fonction de partition de toutes les configurations dont le N-ième spin est ± 1. Montrer que l'on peut calculer les $Z_N^\pm$ par récurrence à partir d'une matrice de transfert, et expliciter cette matrice.
4) Calculer les valeurs propres de M. En supposant que P est une matrice de passage qui diagonalise M, que vaut M^N ? En déduire la valeur de

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N. \tag{10}$$

Vérifier qu'on retrouve bien les résultats attendus pour $B = 0$ ou $J = 0$.

5) Calculer l'énergie libre dans la limite thermodynamique pour B petit jusqu'à l'ordre B^2. En déduire la magnétisation moyenne et la susceptibilité magnétique en champ nul de ce système.

2 En dimension infinie, modèle de Curie-Weiss, champ moyen

On considère maintenant que chacun des N spins est relié à tous les autres, et que donc la somme dans (9) se fait sur les $N(N-1)/2$ paires de spins. On suppose aussi que $J = j/N$ avec j fixé.

1) Montrer que l'hamiltonien est une fonction de la magnétisation. Pourquoi a-t-on introduit le scaling $J = j/N$?
2) On pose $m = M/N$. Combien y a-t-il de configurations avec m fixé ?

En microcanonique

3) À partir de la définition de la température microcanonique, établir une relation entre B, j, m et T.
4) À $B = 0$, montrer qu'il y a une transition de phase et déterminer la température critique.
5) Que vaut la susceptibilité magnétique pour $T > T_c$ en champ nul ?

En canonique

6) Écrire la fonction de partition sous la forme d'une somme. Montrer que dans la limite thermodynamique on peut écrire

$$Z \sim \int_{-1}^{1} \mathrm{d}m \; e^{N\phi(m)}.$$

Que représente $\phi(m)$? Comment calculer-t-on ce genre d'intégrale dans la limite thermodynamique ? Vérifier que l'on retrouve le calcul fait en microcanonique.