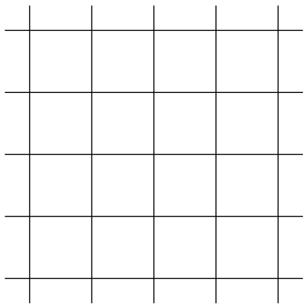
Année 2014–2015
Physique Statistique hors équilibre et transitions de phase

Département de Physique
École normale supérieure

TD n° 6: Température critique du modèle d'Ising bidimensionnel

mars/avril 2015

Considérons N spins d'Ising $\sigma_i = \pm 1$ placés sur les nœuds d'un réseau carré, schématisé sur la figure ci-dessous.



L'énergie d'une configuration est définie par :

$$H(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \ , \tag{1}$$

où la somme porte sur les liens du réseau entre plus proches voisins, et l'on supposera des conditions aux limites périodiques dans les deux directions. Les interactions sont ferromagnétiques, $J > 0$. L'objectif de l'exercice est de déterminer la température critique T_c du modèle.

1) Combien de termes comporte la somme dans l'équation (1) ?
2) Si ce système présente une transition de phase à température finie, quel est alors l'ordre de grandeur de la température critique associée ?

1 Développement de haute température

1) Montrer que l'on peut écrire $e^{\beta J \sigma_i \sigma_j} = c(1 + t\sigma_i\sigma_j)$, où l'on précisera les valeurs des constantes c et t.
2) En déduire l'écriture suivante de la fonction de partition à la température inverse β :

$$Z_N(\beta) = c^{2N} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + t\sigma_i\sigma_j) \ . \tag{2}$$

Combien de termes comporte le développement du produit dans cette équation ?

3) Remarquons que chaque terme est un produit de $t\sigma_i\sigma_j$. On associe alors à chacun de ces termes un diagramme, c'est-à-dire un sous-ensemble des liens du réseau, correspondant aux liens $t\sigma_i\sigma_j$ retenus dans ce terme. Caractériser les diagrammes qui donnent une contribution non nulle dans l'équation (2).

On ordonne ce développement en puissances de t, en définissant des coefficients $a_{N,n}$ selon

$$Z_N(\beta) = (2c^2)^N \sum_{n=0}^{\infty} a_{N,n} t^n \ . \tag{3}$$

4) Justifier le nom de développement de haute température donné à cette série. On notera dans la suite $A_N(x) = \sum_n a_{N,n} x^n$.
5) Donner une définition, sans calcul, du coefficient $a_{N,n}$ pour n quelconque.

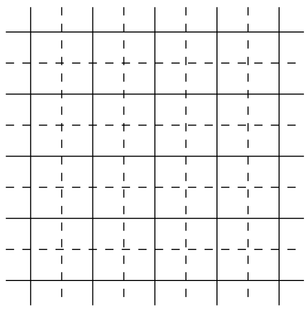
6) Calculer les valeurs de $a_{N,n}$ pour $n = 0, 1, \ldots, 8$.
7) Remarquons la présence de puissances multiples de N dans la fonction de partition. L'extensivité de l'énergie libre est-elle encore assurée ? Le vérifier pour un développement jusqu'à l'ordre 8.

2 Développement de basse température

1) Quelles sont les configurations qui minimisent le Hamiltonien (1) ? Donner leur nombre et leur énergie E_0.
2) Quelle est l'énergie $E_1 > E_0$ des premiers niveaux excités ? Décrire les configurations correspondantes et donner leur nombre.
3) Même question pour le niveau suivant, d'énergie $E_2 > E_1$.
4) En déduire le développement de basse température suivant,

$$Z_N(\beta) = 2e^{2N\beta J}\left(b_{N,0} + b_{N,4}\left(e^{-2\beta J}\right)^4 + b_{N,6}\left(e^{-2\beta J}\right)^6 + o\left(\left(e^{-2\beta J}\right)^6\right)\right) , \tag{4}$$

où l'on précisera les valeurs des coefficients $b_{N,n}$. Les comparer aux coefficients $a_{N,n}$ du développement de haute température.
5) Montrer que le développement de basse température peut s'écrire $Z_N(\beta) = 2e^{2N\beta J}A_N(e^{-2\beta J})$, où $A_N(x)$ est la fonction définie à la question 1.4. Pour cela on pourra considérer les diagrammes du réseau dual, schématisé en pointillés sur la figure suivante.



3 Température de transition

1) On note $f(\beta) = -\frac{1}{\beta}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln Z_N(\beta)$ l'énergie libre par spin dans la limite thermodynamique. Déduire des développements de haute et basse température deux expressions de $f(\beta)$. On notera $g(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln A_N(x)$.
2) On admet que le modèle présente une unique température critique, et donc que $f(\beta)$ est singulière en un unique point β_c. Montrer que :

$$\beta_c J = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) . \tag{5}$$

3) Le champ moyen prédit une autre valeur pour la température critique : $\beta_c^{cm} zJ = 1$, où z est la coordinence du réseau. La comparer avec la valeur obtenue à la question précédente et commenter.

Renormalisation appliquée au modèle d'Ising sur un réseau hiérarchique

Les exercices suivants ne seront pas traités en TD ; ils sont là pour que vous puissiez vous exercer à la maison. Si ces exercices vous posent problème, nous vous invitons à venir aux séances de soutien pour en discuter.

On considère maintenant le modèle d'Ising sur le réseau hiérarchique de degré n, défini ainsi : le réseau hiérarchique de degré 0 est constitué d'un segment ; le réseau hiérarchique de degré $n+1$ s'obtient en remplaçant tous les segments par des losanges dans le réseau hiérarchique de degré n. (Voir figure) On vérifie (faites le !) qu'il y a 4^n segments et $2(4^n+2)/3$ sommets dans le

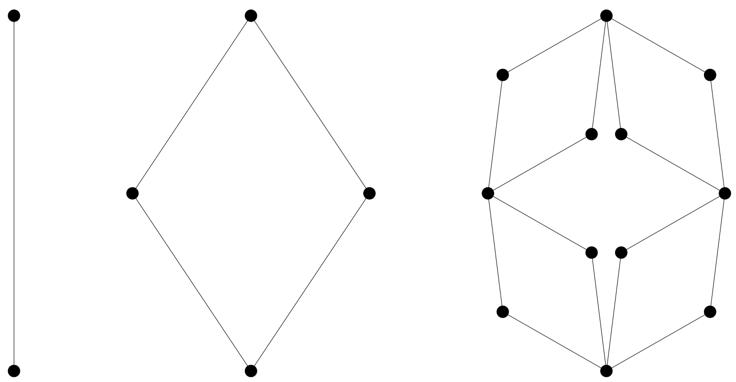


FIGURE 1 – Le réseau hiérarchique pour les degrés 0, 1 et 2.

réseau hiérarchique de degré n. On met des spins sur les sommets ; deux spins sont voisins s'ils sont reliés par un trait.

Soit $Z_n(\beta J)$ la fonction de partition du réseau hiérarchique de degré n, et $Z_n^{\sigma,\tau}(\beta J)$ la fonction de partition du réseau hiérarchique de degré n quand le spin du haut vaut σ et que le spin du bas vaut τ. On travaillera tout le temps à $B = 0$.

4) On a clairement

$$Z_0^{\sigma,\tau}(\beta J) = e^{\beta J \sigma\tau}, \qquad Z_0(\beta J) = 4\cosh(\beta J). \tag{6}$$

Calculer $Z_1^{\sigma,\tau}(\beta J)$ et montrer que l'on peut écrire

$$Z_1^{\sigma,\tau}(\beta J) = A(\beta J) e^{K(\beta J)\sigma\tau} \tag{7}$$

où A et K sont deux fonctions que l'on déterminera.

5) On considère maintenant le réseau hiérarchique de degré n. En sommant sur tous les spins n'ayant que deux voisins, écrire $Z_n(\beta J)$ à l'aide de Z_{n-1}. Interpréter le résultat.

6) Tracer sur un même graphe l'allure de $x \mapsto K(x)$ et la diagonale $x \mapsto x$.

7) Selon la valeur de βJ, vers quoi $K_p = K \circ K \circ \cdots \circ K(\beta J)$ évolue-t-il quand le nombre p d'itérations devient grand ? Quel est l'interprétation de ce résultat ?

8) On pose $\phi_n(\beta J) = -4^{-n}\beta^{-1} \ln Z_n(\beta J)$ l'énergie libre spécifique pour le réseau hiérarchique de taille n. Écrire la récurrence pour ϕ_n.

9) On rappelle que l'exposant critique α est défini par $C_V \propto (T - T_c)^{-\alpha}$. On pose $\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$. Justifier que

$$\phi(\beta J) = B(\beta J - \beta_c J)^{2-\alpha} + \phi^R(\beta J) \tag{8}$$

où β_c est la température critique inverse, B est une constante (ou peut-être une fonction du signe de $\beta - \beta_c$) et ϕ^R est une fonction régulière.

10) Calculer α.

11) [Bonus] Écrire une expression explicite de ϕ_∞ faisant intervenir une somme infinie.