TD n° 8: modèle de Kac et modèle de trafic

Mai 2015

Le modèle de Kac

On considère un cercle de L sites. Chaque intervalle entre deux sites consécutifs contient une boule qui peut être blanche ou noire. À chaque pas de temps toutes les boules se déplacent d'un pas dans le sens trigonométrique. Une fraction μ de sites du réseau contient des marqueurs. Ces marqueurs sont fixes et situés à des positions aléatoires. Chaque fois qu'une boule traverse un marqueur, elle change de couleur. On appelle $B(t)$ et $N(t)$ le nombre de boules blanches et noires et $b(t)$ et $n(t)$ le nombre de boules blanches et noires *se trouvant juste avant un marqueur.*

1) Écrire $B(t+1)$ et $N(t+1)$ en fonction de $B(t)$, $N(t)$, $b(t)$ et $n(t)$.
2) Ce système est-il réversible ?
3) Quel est le temps de retour de Poincaré ?
4) En faisant une hypothèse du type chaos moléculaire, calculer l'évolution de $B(t)$ et de $N(t)$. Tracer l'allure de $N(t)/L$ en fonction du temps.

Modèle de trafic à une dimension

On considère un système de voitures ponctuelles se déplaçant sur une ligne. À l'instant initial, les voitures sont réparties uniformément et aléatoirement sur la ligne avec une densité 1. Chaque voiture a une vitesse aléatoire fixée à $t = 0$. Lorsqu'une voiture rapide rattrape une voiture lente, elle se met à la vitesse de la voiture lente ; les deux voitures forment alors un groupe qui se déplace de conserve à la vitesse lente. Comme les voitures sont ponctuelles, le groupe ne prend pas plus de place qu'une seule voiture ; c'est un peu comme si la voiture rapide avait disparue.

Le but de l'exercice est d'évaluer dans différentes situations comment évolue au court du temps la proportion de voitures avec une vitesse donnée.

Cas à deux vitesses On suppose qu'il n'y a que deux vitesses possibles, v_A et v_B avec $v_A > v_B$. À l'instant initial, une proportion $\rho_0(A)$ de voitures a la vitesse A et une proportion $\rho_0(B) = 1 - \rho_0(A)$ a la vitesse B.

1) On considère une voiture de type A donné à l'instant initial. Quelle est la probabilité que la première voiture de type B devant elle soit à une distance comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$?
2) En déduire les densités $\rho_t(A)$ et $\rho_t(B)$ de voitures (ou de groupes) de type donné en fonction du temps.

Cas à trois vitesses On suppose maintenant qu'il y a trois vitesses possibles $v_A > v_B > v_C$ avec des probabilités initiales $\rho_0(A)$, $\rho_0(B)$ et $\rho_0(C)$.

3) Calculer $\rho_t(A)$, $\rho_t(B)$ et $\rho_t(C)$.

Cas quelconque On suppose maintenant que chaque voiture reçoit une vitesse entre v et $v + \mathrm{d}v$ avec une probabilité $\rho_0(v)\mathrm{d}v$ pour une distribution $\rho_0(v)$ quelconque.

4) Calculer $\rho_t(v)$, la densité de voitures (ou de groupes) au temps t avec une vitesse v. (Attention, ce n'est pas une distribution si $t \neq 0$...)

Équation de Boltzmann

5) En considérant ce qui se passe entre t et $t + \mathrm{d}t$ et en faisant, comme dans l'équation de Boltzmann, une hypothèse d'indépendance, donner directement une relation approchée pour $\rho_{t+\mathrm{d}t}(v)$ puis pur $\partial_t \rho_t(v)$.
6) Comparer l'équation de Boltzmann avec le résultat exact.

Loi d'échelle On suppose que les vitesses sont toutes positives ($\rho_0(v) = 0$ pour $v < 0$) et que pour v petit on a $\rho_0(v) \simeq A v^{\mu}$.

7) Déterminer le comportement de $\rho_t(v)$ pour $v \ll 1$ et t grand.
8) En déduire le comportement de la densité totale de groupes de voitures en fonction du temps pour des temps longs.