

Théorie Statistique des Champs

Examen du 30 mars 2007 - Corrigé

1 Transition isotrope-nématique (IN)

1a. Le potentiel entre batonnets décroît sur une distance de l'ordre de la taille d'un batonnet et est proportionnel au carré du sinus de leur angle relatif. On représente ainsi, de manière approchée, l'interaction stérique entre batonnets.

1b. L'expression de \mathcal{S} correspond à celle d'un gaz parfait de batonnets ayant des degrés de libertés spatiaux et orientationnels. Cette expression n'est pas correcte en général à cause des interactions mais vaut seulement à faible densité $N \times (1/L)^3 = \rho_0 \ll 1$.

1c. La phase I correspond à $\alpha = 0$, la phase N à $\alpha > 0$. Lorsque α est grand la densité est piquée autour de $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ comme sur la figure 1. On vérifie que

$$\begin{aligned} \int d\vec{r} d\vec{u} \rho(\vec{r}, \vec{u}) &= \rho_0 L^3 \times \frac{\alpha + 1}{4\pi} \int_0^\pi 2\pi d\theta \sin \theta |\cos \theta|^\alpha \\ &= N \times \frac{\alpha + 1}{2} \times 2 \int_0^1 dx x^\alpha = N \end{aligned} \quad (1)$$

1d. Pour obtenir l'entropie il suffit d'observer que

$$\int_0^1 dx x^\alpha \ln x^\alpha = \int_0^1 \frac{du}{\alpha + 1} \ln u \times \frac{\alpha}{\alpha + 1} = -\frac{\alpha}{(\alpha + 1)^2} \quad (2)$$

avec le changement de variable $x \rightarrow u = x^{\alpha+1}$.

1e. On calcule

$$\langle u_z^2 \rangle = (\alpha + 1) \int_0^1 dx x^\alpha x^2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} \quad (3)$$

puis $\vec{u}^2 = 1$ donne

$$\langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \frac{1}{\alpha + 3} \quad (4)$$

Les valeurs moyennes croisées, par exemple $\langle u_x u_z \rangle$, sont toutes nulles par symétrie. Ensuite on remarque que, par unité de volume,

$$\mathcal{E} = \rho_0^2 \left(1 - \sum_{i,j=x,y,z} \langle u_i u_j \rangle \right) \quad (5)$$

1f. L'énergie libre vaut $\rho_0^2 \times \mathcal{F}[\alpha, t]$ en $t = kT/\rho_0$ (plus des termes ne dépendant pas de α). D'après la figure 2 à grand t le seul minimum de \mathcal{F} est en $\alpha = 0$: le système est dans la phase isotrope. Un autre minimum local apparaît à $t \simeq 0.145$: cela correspond à l'apparition d'une phase N métastable. Le minimum local en $\alpha > 0$ devient global pour $t < .1362$. Le système est donc dans la phase nématique pour des températures $T < T_{IN}(\rho_0) = .1362\rho_0/k$. A cette température la transition est du premier ordre. La phase I reste métastable tant que $\mathcal{F}''(\alpha = 0, t) > 0$.

2 Transition nématique - smectique (NS)

2a. La figure 1 montre que le système dans la phase smectique a des modulations de densité suivant l'axe z de période d (épaisseur d'une couche) donc $q_0 = 2\pi/d$. Δ est le paramètre variationnel égal à dans la phase N, et positif dans la phase S. La fonction G étant impair la densité ρ reste normalisée.

2b. Si la transition advient à $q_0 \geq q^*$ elle est du deuxième ordre avec $\Delta = 0$ à la transition : $T_{NS} = T_2$. Si $q_0 < q^*$ à la transition on retrouve le scénario de la transition IN : la transition NS est alors du premier ordre et $T_2 < T_{NS} < T_4$.

2c. Pour que les deux termes dans F' soient du même ordre on doit avoir $\Delta^4 \sim t$ c'est-à-dire $\beta_3 = \frac{1}{4}$. F' vaut alors $t^{\frac{3}{2}} = t^{2-\alpha_3}$ d'où $\alpha_3 = \frac{1}{2}$. Le coefficient de Δ^2 étant t on a $\nu_3 = \frac{1}{2}$. Comme $\eta_3 = 0$ on trouve $\gamma_3 = 2\nu_3 = 1$. Le terme en Δ^4 a comme coefficient t lui-aussi ; il est donc d'ordre t^2 et est négligeable.

On peut refaire facilement l'argument de Ginzburg donné dans le cours. Le résultat est que

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta - \langle\Delta\rangle)^2\rangle}}{\langle\Delta\rangle} \sim t^{\frac{d}{4} - \frac{\gamma_3}{2} - \beta_3} \sim t^{\frac{d-3}{4}} \quad (6)$$

donc la dimension critique supérieure vaut 3 au point tricritique (elle vaut 4 sur la ligne de transition continue T_2).

3 Fluctuations dans la phase S

3a. Il n'y a pas de terme en

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$

car si φ dépend linéairement de x, y on a seulement une phase smectique dont l'axe principal n'est plus dans la direction z , sans fluctuation de l'épaisseur de la couche donc

sans que l'énergie soit affectée. Les termes dépendant de la dérivée seconde de φ par rapport à z sont dans la pratique négligeables. On calcule

$$\langle [\varphi(\vec{0}_\perp, z) - \varphi(\vec{0})]^2 \rangle = 2kT \int \frac{d\vec{q}_\perp dq_z}{(2\pi)^3} \frac{1 - e^{iq_z z}}{B q_z^2 + K (\vec{q}_\perp^2)^2} \quad (7)$$

L'intégrale sur q_z est limitée à $|q_z| < q_0$ (car la maille élémentaire dans la direction z vaut d). On effectue d'abord l'intégrale sur les dimension transverses :

$$\int \frac{d\vec{q}_\perp}{B q_z^2 + K (\vec{q}_\perp^2)^2} = \int_0^\infty \frac{dq 2\pi q}{K q^4 + B q_z^2} = \frac{\pi^2}{2 |q_z| \sqrt{BK}} \quad (8)$$

en utilisant la formule dans les indications. L'intégrale sur q_z diverge logarithmiquement en $q_0 z$ avec la constante multiplicative indiquée. Le calcul des variations quadratiques de φ dans le plan horizontal et en fonction de r_\perp est identique.

3b. On écrit

$$\sum_j e^{iq_z z_j} \simeq \int d\vec{r}_\perp \sum_\ell e^{iq_z [d\ell + \varphi(\vec{r}_\perp, \ell d)]} \quad (9)$$

où la somme porte sur les entiers ℓ . On en déduit, après multiplication par le complexe conjugué, division par le volume et moyenne sur les champs gaussiens φ la formule désirée pour I .

3c. Avec $q_z = q_0 + \epsilon/d$ on a

$$I(q_z) \simeq \sum_{\ell \geq 1} \cos(\epsilon \ell) \int d\vec{r}_\perp \exp\left(-\frac{q_0^2}{2} G(r_\perp, \ell d)\right) \quad (10)$$

où G est la fonction de corrélation du champ φ . Soit ℓ fixé. D'après la question précédente $G(r_\perp, \ell d)$ est très grand devant $G(0, \ell d)$ lorsque $r_\perp \gg \sqrt{\ell d}$ et la contribution à l'intégrale devient négligeable. On peut donc écrire

$$I(q_z) \simeq \sum_{\ell \geq 1} \cos(\epsilon \ell) (\sqrt{\ell d})^2 \exp\left(-\frac{q_0^2}{2} G(0, \ell d)\right) \simeq \sum_{\ell \geq 1} \frac{\cos(\epsilon \ell)}{\ell^{\eta-1}} \quad (11)$$

d'où le résultat annoncé puisque $\eta - 1 < 1$. L'accord avec les données est bon sauf lorsque q_z est très proche de q_0 : en volume fini I ne peut diverger et est borné par une puissance de L .

4 Exposants critiques à la transition NS

4a. On trouve que ν_\perp est ν_\parallel sont dans l'intervalle à 0.6-0.7. On néglige dans la suite l'anisotropie et on considère que les deux exposants sont égaux. L'exposant γ vaut 1.2-1.3

4b. On minimise F pour obtenir $\Delta \sim |t|^{\frac{1}{4}} \times H(x = u |t|^{-\frac{1}{2}})$. Lorsque $x \rightarrow \infty$, $H(x) \sim 1/\sqrt{x}$ et on retrouve $\Delta \sim |t|^{\frac{1}{2}}$ (régime critique normal).

La fonction de corrélation G est celle du point tricritique lorsque $u = 0$; elle fait donc intervenir les exposants η_3, ν_3 . Le point fixe tricritique est instable suivant l'axe u et le flot se dirige vers le point fixe critique $u = \infty$ à $t = 0$. On en déduit $G(1, 0, u) \sim u^{\eta_2/\omega_3}$ pour retrouver le comportement critique de la fonction de corrélation.

En choisissant $s \sim r$ on exprime les corrélations à distance r en fonction des corrélations à distance 1 avec une température $t' = tr^{1/\nu_3}$ et une constante $u' = ur^{\omega_3}$. En champ moyen le système reste dans le régime tricritique si $t'^2 \sim u'$ c'est-à-dire $\omega_3 = 1$.

La relation (13) est vérifiée avec

$$g(x, y) = [xK(y)]^{d-2+\eta_3} G(xK(y), 1, y) \quad (12)$$

Pour $y = 0$ $g(x, 0)$ se comporte comme une fonction exponentiellement décroissante. Pour $y \gg 1$ même comportement avec un facteur multiplicatif x^{η_2} .

La fonction d'échelle $K(y)$ tend vers une constante lorsque $y \rightarrow 0$ et croît comme y^a lorsque $y \rightarrow \infty$ avec

$$a = \frac{\nu_2 - \nu_3}{\nu_3 \omega_3} \simeq \frac{1}{3} \quad (13)$$

en prenant la valeur de ω_3 en champ moyen. Ainsi on a un exposant ν effectif qui ne prend sa vraie valeur (ν_2 qu'à des températures très proches de la température critique et ceci d'autant plus que l'on est proche du point tricritique c'est-à-dire que la constante de couplage u est faible. Dans la pratique la température ne peut s'approcher infiniment près de sa valeur critique et on mesure un exposant qui est intermédiaire entre la valeur XY et la valeur tricritique. C'est ce qu'on voit dans la table. L'effet de crossover est d'autant plus fort que la température de transition T_{NS} est proche de celle de T_{IN} en accord avec le diagramme de phase qualitatif de la section 2.