PHY563 : PETITE CLASSE 1 - Corrigé de la question 5

La probabilité que le marcheur revienne pour la première fois à l'origine au temps t est $P_1(\mathbf{0}, t)$. Nous avons montré, en résolvant les questions 1 et 2, que la fonction génératrice de ces probabilités de premier retour vaut

$$\hat{P}_1(\mathbf{0}, \lambda) = 1 - \left[\int_B \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left(1 - \frac{\lambda}{d} \sum_\mu \cos k_\mu \right)^{-1} \right]^{-1}$$

pour une marche à premiers voisins sur le réseau hyper-cubique en dimension d. B représente la première zone de Brillouin (dans l'espace réciproque à d dimensions).

Considérons d'abord le cas $d = 1$. L'intégrale sur k dans l'expression de $\hat{P}_1$ se calcule exactement (par exemple, en utilisant la méthode des résidus) et l'on trouve le résultat suivant

$$\hat{P}_1(\mathbf{0}, \lambda) = 1 - \sqrt{1 - \lambda^2} \qquad\qquad (d = 1)$$

On peut alors développer cette série en puissance de λ pour trouver les coefficients qui nous intéressent :

$$1 - \sqrt{1 - \lambda^2} = \sum_{t \geq 2 \,\mathrm{et}\, t \,\mathrm{pair}} \frac{1}{t\, 2^{t-2}} \binom{t-2}{t/2 - 1} \lambda^t$$

On en déduit que, pour t pair,

$$P_1(\mathbf{0}, t) = \frac{1}{t\, 2^{t-2}} \binom{t-2}{t/2 - 1} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, t^{-3/2}$$

aux temps grands. On voit que, bien que la probabilité de revenir à l'origine soit 1, le temps moyen de retour est infini.

Cette méthode directe est très précise mais ne fonctionne que si l'on est capable de calculer P_1 exactement, ce qui n'est en général pas possible lorsque la dimension est supérieure à 1. Nous allons maintenant utiliser une méthode plus puissante qui relie le comportement singulier de la fonction génératrice proche de son rayon de convergence au comportement asymptotique de ses coefficients.

On considère la série génératrice d'une suite de coefficients p_t, où t est un entier positif,

$$p(\lambda) = \sum_{t \geq 0} p_t\, \lambda^t \ .$$

Supposons que p_t se comporte asymptotiquement comme

$$p_t = t^{-b}\, e^{-a\, t}$$

où a et b sont des paramètres. Il est facile de voir que le rayon de convergence de $p(\lambda)$ est

$$\lambda_c = e^a \quad .$$

Inversement, si l'on connaît le rayon de convergence λ_c de $p(\lambda)$, alors on sait que les coefficients p_t décroissent exponentiellement avec t comme $e^{-a\,t}$, avec $a = -\ln \lambda_c$. On va maintenant relier l'exposant b avec la nature de la singularité lorsque $\lambda \to \lambda_c$. Posons $\lambda = \lambda_c(1-\epsilon)$ avec $\epsilon > 0$. Alors

$$p(\lambda) = \sum_{t\geq 0} \frac{(1-\epsilon)^t}{t^b} \simeq \int_0^\infty \frac{dx}{\epsilon}\, \frac{(1-\epsilon)^{x/\epsilon}}{(x/\epsilon)^b} \simeq \epsilon^{b-1} \int_0^\infty dx\, \frac{e^{-x}}{x^b} \ .$$

où nous avons utilisé l'équivalence entre somme et intégrale de Riemann. Pour $b < 1$ l'intégrale ci-dessus converge et on trouve donc que la série génératrice diverge comme

$$p(\lambda) = \mathit{constante} \times (\lambda_c - \lambda)^{b-1} \qquad\qquad (b < 1) \ .$$

lorsque $\lambda \to \lambda_c$. Pour $1 < b < 2$, on se ramène au cas précédent en dérivant par rapport à ϵ. On trouve alors que $p'(\lambda)$ se comporte comme $-\epsilon^{b-2}$, puis en intégrant par rapport à ϵ,

$$p(\lambda) = p(\lambda_c) - \mathit{constante} \times (\lambda_c - \lambda)^{b-1} \qquad\qquad (1 < b < 2) \ .$$

Remarquez que $p(\lambda_c)$ est bien définie ici car $b > 1$.

Le cas $d = 1$ que nous avons analysé auparavant correspond à $\lambda_c = 1$ et $b - 1 = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $a = 0, b = \frac{3}{2}$ comme attendu. Nous pouvons maintenant utiliser cette technique en dimension $d = 2$. Le rayon de convergence de la série est $\lambda_c = 1$. Puis

$$\int_B \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \left(1 - \frac{(1-\epsilon)}{2} \sum_\mu \cos k_\mu \right)^{-1} \simeq \int_0 \frac{k\,dk}{2\pi}\, \frac{1}{\epsilon + k^2/4} \simeq -\ln \epsilon$$

lorsque $\epsilon \to 0$. On en déduit que

$$\hat{P}_1(\mathbf{0}, \lambda) = 1 + \frac{\mathit{constante}}{\ln(1-\lambda)} \qquad\qquad (d = 2)$$

Nous en déduisons que $a = 0, b = 1$. La présence d'une singularité logarithmique suggère d'aller plus loin et de recommencer l'étude ci-dessus dans le cas où p_t contient lui-même une dépendance en $\ln t$. En recommançant les calculs on trouve que

$$P_1(\mathbf{0}, t) \simeq \frac{\mathit{constante}}{t(\ln t)^2} \qquad\qquad (d = 2) \ .$$

Il s'agit d'une distribution décroissant extrêmement lentement. Bien sûr le temps moyen de retour à l'origine diverge.